ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

«Άρχισα να ενδιαφέρομαι για τη γεωμετρία του υπερβολικού παραβολοειδούς. Η ιδέα μιας απεριόριστης καμπύλης, η οποία δεν έχει στοιχεία καμπύλης, ήταν η έμπνευση που προκάλεσε 11 χρόνια δουλειάς. Ο πειραματισμός πάνω στην κατασκευή αυτών των επιφανειών οδήγησε τελικά στη δημιουργία της υπερβολικής παραβολοειδούς στήλης το 1985», Joe Orlando, γλύπτης (εικ. 1).

Η σύνθεση των επιφανειών που παράγουν τα γεωμετρικά σχήματα είναι στην ουσία η ίδια η αρχιτεκτονική σύνθεση. Η εξέλιξη των μαθηματικών και της τεχνολογίας των κατασκευών, η δημιουργία νέων υλικών δομής και πάνω απ' όλα οι πρωτοπόρες ιδέες πολλών αρχιτεκτόνων (εικ. 2), έδωσαν αρχιτεκτονικά έργα που συνθέτουν τις επιφάνειες των βασικών γεωμετρικών στερεών με εκείνες πιο πολύπλοκων, τόσο από άποψη τεχνική, όσο και από άποψη μορφολογική. Πολλές από τις επιφάνειες αυτές είναι ευθειογενείς τετραγωνικές επιφάνειες και αυτό σημαίνει ότι μπορούν να κατασκευαστούν μέσω καλωδίων (ιμάντων), αλλά η φόρμα τους είναι πιο ελεύθερη και πλαστική. Σε πολλά αρχιτεκτονικά παραδείγματα η κατασκευή έχει γίνει από beton, ακριβώς επειδή είναι χυτό δομικό υλικό. Το κατάλληλα υπολογισμένο και κατασκευασμένο καλούπι (ξυλότυπος) μπορεί να δημιουργήσει ολόσωμες και πιο πλαστικές φόρμες συγκριτικά με τη βασική δομή της «δοκού επί στηλών» (εικ. 3).

εικ. 1

εικ. 2 I. M. Pei, *Rock & Roll Hall of Fame*, Cleveland, Ohio, 1998

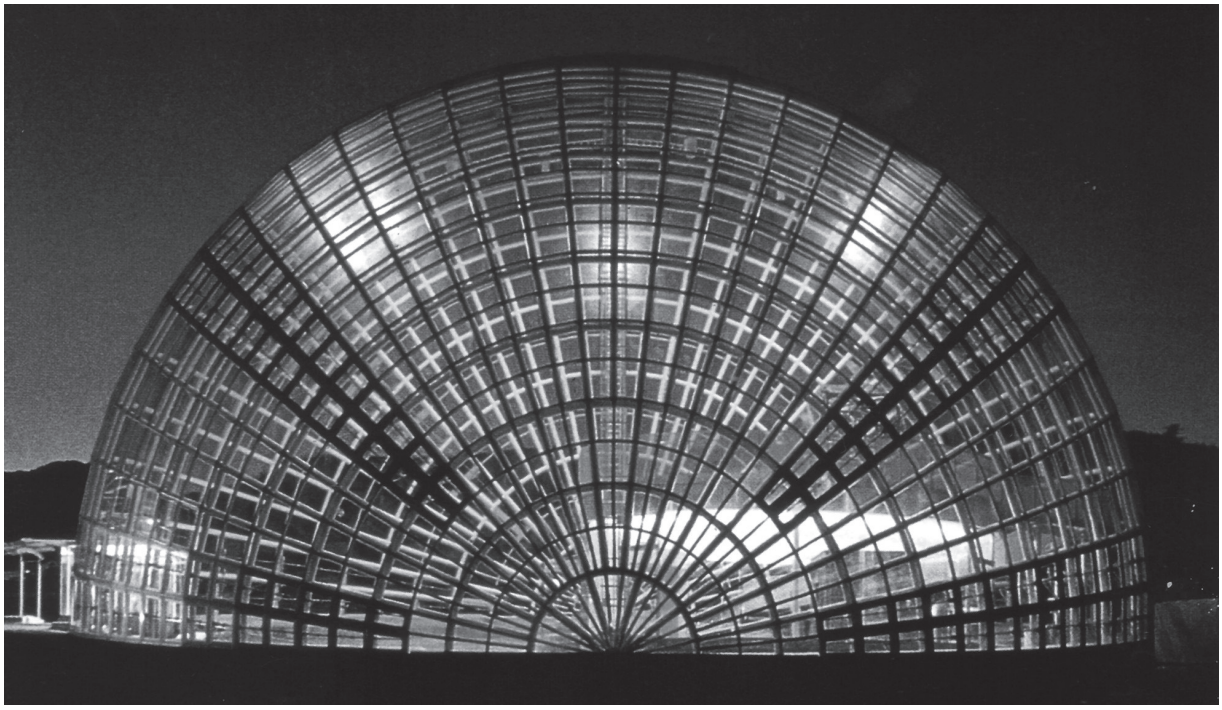
εικ. 3 Εκκλησία στις ΗΠΑ, 2000

εικ. 4

εικ.5 Προπαρασκευαστικό μάθημα του Josef Albers στη σχολή του Bauhaus, με σπειροειδείς και άλλες τετραγωνικές αναπτυκτές επιφάνειες, 1928

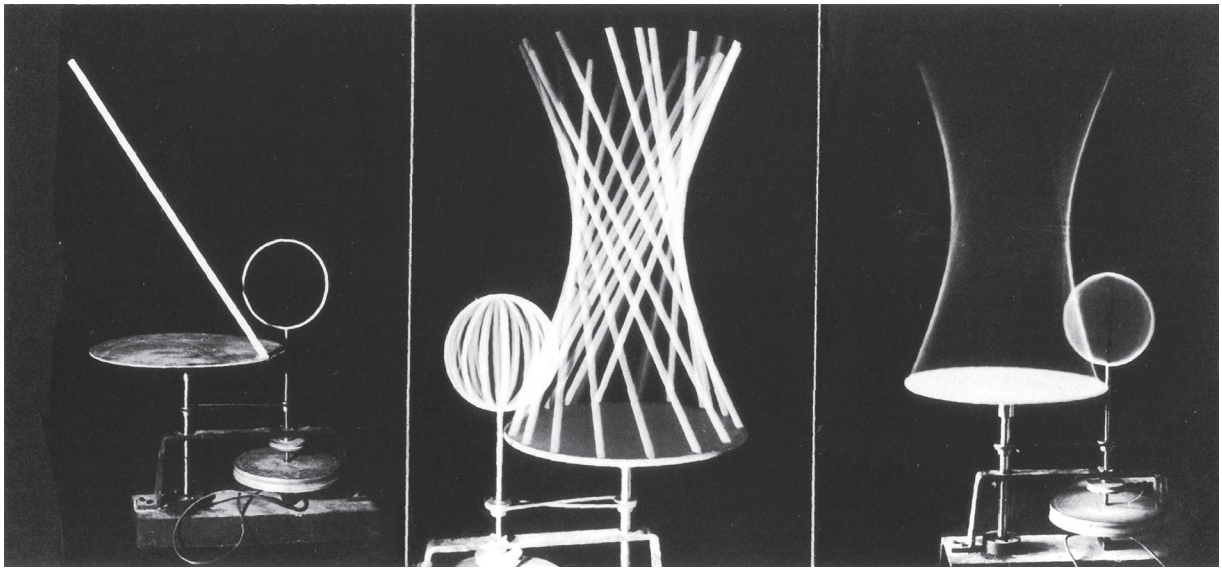
εικ. 6 Wikinson Eyre Architects, *γέφυρα που ενώνει τα δύο κτίρια του Royal Ballet School,* Covent garden, Λονδίνο

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται μερικές από της επιφάνειες αυτές, οι οποίες μελετώνται κυρίως από άποψη γεωμετρική και κατασκευαστική και λιγότερο μαθηματική, με στόχο να γίνουν γνωστές σαν φόρμες ή στοιχεία αρχιτεκτονικών συνθέσεων (εικ. 4).



εικ. 7 Itsuko Hasegaua, *Μουσείο των φρούτων*, Yamanashi, Ιαπωνία, 1995

εικ. 8



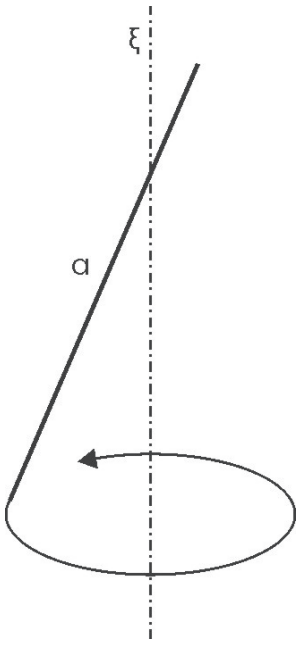
εικ. 9 Edmund Collein & Heitz Loew, Light sculpture studies, 1928. Η περιστροφική κίνηση της ευθείας και του κύκλου δίνουν στη μεσαία φωτογραφία την αίσθηση των εκ περιστροφής σχημάτων του μονόχωνου υπερβολοειδούς και της σφαίρας. Στην τρίτη φωτογραφία η ταχύτητα έχει αυξηθεί τόσο, που δεν αναγνωρίζονται τα αρχικά σχήματα. Φαίνονται όμως οι καμπύλες υπερβολής του μονόχωνου υπερβολοειδούς

Οι επιφάνειες που μελετάμε ονομάζονται **τετραγωνικές** διότι η μαθηματική εξίσωση που τις αποδίδει, περιλαμβάνει παράγοντες στη $2^{η}$ δύναμη (στο τετράγωνο) και τρείς συντεταγμένες (χωρικές επιφάνειες). Στη γεωμετρία αυτό σημαίνει ότι μια καμπύλη τετραγωνική επιφάνεια μπορεί να έχει μέχρι 2 κοινά σημεία με μια ευθεία. Εάν η τετραγωνική επιφάνεια έχει περισσότερα από 2 κοινά σημεία με μια ευθεία, τότε η ευθεία ανήκει ολόκληρη στην επιφάνεια, αποτελεί δηλαδή **γενέτειρα** της επιφάνειας και η επιφάνεια ονομάζεται **ευθειογενής**. Η συνθήκη αυτή δημιουργεί δύο μεγάλες οικογένειες τετραγωνικών επιφανειών: Α) τις *ευθειογενείς τετραγωνικές επιφάνειες* (εικ. 6) και Β) τις *μη ευθειογενείς* ή *ωοειδής τετραγωνικές επιφάνειες* (εικ. 7). Μια τρίτη οικογένεια που θα δούμε και που συνδυάζει τις δύο προηγούμενες, είναι εκείνη των *ελικοειδών επιφανειών*. Εφαρμόζονται πάρα πολύ συχνά στην αρχιτεκτονική, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τις ελικοειδής σκάλες (εικ. 8).

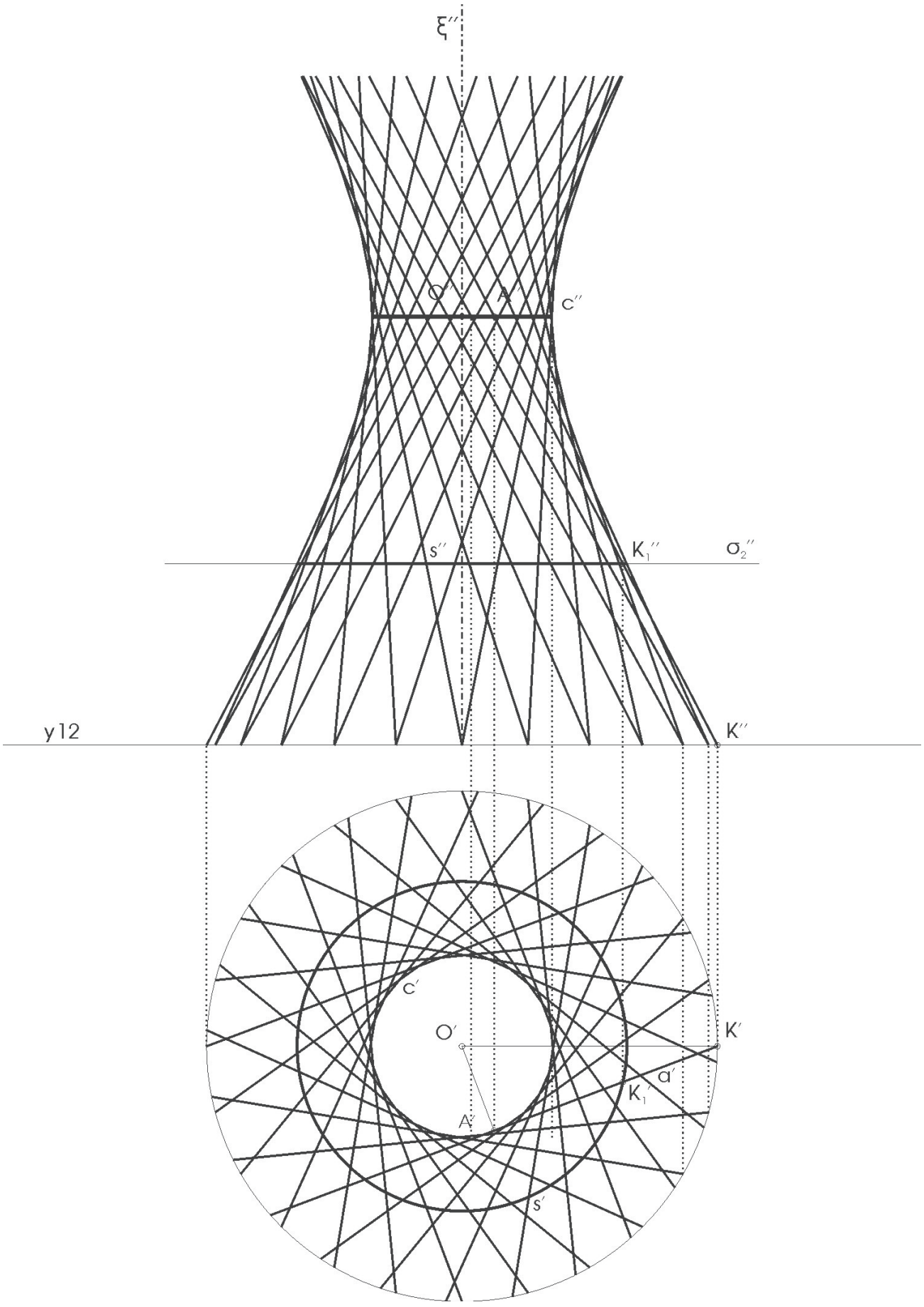
Α. Ευθειογενείς τετραγωνικές επιφάνειες

1. Μονόχωνο υπερβολοειδές

Είναι εκ περιστροφής τετραγωνική επιφάνεια (εικ. 9) και παράγεται από την περιστροφή της ευθείας α γύρω από τον άξονα ξ (σχ. 10). Η ευθεία α και ο άξονας ξ είναι ευθείες *ασύμβατες*. Κάθε ευθεία α του μονόχωνου υπερβολοειδούς είναι γενέτειρα της επιφάνειας. Αν ΟΑ(Ο′Α′,Ο″Α″) είναι η απόσταση του άξονα ξ από την ευθεία α, το σημείο Α -καθώς περιστρέφεται γύρω από τον άξονα ξ- διαγράφει κύκλο c(c′,c″), που ονομάζεται **λαιμός** του μονόχωνου υπερβολοειδούς. Κάθε γενέτειρα της επιφάνειας εφάπτεται στο λαιμό της. Κάθε επίπεδο κάθετο στον άξονα ξ τέμνει το μονόχωνο υπερβολοειδές κατά κύκλους. Κάθε επίπεδο που περιέχει τον άξονα ξ είναι επίπεδο συμμετρίας της επιφάνειας, ονομάζεται **μεσημβρινό επίπεδο** και τέμνει την επιφάνεια



σχ. 10



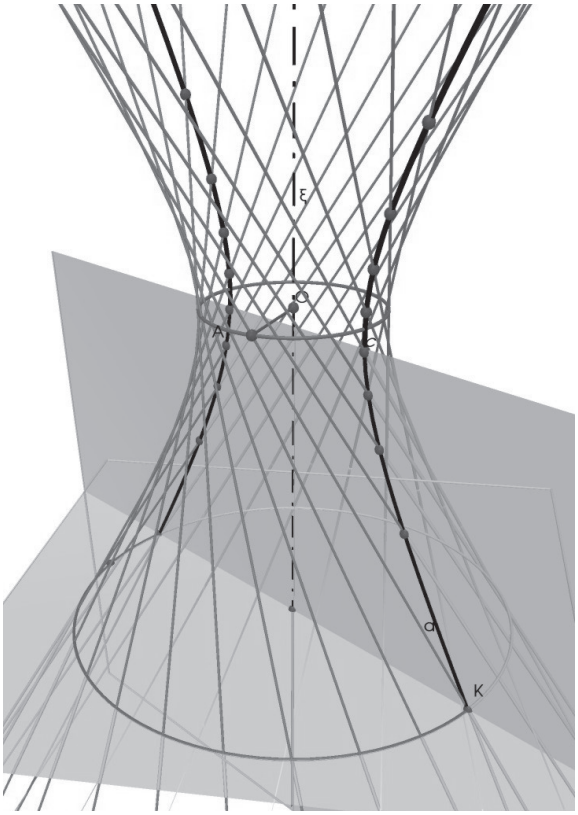
σχ. 11

κατά υπερβολή (σχ. 11). Το εκ περιστροφής μονόχωνο υπερβολοειδές μπορεί να οριστεί και μέσω καμπύλης υπερβολής, που περιστρέφεται γύρω από άξονα περιστροφής, ο οποίος ανήκει στο επίπεδό της (σχ. 12).

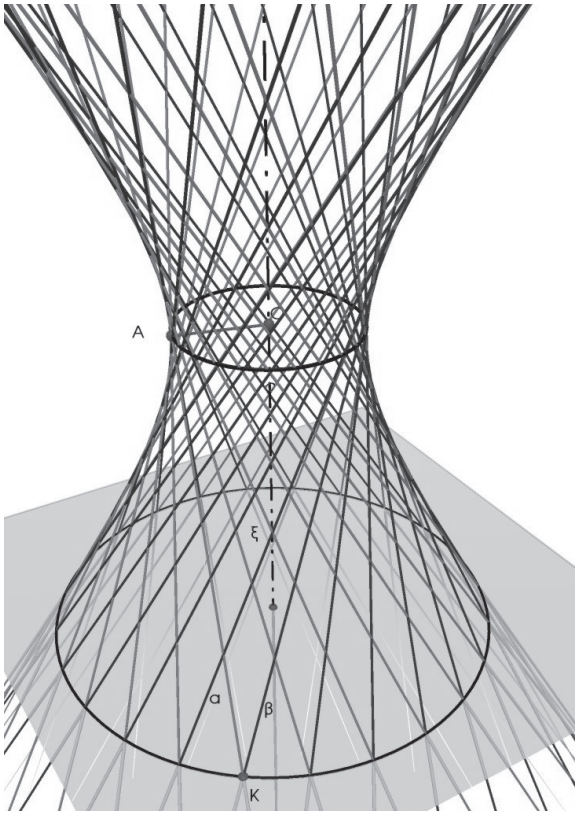
Η συμμετρική ευθεία β της γενέτειρας α ως προς μεσημβρινό επίπεδο, διαγράφει το ίδιο μονόχωνο υπερβολοειδές (σχ. 13). Επομένως κάθε εκ περιστροφής μονόχωνο υπερβολοειδές έχει δύο οικογένειες γενετειρών α και β, με της εξής ιδιότητες:

α) από κάθε σημείο της επιφάνειας του υπερβολοειδούς διέρχονται δύο γενέτειρες, μία από κάθε οικογένεια, που ορίζουν εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο συγκεκριμένο σημείο (σχ. 14,15).

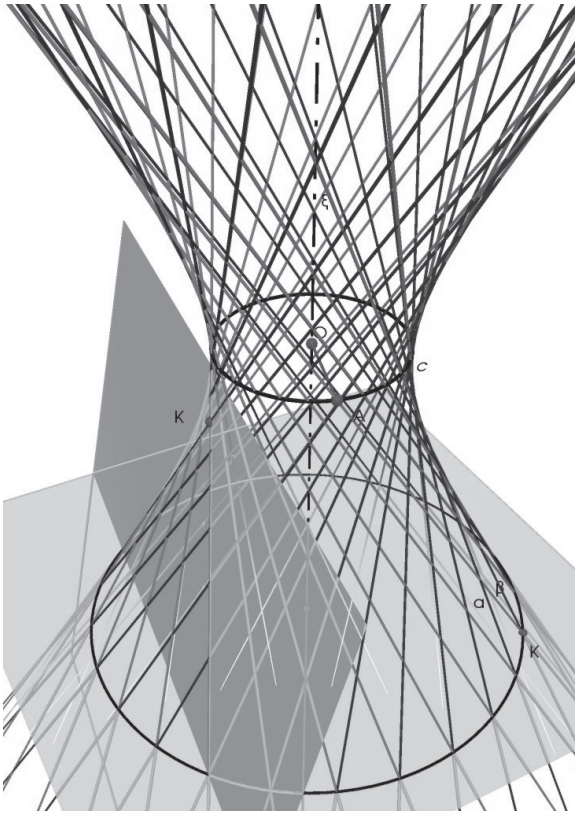
β) οι γενέτειρες της ίδιας οικογένειας είναι ευθείες ασύμβατες μεταξύ τους, ενώ δύο γενέτειρες -μία από κάθε οικογένεια- είναι ευθείες τεμνόμενες ή παράλληλες μεταξύ τους.



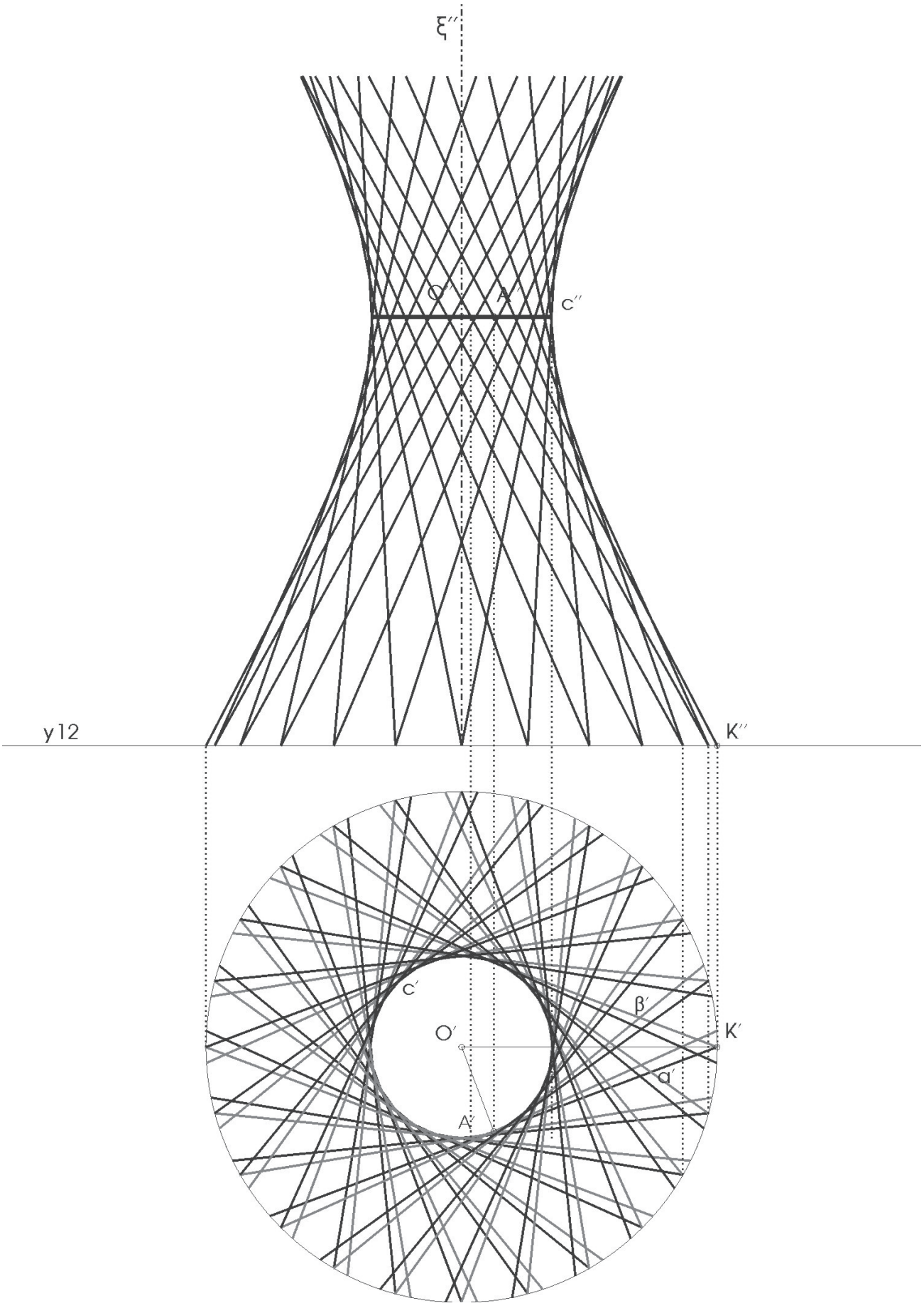
σχ. 12



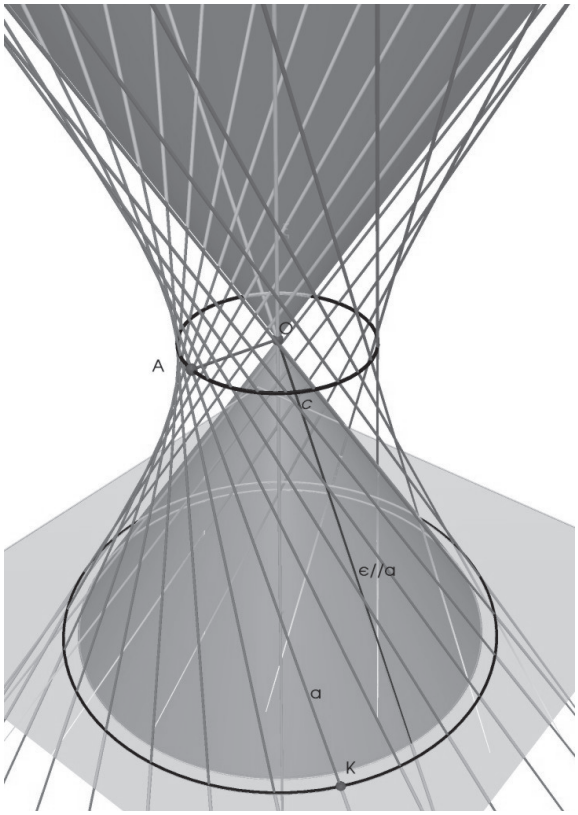
σχ. 13



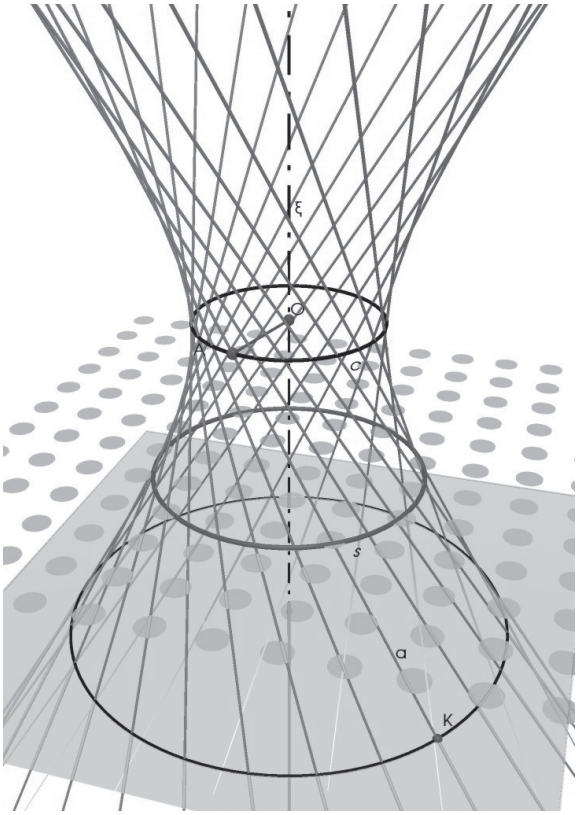
σχ. 14



σχ. 15



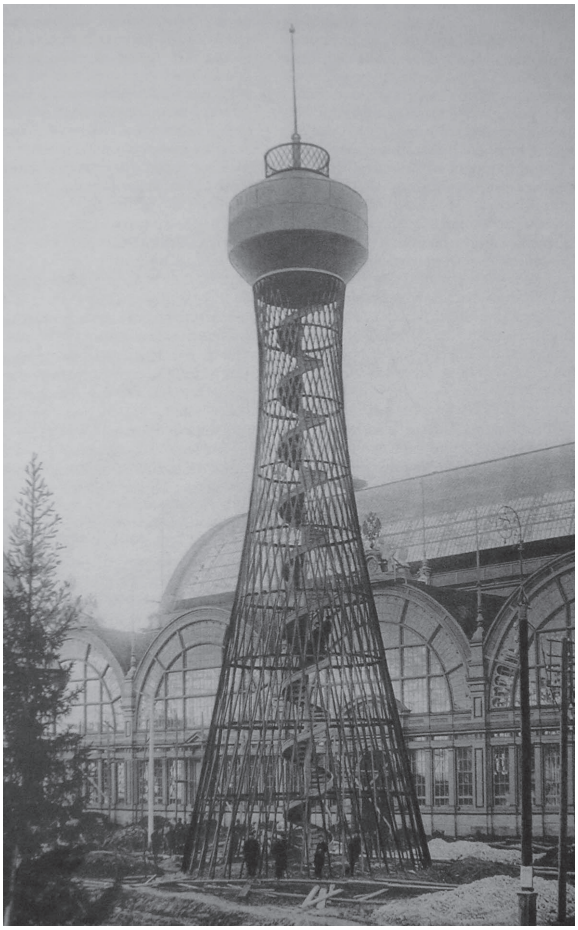
σχ. 16



σχ. 17

Η περιστροφή μιας ευθείας ε παράλληλης στη γενέτειρα α, που διέρχεται από το κέντρο Ο του λαιμού, δημιουργεί τον **ασυμπτωτικό κώνο** του μονόχωνου υπερβολοειδούς (σχ. 16).

Η τομή του μονόχωνου υπερβολοειδούς με επίπεδα σε διαφορετικές θέσεις μπορεί να δημιουργήσει καμπύλες κύκλου, έλλειψης, παραβολής ή υπερβολής, όπως τις προσδιορίζει ο ασυμπτωτικός κώνος της επιφάνειας (σχ. 17). Η καμπύλη επιφάνεια του μονόχωνου υπερβολοειδούς δεν είναι αναπτυκτή. Αν κατασκευάσουμε τις δύο οικογένειες γενετειρών ενός μονόχωνου υπερβολοειδούς από άκαμπτες ράβδους συνδεόμενες στα σημεία τομής τους με αρθρώσεις (συνδέσεις που επιτρέπουν στροφή αλλά όχι μετατόπιση), η επιφάνεια που προκύπτει δεν είναι σταθερή, αλλά πεπερασμένα κινητή. Δηλαδή η επιφάνεια μεταβάλλεται, καθώς οι ράβδοι αλλάζουν κλίση ως προς το επίπεδο του λαιμού, αλλά παραμένει πάντα μονόχωνο υπερβολοειδές. Το μονόχωνο υπερβολοειδές έχει χρησιμοποιηθεί πολύ συχνά στη σύγχρονη αρχιτεκτονική, δημιουργώντας ενδιαφέρουσες φόρμες (εικ. 18-23).



εικ. 18 Ο πρώτος υπερβολοειδής πύργος, Vladimir Shukhov, 1896

εικ. 19 Μονόχωνος υπερβολοειδής φάρος στο Cobe, Ιαπωνία

εικ. 20 *Centre Point Tower*, Sydney, Αυστραλία

εικ. 21 Oscar Niemeyer, *Le Volcan, Maison de la Culture du Havre*, Χάβρη, Γαλλία, 1978. Το μονόχωνο υπερβολοειδές έχει πλάγιο άξονα και δεν θεωρείται εκ περιστροφής στερεό. Οι καμπύλες υπερβολής που το δημιουργούν είναι ασύμετρες.

εικ. 22 Oscar Niemeyer, *Καθεδρικός ναός*, Brazilia, Βραζιλία, 1956.

εικ. 23 Γέφυρα μεταξύ κτιρίων στο Manchester, Αγγλία

2. Υπερβολικό παραβολοειδές

Η επιφάνεια αυτή είναι τετραγωνική ευθειογενής, αλλά όχι εκ περιστροφής και παρουσιάζει αρχιτεκτονικό ενδιαφέρον, όχι μόνο εξ αιτίας των καμπύλων μορφών που μπορεί να δώσει, αλλά και για την καλή στατική της συμπεριφορά (εικ. 24). Μετά τη σφαίρα και τον κύλινδρο, είναι η πλέον εφαρμοσμένη επιφάνεια στην αρχιτεκτονική.

Το υπερβολικό παραβολοειδές είναι επιφάνεια απεριόριστη, μη αναπτυκτή και παράγεται όταν μια ευθεία $α_1$ κινείται έτσι, ώστε να παραμένει παράλληλη προς ένα επίπεδο π και να συνιστά δύο σταθερές ασύμβατες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ (σχ. 25). Η ευθεία $α_1$ και όλες οι παράλληλες προς την $α_1$ ευθείες αποτελούν την πρώτη ομάδα γενετειρών του υπερβολικού παραβολοειδούς και το επίπεδο π και όλα τα παράλληλα προς το π επίπεδα ονομάζονται **πρωτεύοντα διευθύνοντα επίπεδα** της επιφάνειας. Όταν η ευθεία $ε_1$ κινείται παράλληλα επί δύο γενετειρών $α_1$ και $α_2$ της

εικ. 24 Le Corbusier - Γ. Ξενάκης, *Phillips pavillion*, Διεθνής Έκθεση, Βρυξέλλες, 1958

πρώτης οικογένειας γενετειρών, δημιουργεί τη δεύτερη οικογένεια γενετειρών του υπερβολικού παραβολοειδούς (σχ. 26). Αν από ένα σημείο Κ της a_1 φέρουμε ευθείες $δ_1$ και $δ_2$ τέτοιες, ώστε $δ_1 // ε_1$ και $δ_2 // ε_2$, τότε το επίπεδο τ που παράγουν οι $δ_1$ και $δ_2$ είναι το **δευτερεύον διευθύνον επίπεδο** του υπερβολικού παραβολοειδούς (σχ. 27). Όπως ισχύει για το επίπεδο π, όλα τα παράλληλα στο τ επίπεδα είναι δευτερεύοντα διευθύνοντα επίπεδα της επιφάνειας. Όταν η γωνία των επιπέδων π και τ είναι ορθή το υπερβολικό παραβολοειδές ονομάζεται **ισοσκελές**.

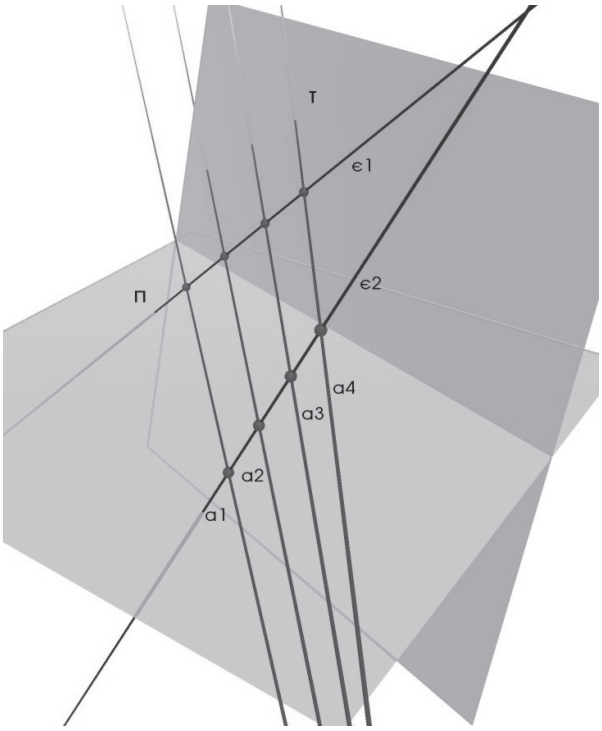
Πιο απλά, αν δημιουργήσουμε ένα τετράπλευρο, του οποίου οι απέναντι πλευρές είναι ανά δύο ευθείες ασύμβατες, δηλαδή ένα στρεβλό τετράπλευρο, διαιρέσουμε κάθε πλευρά σε ν ίσα μέρη και ενώσουμε ανά δύο τα σημεία των απέναντι ασύμβατων ευθειών, δημιουργούμε τις δύο οικογένειες γενετειρών υπερβολικού παραβολοειδούς (σχ. 28).

Οι γενέτειρες του υπερβολικού παραβολοειδούς και οι οικογένειες που δημιουργούν, έχουν τις εξής ιδιότητες:

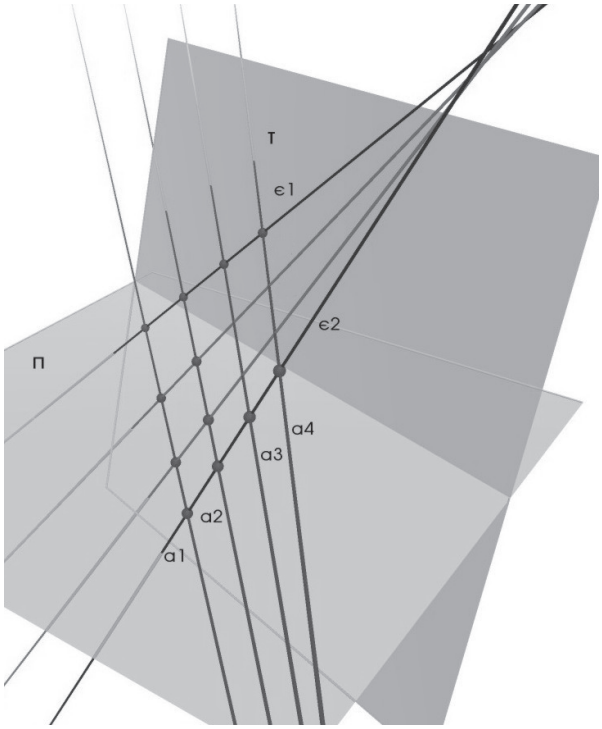
α) δύο γενέτειρες της ίδιας οικογένειας είναι ευθείες ασύμβατες,

β) δύο γενέτειρες -μία από κάθε οικογένεια της επιφάνειας- είναι ευθείες τεμνόμενες και αντίστροφα,

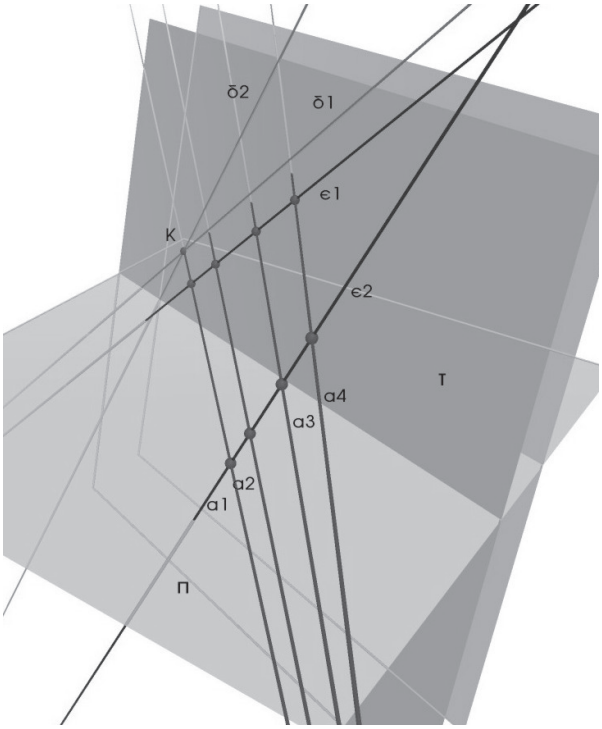
γ) από ένα σημείο Μ υπερβολικού παραβολοειδούς διέρχεται μόνο μία γενέτειρα από κάθε οικογένεια και οι γενέτειρες αυτές



σχ. 25

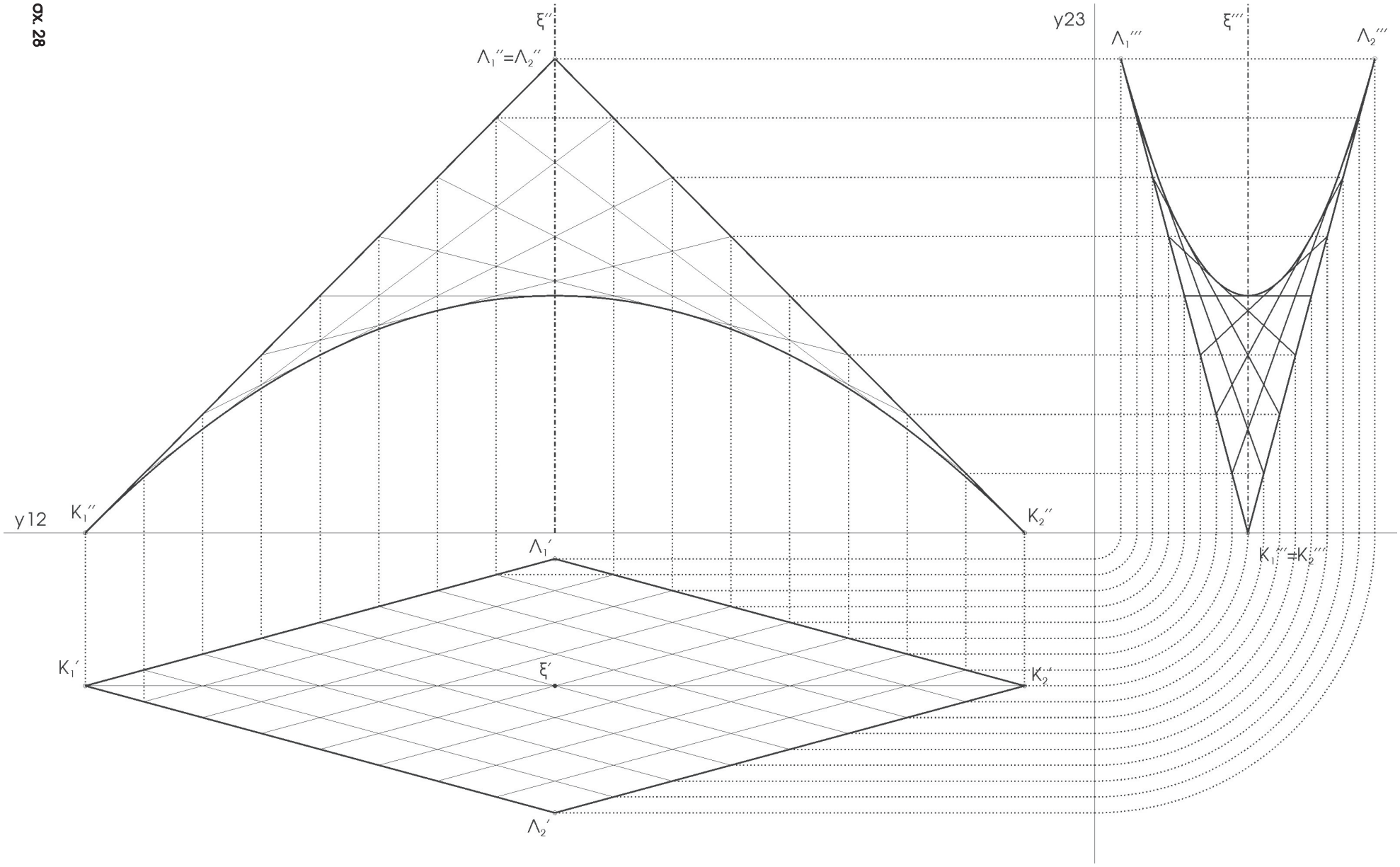


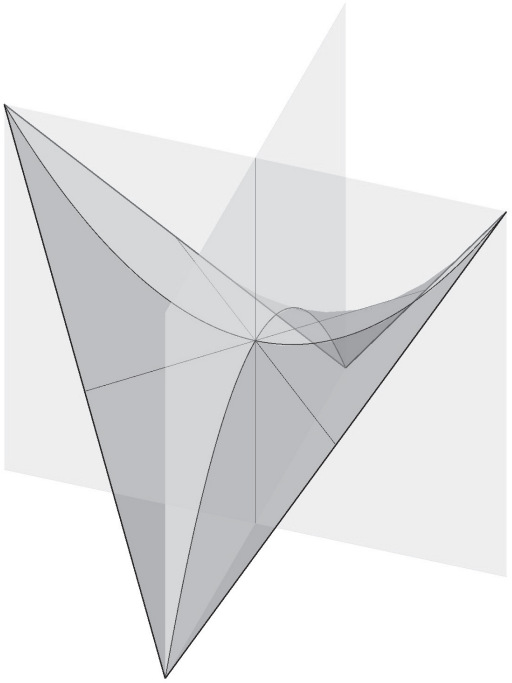
σχ. 26



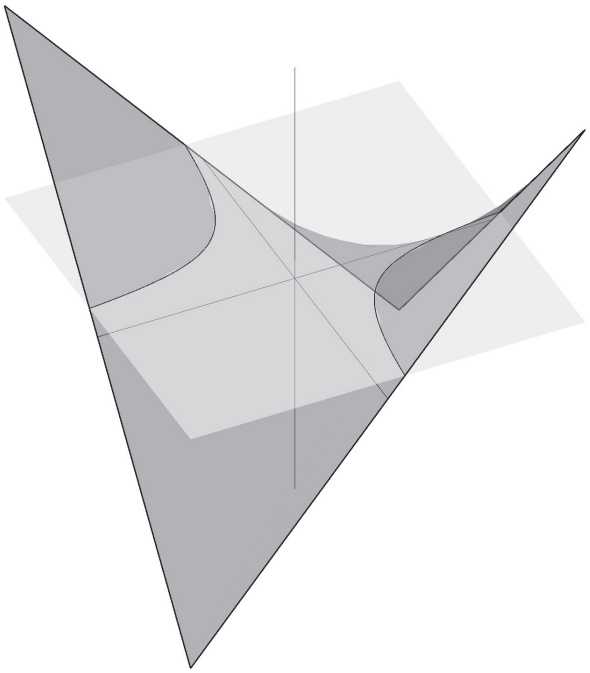
σχ. 27

σχ. 28





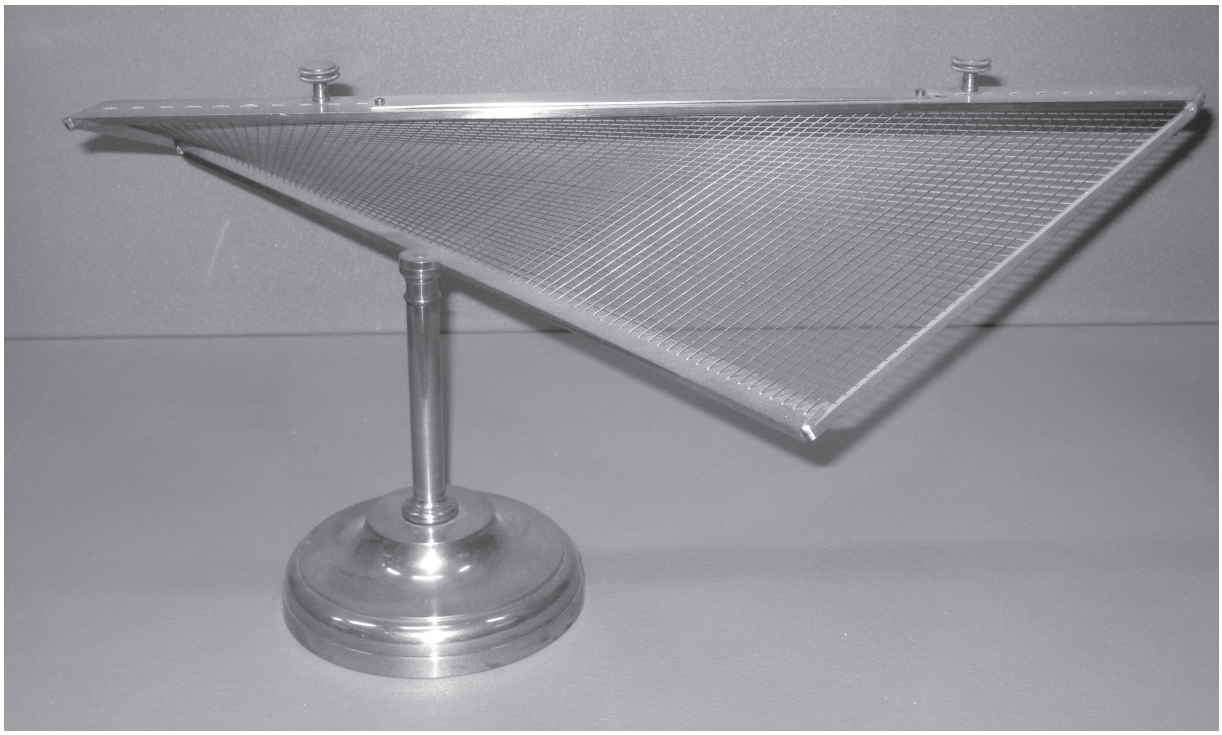
σχ. 29



σχ. 30

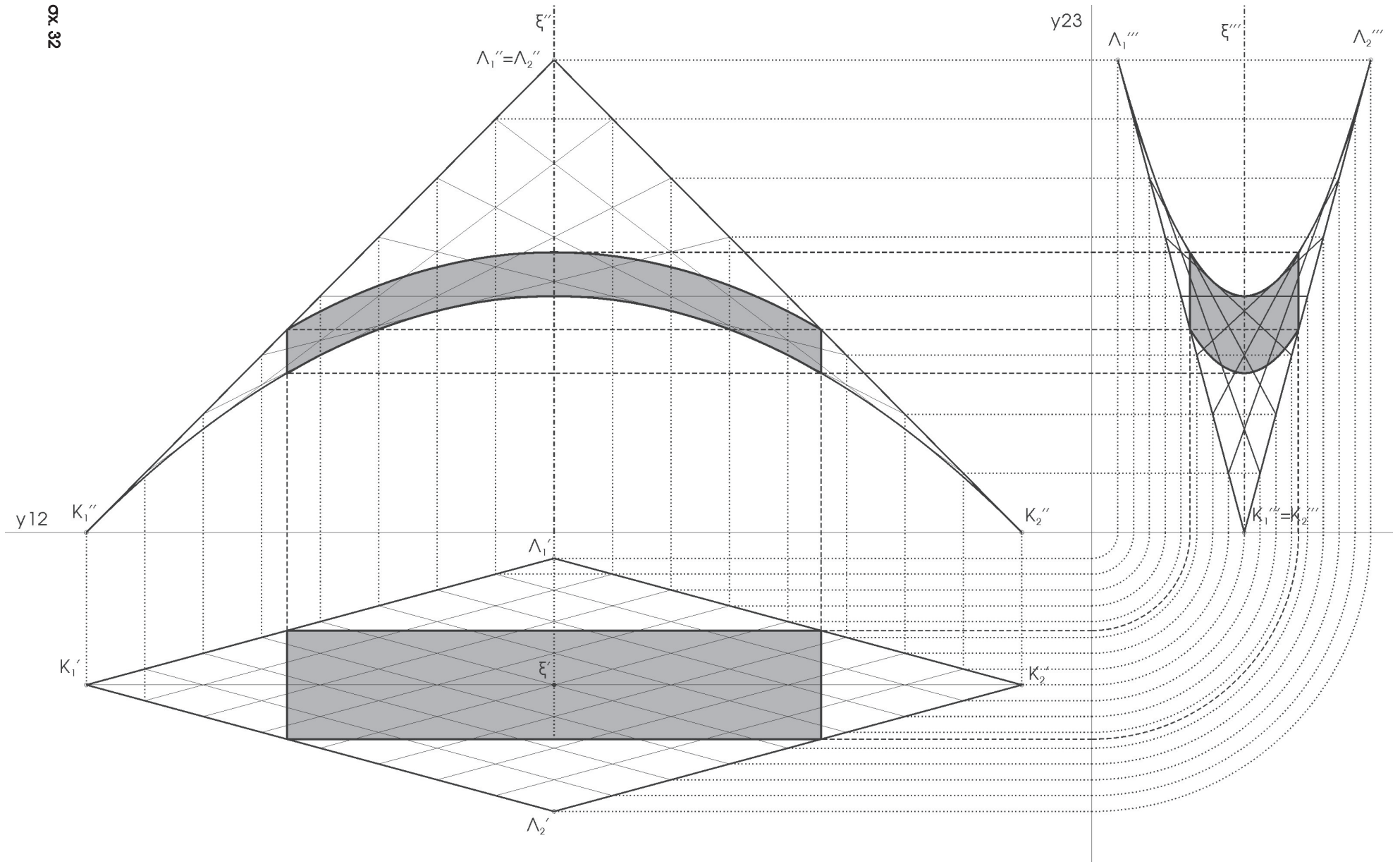
-εφόσον είναι τεμνόμενες στο σημείο Μ- δημιουργούν επίπεδο, που είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια στο σημείο Μ.

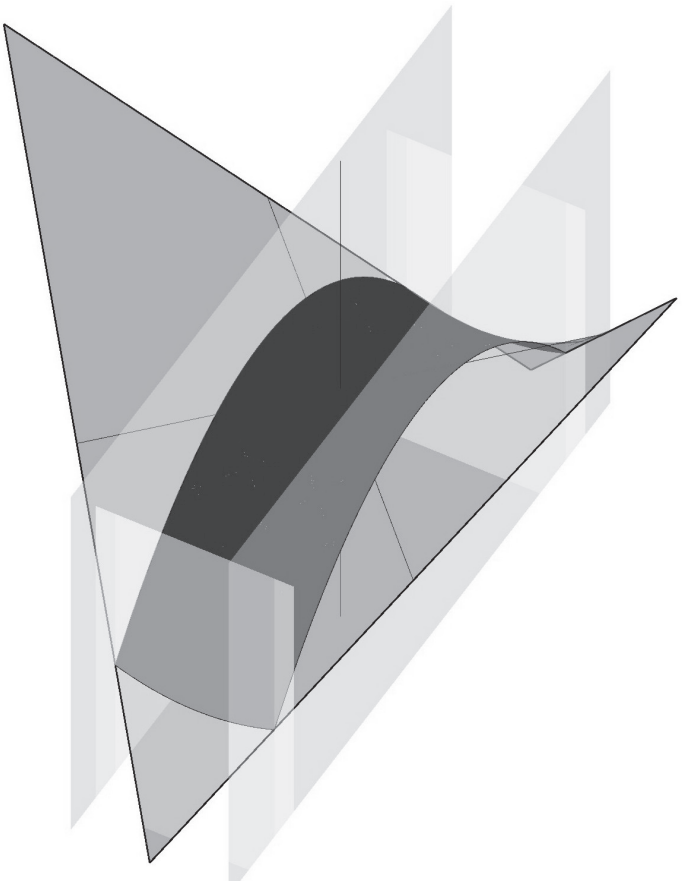
Το υπερβολικό παραβολοειδές έχει δύο επίπεδα συμμετρίας, κάθετα μεταξύ τους (σχ. 29). Η τομή των επιπέδων συμμετρίας δημιουργεί τον άξονα συμμετρίας της επιφάνειας και τέμνει την επιφάνεια σε ένα σημείο της, που ονομάζεται **κορυφή** του υπερβολικού παραβολοειδούς. Διευθύνοντα είναι όλα τα επίπεδα που είναι παράλληλα σε κάθε οικογένεια γενετειρών και στον άξονα της επιφάνειας.



εικ. 31 Όργανο μελέτης υπερβολικού παραβολοειδούς, 1832, Μουσείο μέτρων & σταθμών, Παρίσι, Γαλλία

σχ. 32





σχ. 33

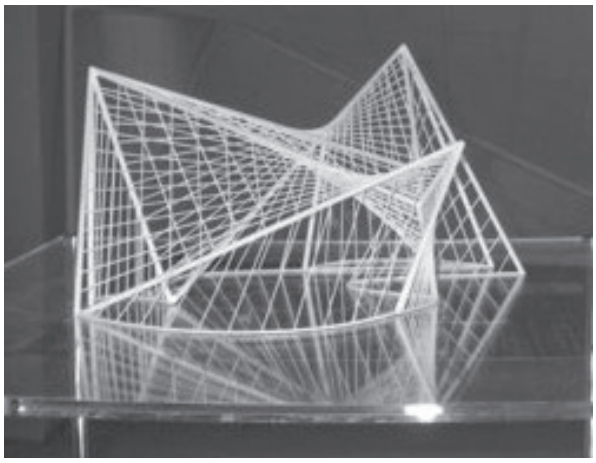
εικ. 34

Τα επίπεδα συμμετρίας τέμνουν την επιφάνεια κατά δύο παραβολές, με κοινό σημείο την κορυφή της επιφάνειας. Κάθε επίπεδο κάθετο στα επίπεδα συμμετρίας τέμνει την επιφάνεια κατά υπερβολή (σχ. 30). Όταν ένα επίπεδο είναι κάθετο στα επίπεδα συμμετρίας και διέρχεται από την κορυφή του υπερβολικού παραβολοειδούς, δημιουργεί τις ασύμπτωτες ευθείες των υπερβολών που δημιουργούν τα παράλληλα προς αυτό επίπεδα.

Το υπερβολικό παραβολοειδές δίνει πολύ ενδιαφέρουσες φόρμες, ανάλογα με τις γωνίες που σχηματίζουν τα διευθύνοντα επίπεδα και ανάλογα με τις γωνίες των ασύμβατων γενετειρών του (με σταθερό βήμα). Το γεγονός δε ότι είναι επιφάνεια απεριόριστη, έχει οδηγήσει αρκετούς μελετητές αρχιτέκτονες στη σύνθεση τμημάτων (αποσπασμάτων παραγόμενων από τομές της επιφάνειας με επίπεδα) υπερβολικών παραβολοειδών με πολύ δυναμικό και ξεχωριστό αποτέλεσμα (σχ. 32,33, εικ. 34-38).

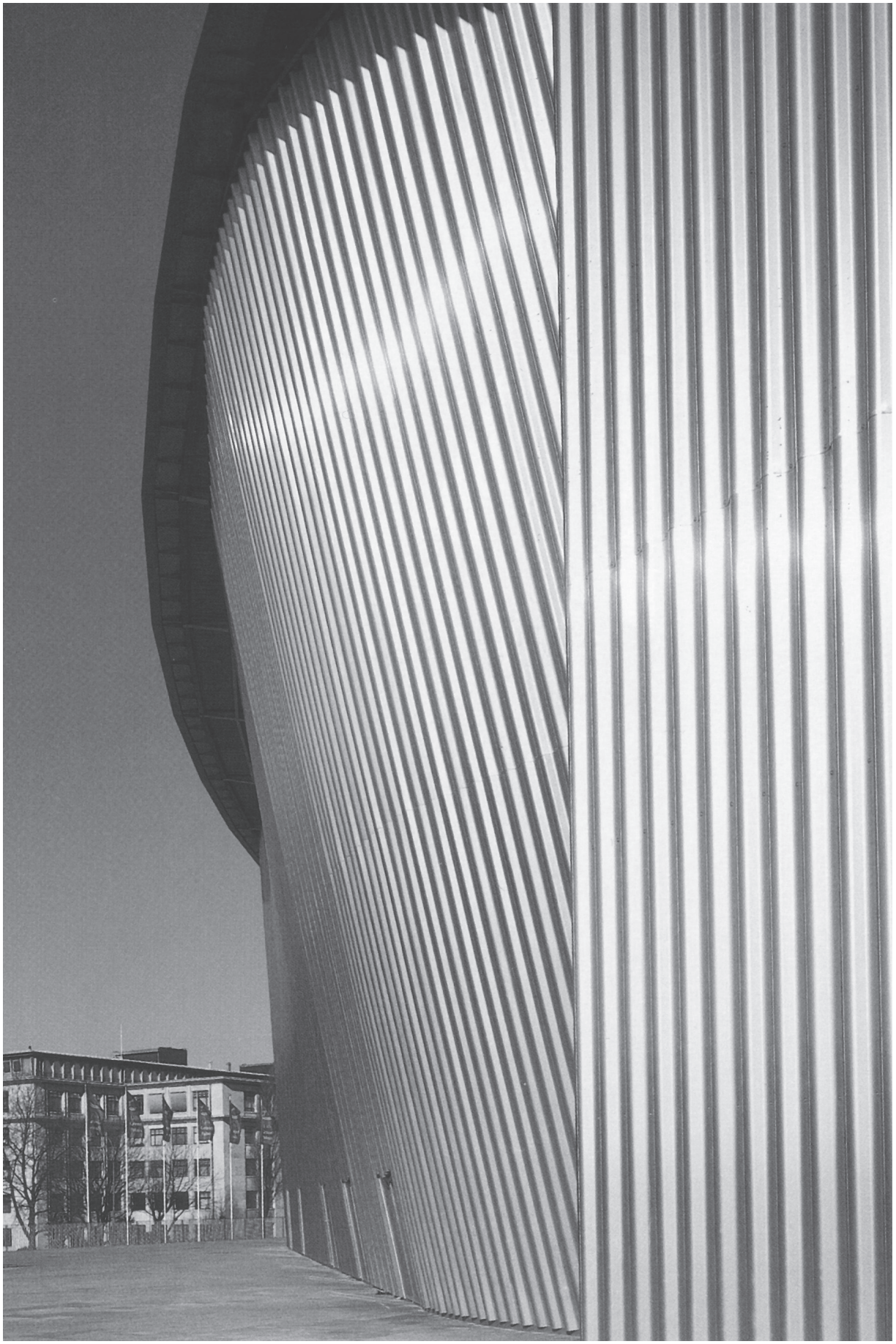
εικ. 35 Κτίριο πρεσβείας Μεξικού, Βερολίνο

εικ. 36 Κτίριο πρεσβείας Μεξικού, Βερολίνο



εικ. 37 Le Corbusier - Γ. Ξενάκης, *Phillips pavilion,* Διεθνής Έκθεση, Βρυξέλλες, 1958. Μακέτα διάταξης υπερβολικών παραβολοειδών επιφανειών

εικ. 38 Le Corbusier - Γ. Ξενάκης, *Phillips pavilion,* Διεθνής Έκθεση, Βρυξέλλες, 1958



εικ. 39 Rem Koolhaas, *Grand Palais*, Lille, Γαλλία, 1990

3. Κωνοειδείς και κυλινδροειδείς επιφάνειες

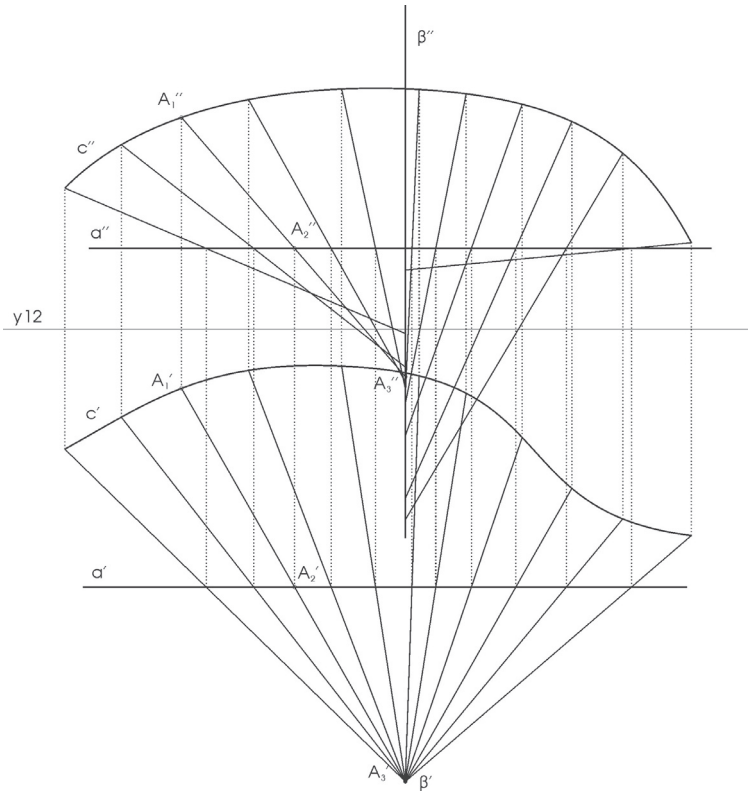
Μια επιφάνεια είναι κωνοειδής ευθειογενής, αν όλες οι γενέτειρες της τέμνονται με δυο ασύμβατες ευθείες και μια καμπύλη του χώρου. Οι δύο ευθείες και η καμπύλη ονομάζονται **οδηγοί** της κωνοειδούς επιφάνειας (σχ. 40).

Μια επιφάνεια είναι κυλινδροειδής, αν όλες οι γενέτειρές της τέμνονται με μια ευθεία και μια καμπύλη του χώρου και είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο (που είναι διευθύνον επίπεδο) μη παράλληλο στους οδηγούς.

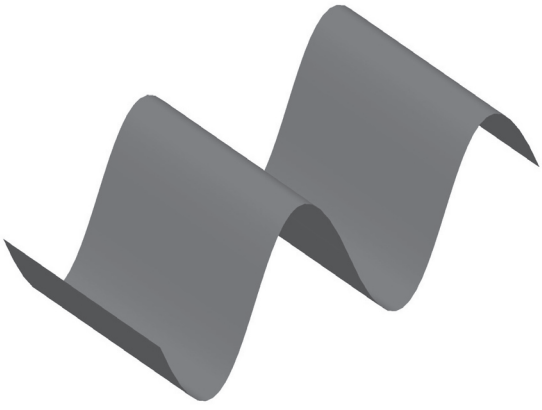
Επειδή οι γενέτειρες καμπύλες των κωνοειδών και κυλινδροειδών επιφανειών μπορούν να είναι ελεύθερες καμπύλες του χώρου, οι επιφάνειες αυτές δεν έχουν καθορισμένη αλγεβρική εξίσωση. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι κωνοειδείς και κυλινδροειδείς επιφάνειες δεν είναι πάντοτε τετραγωνικές, αλλά –ανάλογα με την οδηγό καμπύλη- μπορούν να είναι και μεγαλύτερου βαθμού.

Από αρχιτεκτονική άποψη οι επιφάνειες παρουσιάζουν μεγάλη μορφολογική πλαστικότητα, αλλά και κατασκευαστική ευκολία, ακριβώς επειδή είναι *ευθειογενείς επιφάνειες*.

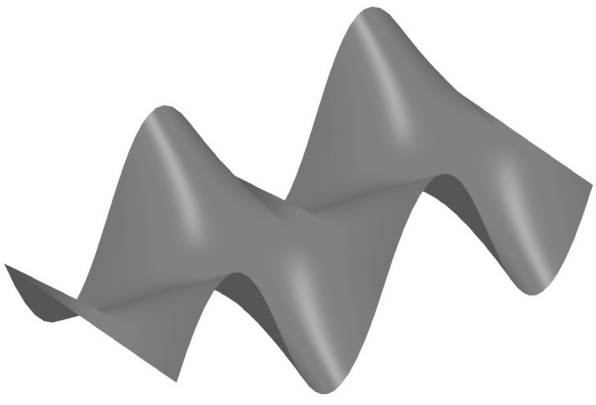
Στο παράδειγμα του σχήματος 41 έχουν χρησιμοποιηθεί δύο ημιτονοειδείς καμπύλες έτσι, ώστε οι δεύτερες προβολές τους να ταυτίζονται, ενώ στο σχήμα 42 η επιφάνεια που δημιουργείται είναι ημιτονοειδής και ευθειογενής, αλλά η μία γενέτειρα είναι μετατοπισμένη σε σχέση με την άλλη.



σχ. 40



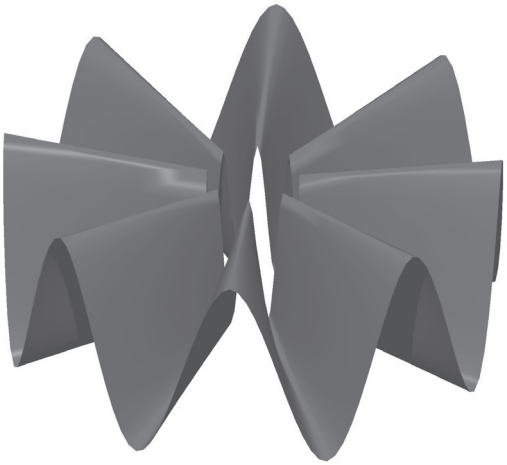
σχ. 41



σχ. 42

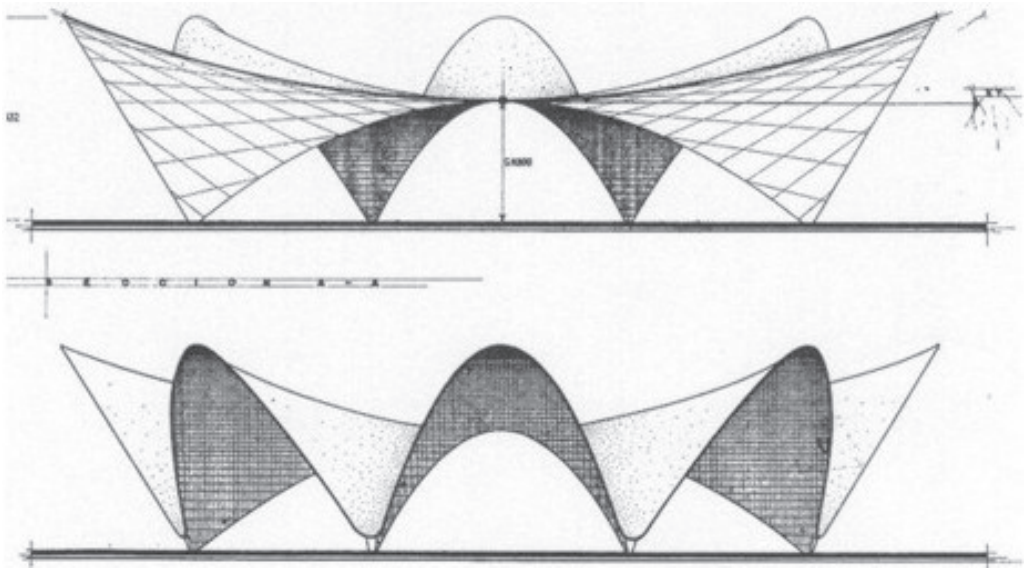
εικ. 43 Antoni Gaudí, *Sagrada Família school*, Βαρκελώνη, Ισπανία, 1908

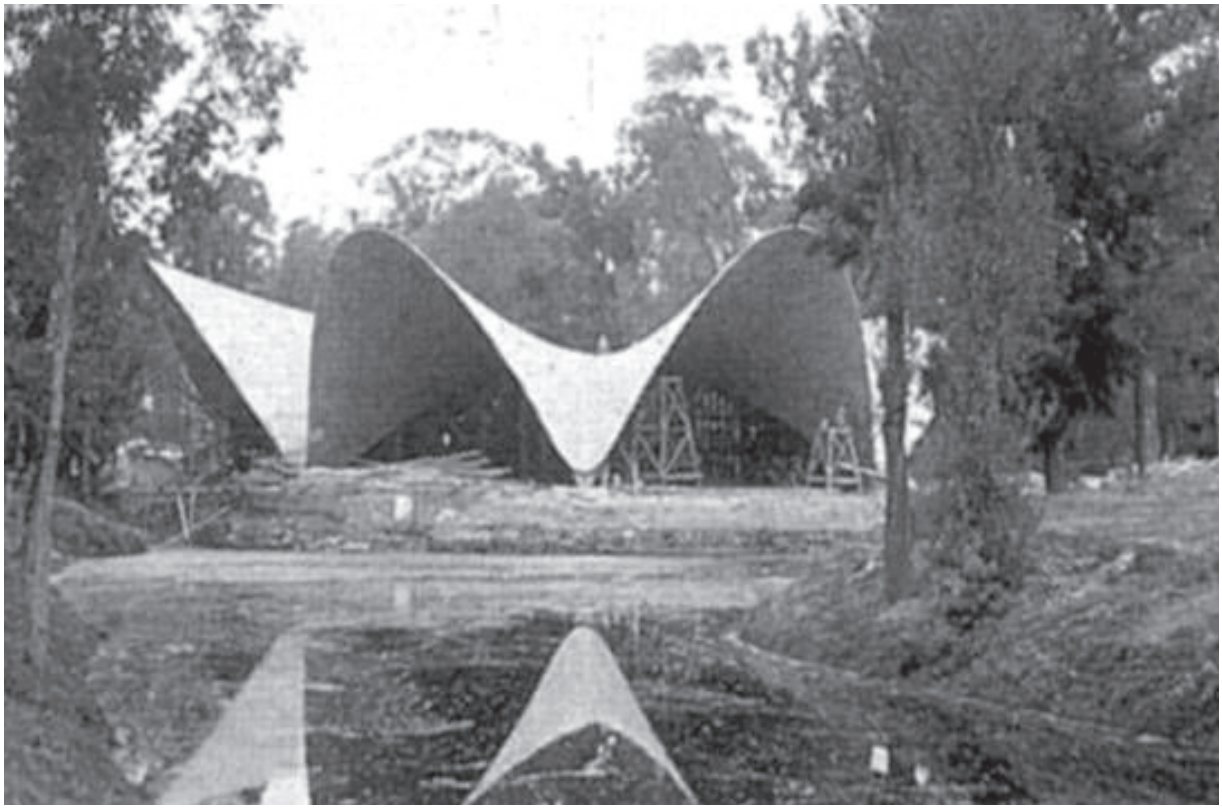
εικ. 44 Frank Gehry, *Walt Disney Concert Hall*, Los Angeles, ΗΠΑ, 1991



σχ. 45

εικ. 46 F. Candela, *Εστιατόριο Los Manantiales*, Μεξικό, 1958, σχέδια όψης και τομής

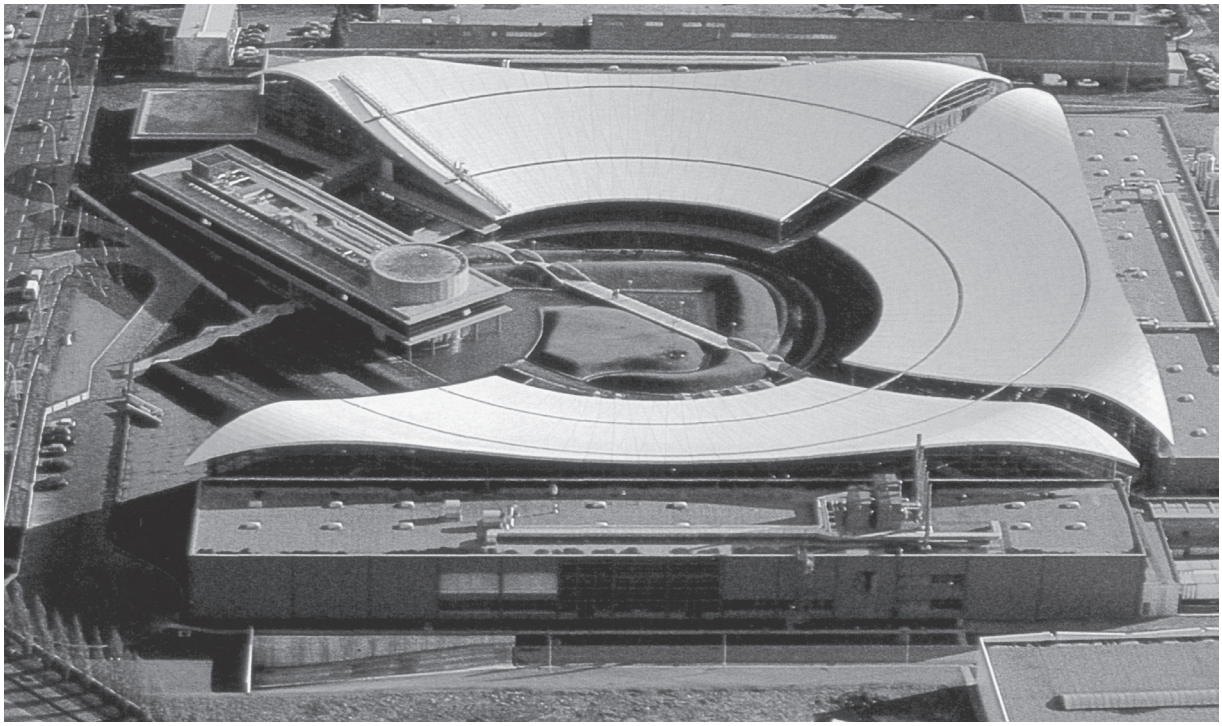




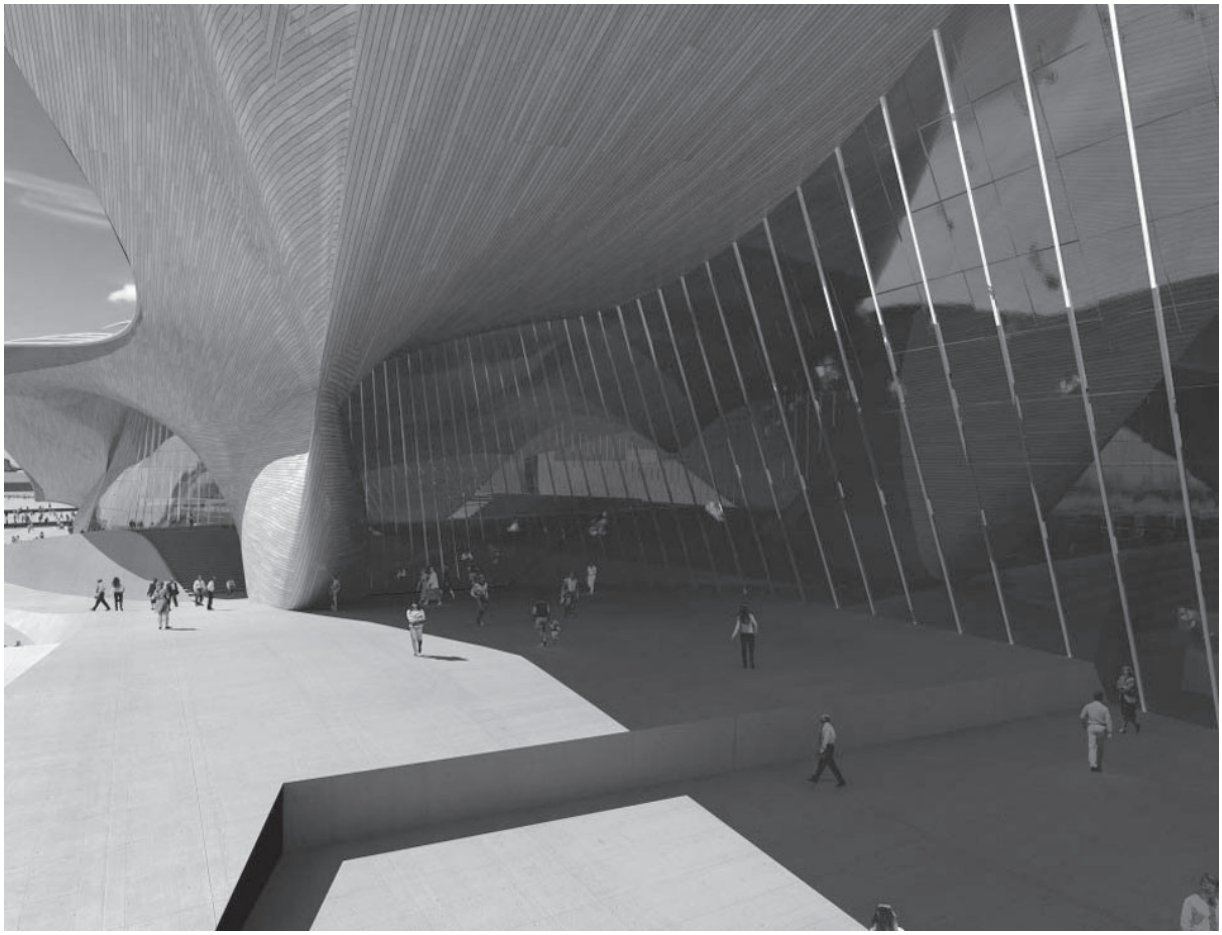
εικ. 47 Felix Candela, *Εστιατόριο Los Manantiales*, Μεξικό, 1958

εικ. 48 Frank Gehry, *Hotel Marqués de Riscal,* Elciego, Ισπανία, 2006

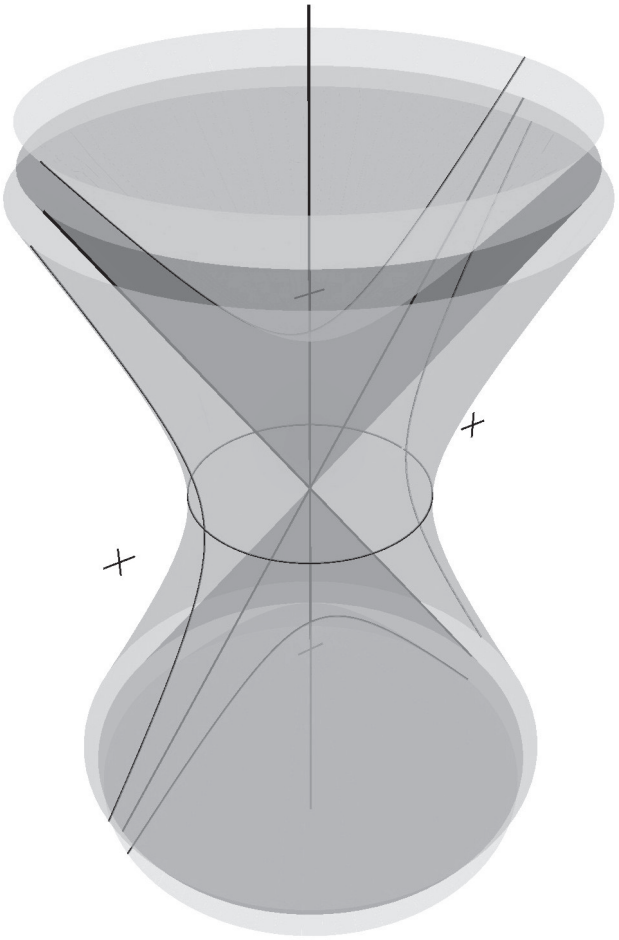
εικ. 49 Ολυμπιακό στάδιο Μονάχου, Γερμανία



εικ. 50 Valode & Pistre, *Εργοστάσιο L΄Oréal*, Aulnay-sous-Bois, Γαλλία, 1988



εικ. 51 Zaha Hadid, *Aquatics centre*, Λονδίνο, Αγγλία



σχ. 52 Μονόχωνο υπερβολοειδές, το συζυγές του δίχωνο υπερβολοειδές και ο ασυμπτωτικός τους κώνος. Σημειώνονται οι εστίες των υπερβολών

Β. Ωοειδείς τετραγωνικές επιφάνειες

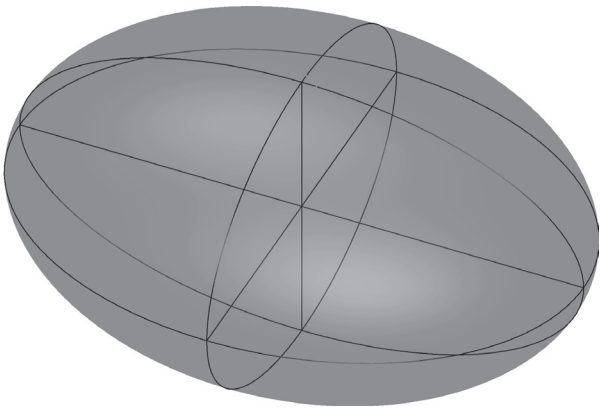
1. Δίχωνο υπερβολοειδές

Η επιφάνεια αυτή έχει αρκετά πολύπλοκη κατασκευή και δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε αρχιτεκτονικά έργα. Ο λόγος που αναφέρεται είναι ότι σχετίζεται με το μονόχωνο υπερβολοειδές με συζυγία. Αναλυτικότερα, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η τομή μονόχωνου υπερβολοειδούς και του ασυμπτωτικού του κώνου με επίπεδο που περιέχει τον άξονα περιστροφής της επιφάνειας, δημιουργεί καμπύλη υπερβολής και τις ασύμπτωτες ευθείες της, κατ΄ αντιστοιχία (σχ. 52). Η συζυγής υπερβολή, δηλαδή η υπερβολή που έχει τις ίδιες ασύμπτωτες ευθείες, αλλά διεύθυνση καμπύλης κάθετη στην πρώτη, εάν περιστραφεί γύρω από τον ίδιο άξονα ξ, παράγει *το συζυγές δίχωνο υπερβολοειδές του μονόχωνου υπερβολοειδούς, με κοινό ασυμπτωτικό κώνο*.

εικ. 53 Kisho Kurokawa, *Μουσείο Δεινοσαύρων «Το αυγό του δεινόσαυρου»*, Fukui, Ιαπωνία, 1998

2. Ελλειψοειδές

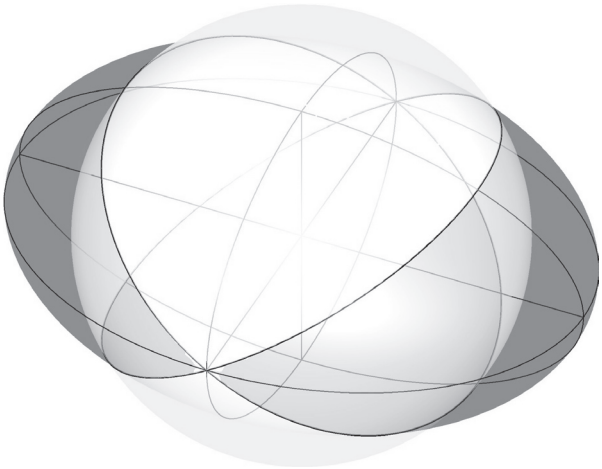
Το ελλειψοειδές είναι κλειστή και πεπερασμένη επιφάνεια με τρία τρισορθογώνια επίπεδα συμμετρίας. Οι τομές των επιπέδων συμμετρίας ανά δύο δημιουργούν τους κύριους άξονες του ελλειψοειδούς και διέρχονται από το *κέντρο συμμετρίας* της επιφάνειας, που είναι εσωτερικό σημείο της (σχ. 54).



σχ. 54

Κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του ελλειψοειδούς, αποτελεί **διάμετρο** του ελλειψοειδούς. Αντίστοιχα κάθε επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο του ελλειψοειδούς, αποτελεί **διαμετρικό επίπεδο** του ελλειψοειδούς. Κάθε επίπεδο παράλληλο σε διαμετρικό επίπεδο τέμνει το ελλειψοειδές κατά όμοιες κωνικές τομές, τα κέντρα των οποίων βρίσκονται σε διάμετρο που ονομάζεται **πολική διάμετρος** ή **άξονας του διαμετρικού επιπέδου**.

Η τομή ελλειψοειδούς με επίπεδο είναι έλλειψη ή κύκλος. Για να είναι κύκλος η τομή ελλειψοειδούς με επίπεδο, θα πρέπει το επίπεδο τομής να ορίζεται από την αλληλοτομία του ελλειψοειδούς με ομόκεντρη σφαίρα, με ακτίνα ίση με τον μεσαίο σε μήκος ημιάξονα του ελλειψοειδούς (σχ. 55).



σχ. 55

Στη γενική περίπτωση, κάθε επίπεδο συμμετρίας τέμνει την επιφάνεια σε έλλειψη. Στην περίπτωση που ένα από τα επίπεδα συμμετρίας τέμνει την επιφάνεια κατά κύκλο, τότε η επιφάνεια είναι ελλειψοειδές εκ περιστροφής, με άξονα περιστροφής κάθετο στο επίπεδο του κύκλου και διερχόμενο από το κέντρο του. Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι το σχήμα της γης, με άξονα περιστροφής τον άξονα βορρά–νότου και μέγιστο κύκλο τον ισημερινό της γης.

Το ελλειψοειδές δεν είναι αναπτυκτή επιφάνεια και οποιαδήποτε μέθοδος ανάπτυξης της επιφάνειας είναι προσεγγιστική. Αυτό παίζει ρόλο στην ορθότητα των χαρτών της γης, οι οποίοι δεν είναι ποτέ απολύτως ακριβείς, αλλά η προσέγγιση είναι ορθότερη, όσο μικρότερη είναι η περιοχή που αναπαριστούν και αναπτύσσουν.

3. Ελλειπτικό παραβολοειδές

Η επιφάνεια του ελλειπτικού παραβολοειδούς είναι απεριόριστη και έχει δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα συμμετρίας. Η τομή των επιπέδων συμμετρίας δημιουργεί τον **άξονα συμμετρίας** της επιφάνειας, που τέμνει την επιφάνεια σε

σχ. 56

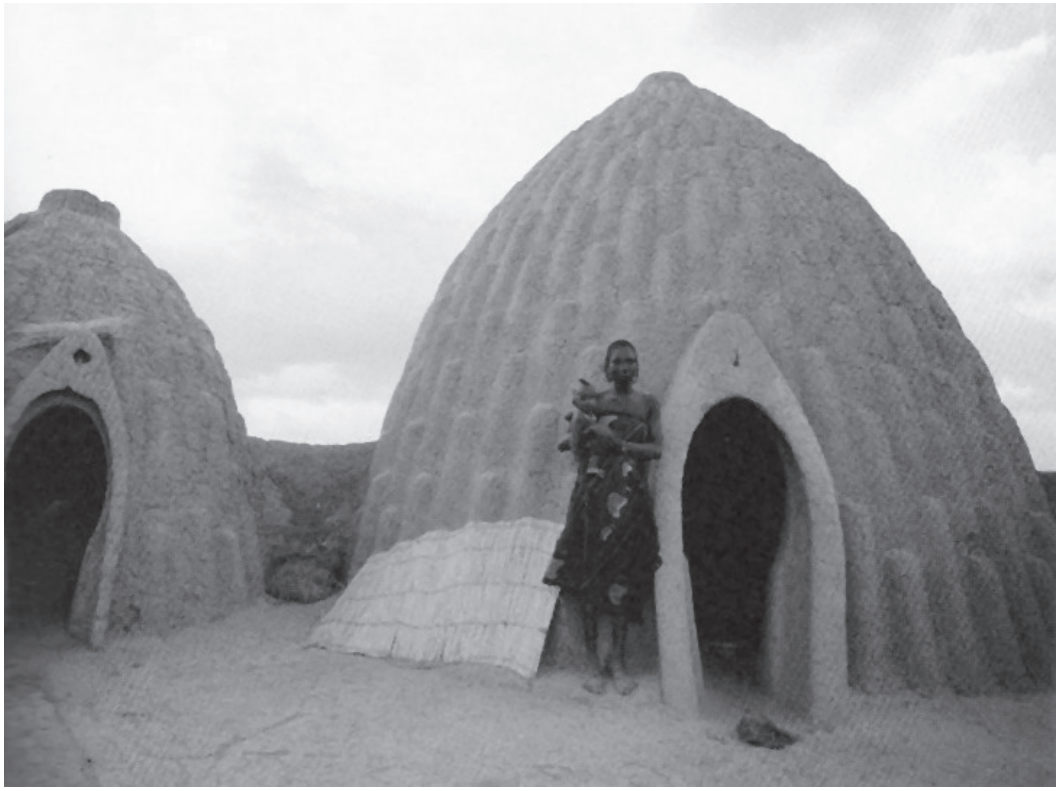
ένα σημείο, που ονομάζεται **κορυφή**. Κάθε τομή της επιφάνειας με επίπεδο κάθετο στον άξονά της, δημιουργεί καμπύλη έλλειψης και κάθε τομή της επιφάνειας με επίπεδο παράλληλο στα επίπεδα συμμετρίας, δημιουργεί καμπύλη παραβολής (σχ. 56).

εικ. 57 Norman Foster, *Reichstag dome*, Βερολίνο, Γερμανία, 1999

εικ. 58 *Zeiss Planetarium*, Bochum, Γερμανία

Αν η τομή της επιφάνειας με επίπεδο κάθετο στον άξονά της είναι καμπύλη κύκλου, τότε η επιφάνεια είναι εκ περιστροφής και ονομάζεται παραβολοειδές εκ περιστροφής (εικ. 57,59-61).

εικ. 59 Itsuko Hasegaua, *Μουσείο των φρούτων*, Yamanashi, Ιαπωνία, 1995



εικ. 60 Παραβολοειδείς καλύβες στη Νότια Αφρική

εικ. 61 Oskar Niemeyer, *Κτίριο Κογκρέσσου*, Brazilia, Βραζιλία, 1955

εικ. 62 Oskar Niemeyer, εσωτερική σκάλα, *Itamaraty palace - Υπουργείο εξωτερικών*, Brazilia, Βραζιλία, 1955

Γ. Ελικοειδείς επιφάνειες

Οι ελικοειδείς επιφάνειες γενικά χρησιμοποιούνται στην αρχιτεκτονική για τη μεταβολή ευθύγραμμης κίνησης σε περιστροφική με ταυτόχρονη μετατόπιση (ελικοειδείς σκάλες) (εικ. 62,63). Οι εφαρμογές και οι διατάξεις των ελικοειδών επιφανειών γενικότερα έχουν ευρύτατη εφαρμογή, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τους κοχλίες και τα ελατήρια.

εικ. 63

Πριν μελετήσουμε τις ελικοειδείς επιφάνειες, είναι χρήσιμο ν' αναλύσουμε την έλικα, ως οδηγό καμπύλη των ελικοειδών επιφανειών. Μια ελικοειδής καμπύλη μπορεί να βαίνει δε οποιοδήποτε στερεό σχήμα: κύλινδρο, κώνο, σφαίρα, σπείρα. Οι καμπύλες που παράγονται, ονομάζονται τότε κυλινδρικές, κωνικές, σφαιρικές ή σπειροειδής έλικες αντίστοιχα.

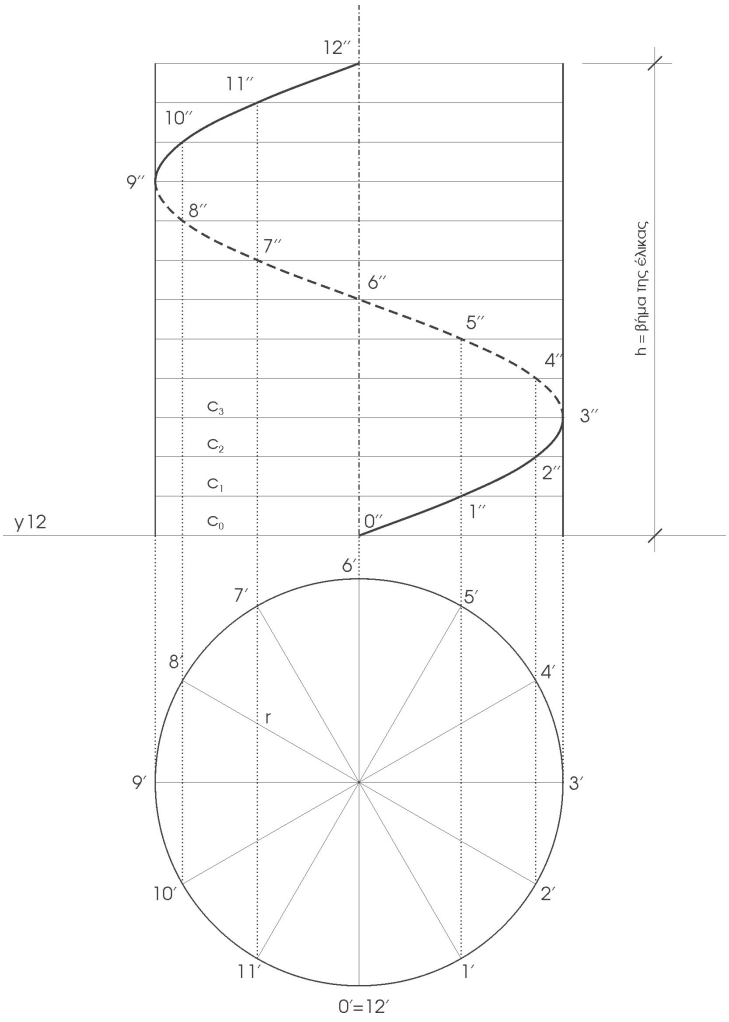
Ελικοειδείς καμπύλες

Κυλινδρική έλικα

Η κυλινδρική έλικα είναι από τις πιο συνηθισμένες στην εφαρμοσμένη γεωμετρία. Κάθε στρεβλή καμπύλη, η οποία βαίνει σε κυλινδρική επιφάνεια και οι εφαπτόμενες από κάθε σημείο της καμπύλης σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις γενέτειρες της κυλινδρικής επιφάνειας, ονομάζεται κυλινδρική έλικα.

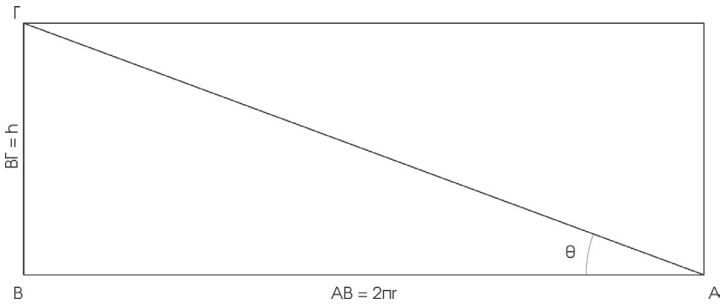
Ορίζοντας με άλλο τρόπο την έλικα, μπορούμε να πούμε ότι η έλικα είναι η σύνθετη κίνηση ενός σημείου Ρ της επιφάνειας ενός κυλίνδρου, το οποίο κινείται ομαλά γύρω από τον άξονα του κυλίνδρου και ταυτόχρονα κάνει ομαλή μεταφορική κίνηση, κατά τη διεύθυνση του άξονα του κυλίνδρου.

Αν ο κύλινδρος είναι ορθός κυκλικός και η έλικα είναι ορθή κυλινδρική, οπότε η τροχιά του σημείου Ρ ονομάζεται **ελίκωση** ή **κοχλίωση**.



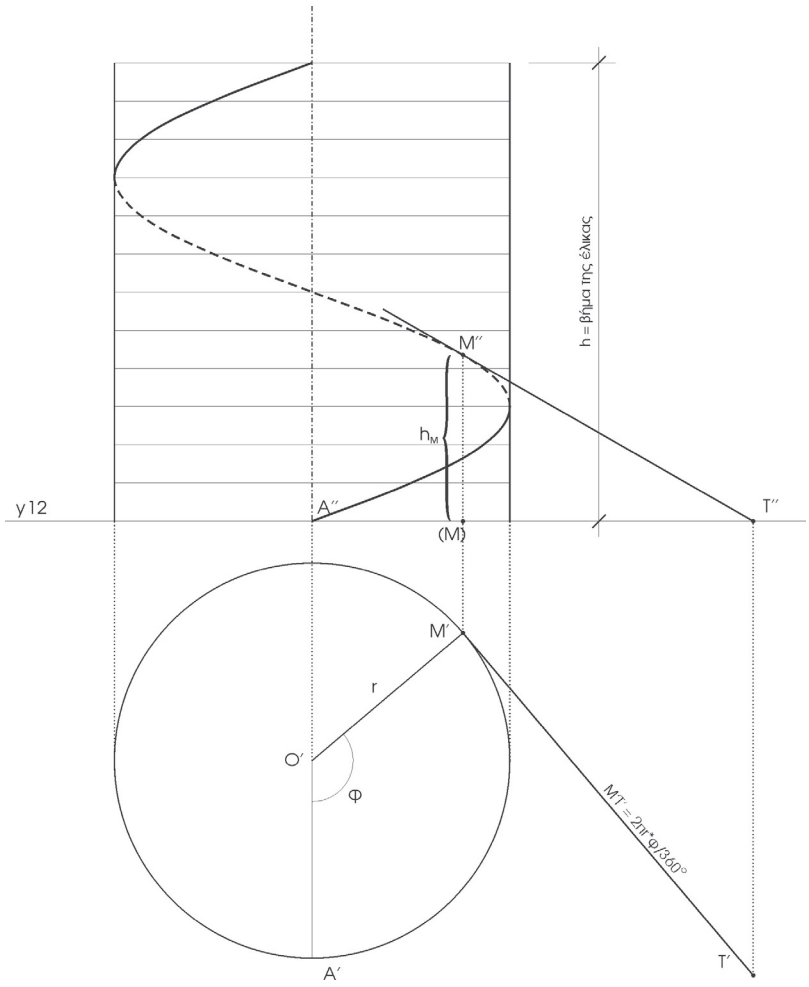
σχ. 64

Η απόσταση δύο διαδοχικών τομών της έλικας με την ίδια γενέτειρα του κυλίνδρου, ονομάζεται **βήμα** της έλικας. Το μήκος του τόξου μιας έλικας που είναι ίσο με το βήμα της, ονομάζεται **σπείρα** της έλικας[1].



σχ. 65

Η παράσταση ορθής κυλινδρικής έλικας ορίζεται, αν σε 1η προβολή χωρίσουμε τον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου σε ίσα μέρη (συνήθως 8 ή 12) και στη 2η προβολή το βήμα της έλικας σε ίσο αριθμό μερών. Στο παράδειγμα του σχήματος 64 ο κύκλος της βάσης του κυλίνδρου (1η προβολή της σπείρας) έχει χωριστεί σε 12 ίσα μέρη και το βήμα της σπείρας (2η προβολή) επίσης σε 12 μέρη. Για κάθε σημείο 1΄,2΄,3΄ κλπ βρίσκουμε τη 2η προβολή 1΄΄, 2΄΄, 3΄΄ κλπ αν φέρουμε ευθείες κάθετες στον άξονα y12, που τέμνουν τους οριζόντιους κύκλους Α΄΄, Β΄΄, Γ΄΄ κλπ κατ΄ αντιστοιχία. Η καμπύλη της έλικας σε 2η προβολή είναι ημιτονοειδής καμπύλη, με άξονα τον άξονα του κυλίνδρου.

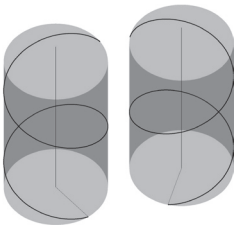


σχ. 66

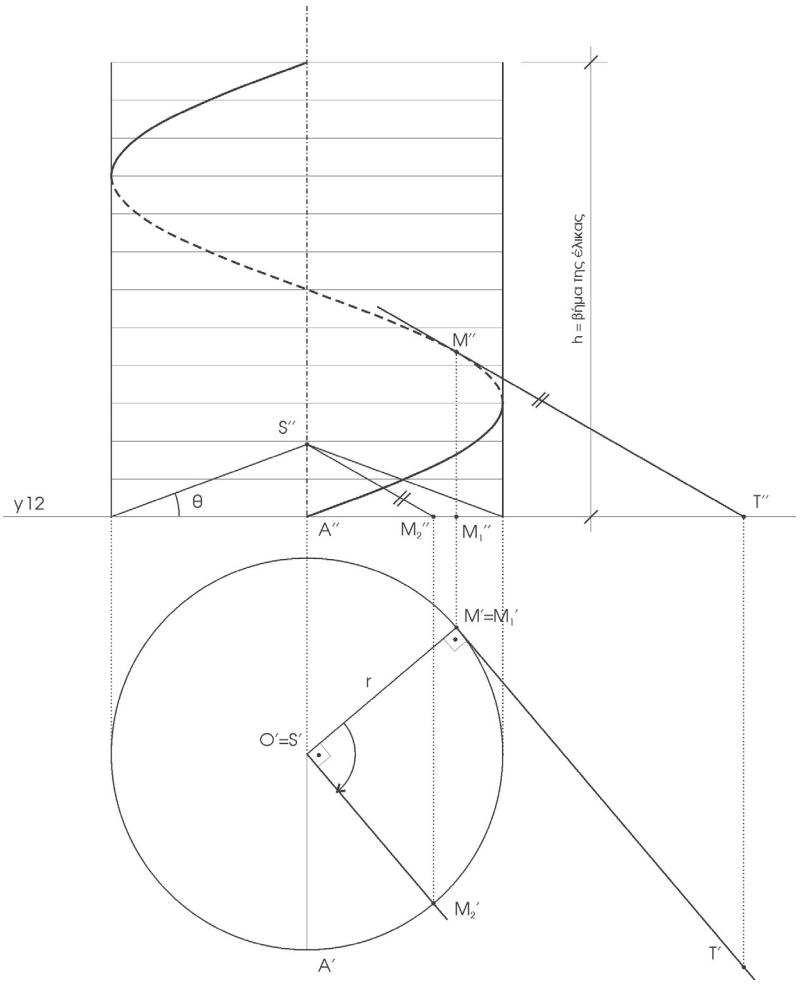
Το ανάπτυγμα του κυλίνδρου και της σπείρας δίνει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του σχήματος 65, όπου ΑΒ=2πr (r: ακτίνα του κύκλου βάσης του κυλίνδρου) και ΒΓ=h (h: το βήμα της έλικας). Η διαγώνιος ΑΓ αποδίδει το ανάπτυγμα της έλικας και -από το πυθαγόρειο θεώρημα- προκύπτει για το μήκος της: $ΑΓ^2=h^2+(2πr)^2 <=> ΑΓ=\sqrt{h^2+(2πr)^2}$. Από το ανάπτυγμα γίνεται γνωστή και η γωνία θ των εφαπτομένων της έλικας, η οποία είναι σταθερή γωνία. Οι εφαπτόμενες μιας έλικας είναι χαρακτηριστικές ευθείες, που όχι μόνο προσδιορίζουν την καμπύλη της, αλλά δημιουργούν χαρακτηριστική επιφάνεια, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Από το ανάπτυγμα (σχ. 65) αναγνωρίζεται ότι για ένα τυχαίο σημείο Μ της σπείρας, που βρίσκεται σε υψόμετρο h_M, το μήκος της άλλης καθέτου εξαρτάται από τη γωνία φ, που είναι η επίκεντρη

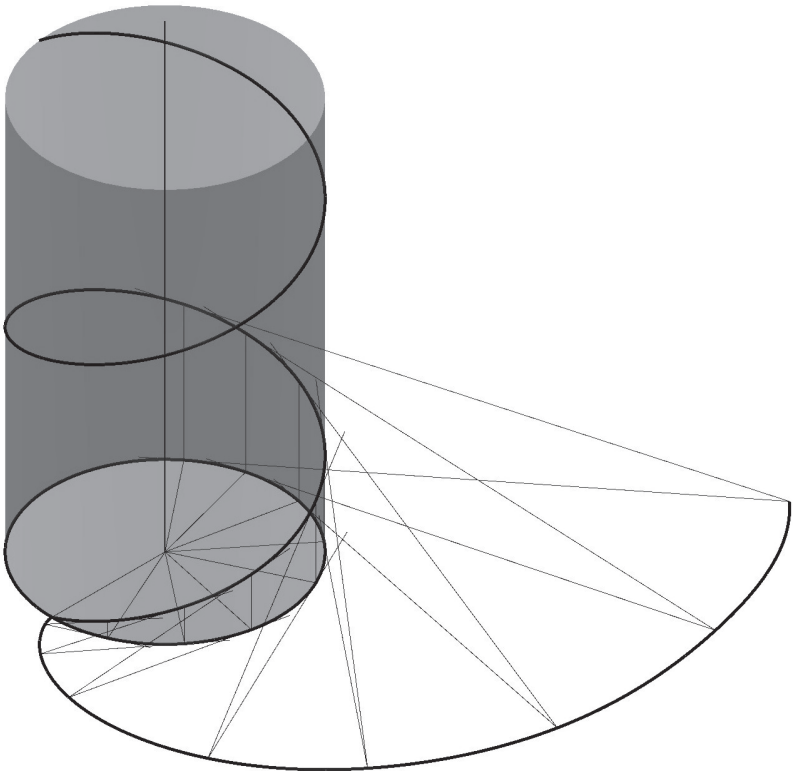
1. Σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxyz, όπου ο άξονας Oz ταυτίζεται με τον άξονα του κυλίνδρου κυλινδρικής έλικας, το τυχαίο σημείο Ρ έχει συντεταγμένες :x=r*συν φ, y=r*ημ φ και z=±hφ/2π, όπου h το βήμα της έλικας και φ η μεταβλητή γωνία του σημείου ως προς την αρχή των αξόνων. Το πρόσημο του z εξαρτάται από τη φορά της έλικας. Αν η φορά είναι δεξιόστροφη, το πρόσημο του z είναι θετικό (+). Στην αριστερόστροφη έλικα το πρόσημο του z λαμβάνεται αρνητικό (-).



γωνία που σχηματίζουν οι ακτίνες ΟΑ και Ο(Μ), όπου (Μ) η προβολή του σημείου Μ στο επίπεδο της βάσης του κυλίνδρου. Δηλαδή: Α(Μ)=2πr*φ/360^{Ο}. Αυτή είναι σημαντική ιδιότητα των κυλινδρικών ελίκων γενικότερα και χρήσιμη σχέση στην παράσταση της σπείρας, διότι αν θέλουμε να βρούμε την εφαπτομένη έλικας σε τυχαίο σημείο της Μ (σχ. 66), αρκεί να δημιουργήσουμε την εφαπτομένη του κύκλου βάσης του κυλίνδρου στο σημείο Μ΄ (1η προβολή του Μ) και να πάρουμε πάνω της μήκος Μ΄Τ΄ ίσο με το μήκος του τόξου Α΄Μ΄=2πr*φ/360^{Ο}. Η 2η προβολή Τ΄΄ του ίχνους της εφαπτομένης με το επίπεδο $Π_1$, βρίσκεται στην τομή της κάθετης από το Τ΄ με τον άξονα y 12 και η 2η προβολή της εφαπτομένης της έλικας από το σημείο Μ είναι η Μ΄΄Τ΄΄. Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού της εφαπτομένης έλικας από τυχαίο σημείο Μ, μπορεί να γίνει μέσω βοηθητικού κώνου με βάση και άξονα ταυτιζόμενους με τη βάση και τον άξονα του κυλίνδρου και υψόμετρο κορυφής S(S΄,S΄΄) τέτοιο, ώστε οι ακραίες γενέτειρες του κώνου να σχηματίζουν στη 2η προβολή γωνία θ, ίση με τη γωνία εφαπτομένης της έλικας (σχ. 67). Όλες οι γενέτειρες του βοηθητικού κώνου σχηματίζουν τότε γωνία θ με το επίπεδο $Π_1$, επομένως είναι *παράλληλες* προς αντίστοιχες εφαπτόμενες της έλικας. Για το τυχαίο σημείο Μ της σπείρας (σχ. 67) η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την γενέτειρα SM_2 του βοηθητικού κώνου. Προσδιορίζουμε το σημείο $M_1(M_1΄,M_1΄΄)$, που είναι η προβολή του Μ στο επίπεδο της βάσης του κυλίνδρου. Φέρνουμε στην 1η προβολή τη γενέτειρα $S΄M_2΄$ παράλληλη στην εφαπτομένη της βάσης του κυλίνδρου από το σημείο $M_1(M_1΄,M_1΄΄)$. Σχηματίζουμε τη 2η προβολή $S΄΄M_2΄΄$ της γενέτειρας



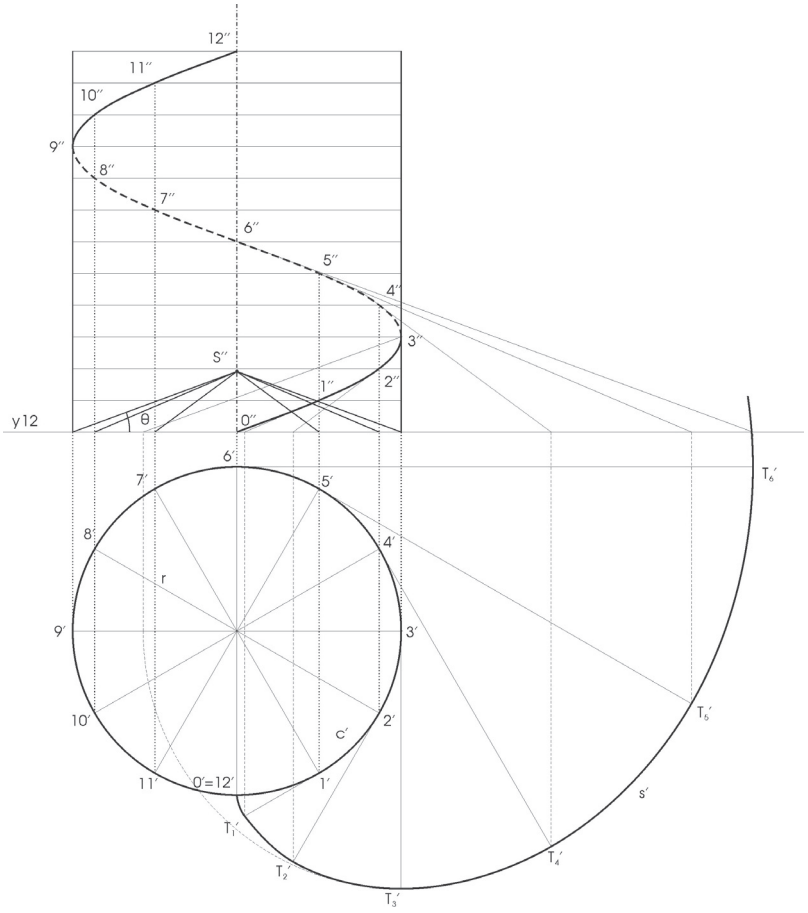
σχ. 67



σχ. 68

SM_2 και στη 2η προβολή φέρνουμε από το M'' ευθεία παράλληλη στην $S''M_2''$, μέχρι να τμήσει τον άξονα y12 στο σημείο T''. Κατόπιν ορίζουμε την 1η προβολή T' στην τομή της καθέτου στον άξονα y12 από το T'' με την εφαπτομένη της βάσης του κυλίνδρου από το M'.

Τα διάφορα σημεία T, τα 1α ίχνη δηλαδή των εφαπτομένων της έλικας, δημιουργούν στο επίπεδο Π, μια νέα καμπύλη s (σχ. 68,69), που τα σημεία της σχετίζονται με τον κύκλο c της βάσης του κυλίνδρου με την εξής ιδιότητα: *η εφαπτομένη κάθε σημείου της c είναι κάθετη σε σημείο της s*. Η καμπύλη s ονομάζεται **ενειλιγμένη** της c και η c ονομάζεται **εξειλιγμένη** της s[2].



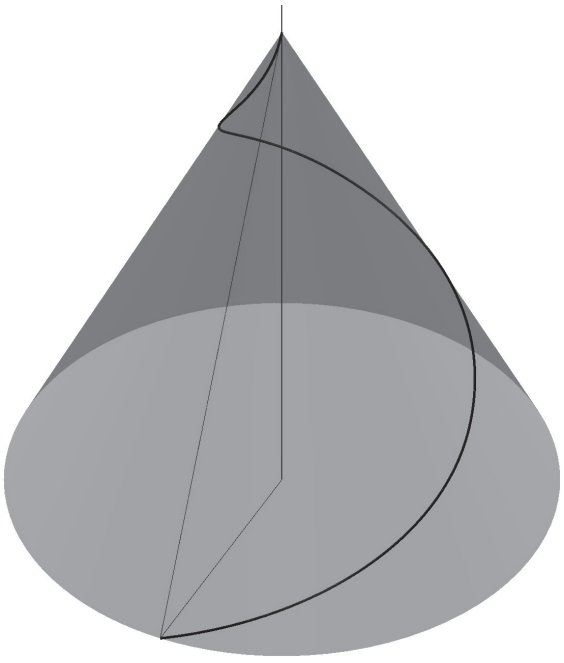
σχ. 69

Κωνική έλικα

Η κωνική έλικα είναι καμπύλη αντίστοιχη της κυλινδρικής έλικας, με τη διαφορά ότι βαίνει σε κωνική επιφάνεια (σχ. 70).

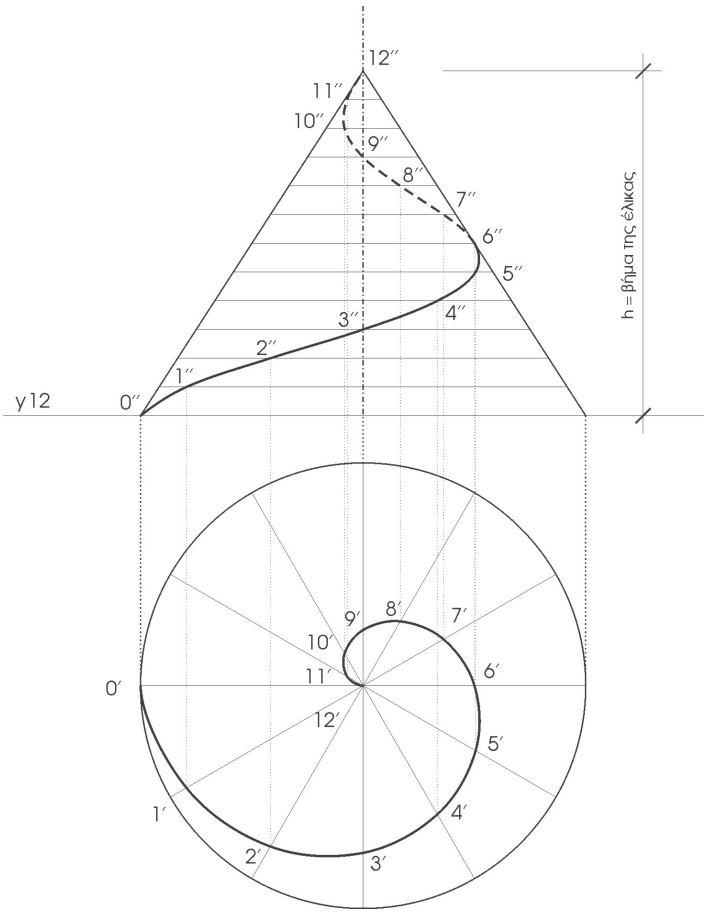
Η παράσταση κωνικής έλικας γίνεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και η παράσταση της κυλινδρικής έλικας. Εάν η κωνική επιφάνεια πάνω στην οποία βαίνει έλικα είναι ορθή κωνική με βάση κύκλο, τότε η έλικα στην 1η προβολή είναι η σπείρα του Αρχιμήδη.

Σε παράσταση, χωρίζουμε την 1η προβολή γενέτειρας του κώνου σε 12 ίσα μέρη (σχ. 71) και σχηματίζουμε τη σπείρα του Αρχιμήδη[3] στην 1η προβολή. Χωρίζουμε στη 2η προβολή το βήμα της έλικας επίσης σε 12 ίσα μέρη και σχηματίζουμε ευθείες παράλληλες στον άξονα y12. Ορίζουμε τις 2ες προβολές των σημείων της σπείρας του Αρχιμήδη στα αντίστοιχα υψόμετρα. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν αντί για τις ευθείες παράλληλες στον άξονα y12 χρησιμοποιήσουμε τις 2ες προβολές των γενετειρών του κώνου. Σημειώνεται ότι η μετασχηματισμένη της έλικας στο ανάπτυγμα του κώνου είναι επίσης σπείρα του Αρχιμήδη (σχ. 72).

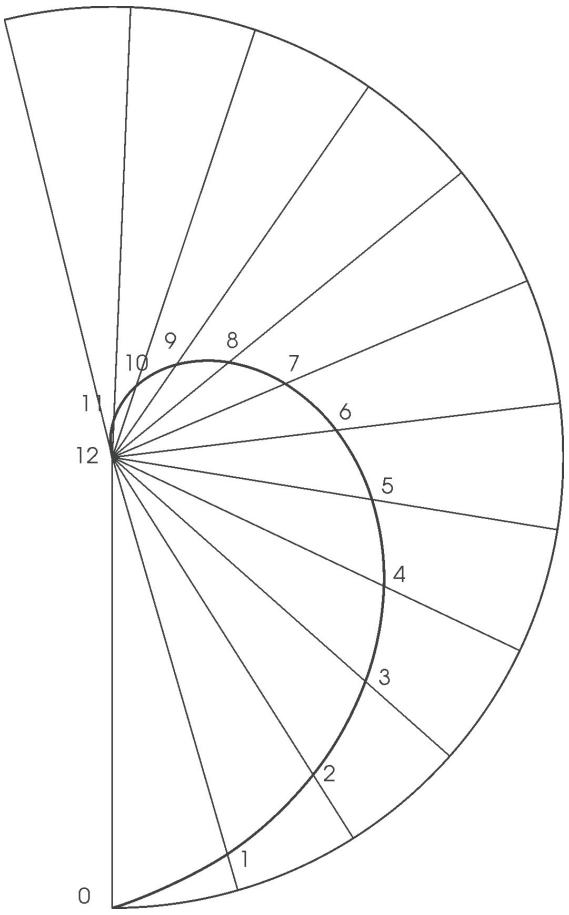


σχ. 70

2. Κάθε επίπεδο ζεύγος καμπύλων με την παραπάνω ιδιότητα δημιουργεί ενειλιγμένη και εξελιγμένη καμπύλη.
3. βλ. παράπτημα Α, παρ. 29



σχ. 71



σχ. 72

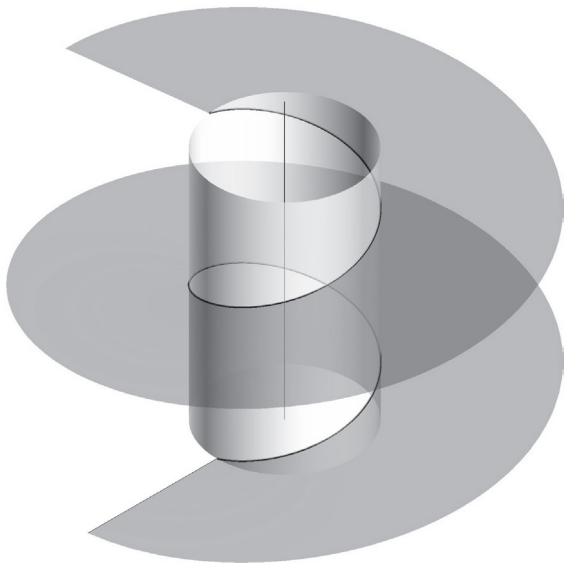
Άλλες ελικοειδείς καμπύλες

Οι έλικες στη θεωρητική γεωμετρία μπορούν να βαίνουν σε οποιαδήποτε εκ περιστροφής επιφάνεια, όσο πολύπλοκη κι αν είναι αυτή. Στην εφαρμοσμένη γεωμετρία ειδικά και στις αρχιτεκτονικές κατασκευές ειδικότερα, ενδιαφερόμαστε ως επί το πλείστον για τις δύο παραπάνω έλικες: ορθή κυλινδρική και ορθή κωνική με βάσεις κυκλικές και τις επιφάνειες που οι έλικες αυτές παράγουν.

Ελικοειδείς επιφάνειες

1. Κυλινδρικές ελικοειδείς επιφάνειες

Μια ανοιχτή ή κλειστή καμπύλη που εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση γύρω από άξονα περιστροφής ξ και ταυτόχρονα ομαλή μεταφορική κίνηση κατά τη διεύθυνση του άξονα ξ, δημιουργεί κυλινδρική ελικοειδή επιφάνεια. Η καμπύλη που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα ξ ονομάζεται **γενέτειρα** της ελικοειδούς επιφάνειας. Αν η γενέτειρα καμπύλη είναι ευθεία, τότε η ελικοειδής



σχ. 73

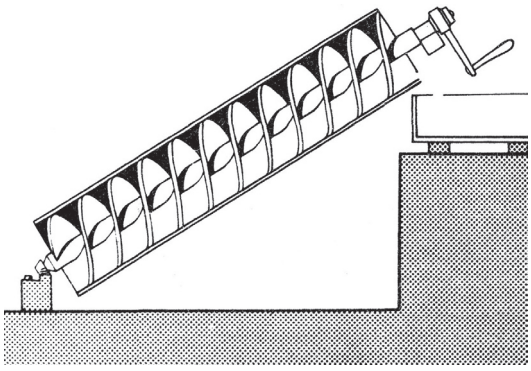
επιφάνεια είναι *ευθειογενής ελικοειδής κυλινδρική επιφάνεια*. Στην ειδική περίπτωση που η γενέτειρα είναι ευθεία κάθετη στον άξονα περιστροφής ξ, η επιφάνεια είναι **ορθή ελικοειδής ευθειογενής επιφάνεια** ή **κοινό ελικοειδές** (σχ. 73) και δεν είναι αναπτυκτή. Στην αρχιτεκτονική η επιφάνεια αυτή έχει ευρύτατη εφαρμογή σε ελικοειδείς σκάλες και ράμπες, ο δε κύλινδρος στον οποίο βαίνει η εσωτερική έλικα, ονομάζεται **φανάρι** της σκάλας ή ράμπας. Η ευρύτατη εφαρμογή της οφείλεται επίσης στο γεγονός ότι εξυπηρετείται κατακόρυφη κίνηση με το ελάχιστο εμβαδόν κάλυψης (εικ. 74).

Εκτός από τις αρχιτεκτονικές κατασκευές, η συνηθέστερη κυλινδρική ελικοειδής επιφάνεια είναι η λεγόμενη **έλικα του Αρχιμήδη** ή **έλικα μεταφοράς** (σχ. 75).

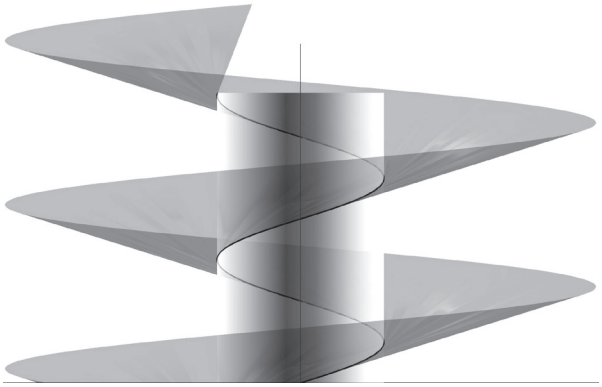
Πρόκειται για μια μηχανική κατασκευή, που χρησιμοποιήθηκε από την αρχαιότητα για την ανύψωση υγρών (κυρίως νερού) αλλά και άλλων υλικών σε κόκκους (άμμος, σιτάρι) ή ημίρρευστων. Η μηχανή αποτελείται από μια ελικοειδή επιφάνεια περιστρεφόμενη μέσα σε κύλινδρο, με τη βοήθεια μοχλού (μανιβέλας). Ήταν τοποθετημένη με κλίση περίπου 30° και με το κάτω άκρο της μέσα στη δεξαμενή του προς μεταφορά υλικού. Με τη περιστροφή του μοχλού, το υλικό εγκλωβιζόταν ανάμεσα στα σπειρώματα και μεταφερόταν ανοδικά σε δεξαμενή που βρισκόταν σε υψηλότερο επίπεδο. Η μηχανή αυτή είχε και εξακολουθεί και σήμερα να έχει ευρεία χρήση, γιατί είναι απλή κατασκευή που παρέχει το πλεονέκτημα της ελάχιστης απώλειας του μεταφερόμενου υλικού. Μπορεί δε να φτάσει σε μήκος 80m.

Όταν η γενέτειρα ευθεία της ελικοειδούς ταυτίζεται με την εφαπτομένη της έλικας, τότε έχουμε μια ειδική

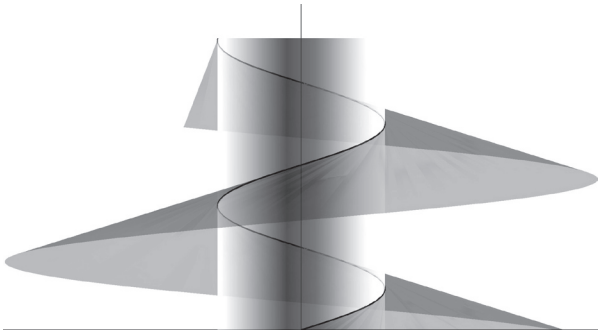
εικ. 74 Μοντέλο ελικοειδούς σκάλας, Μουσείο Μέτρων και Σταθμών, Παρίσι.



σχ. 75



σχ. 76

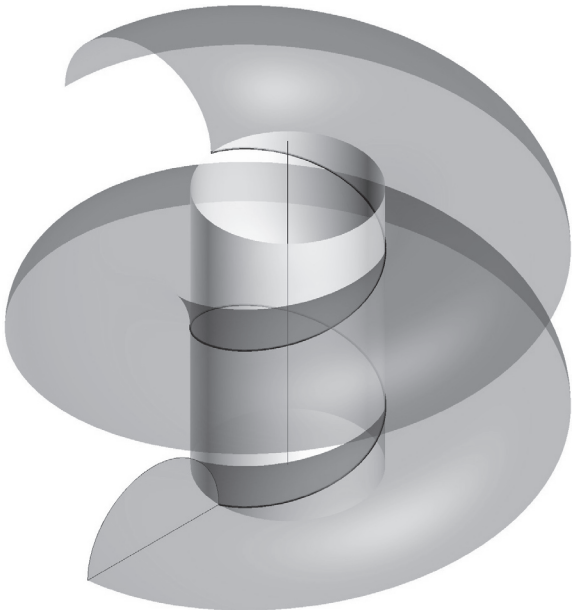


σχ. 77

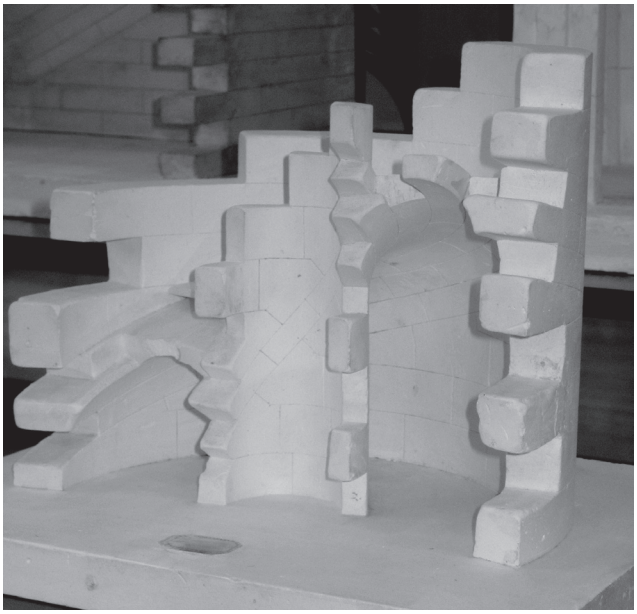
εικ. 78 I. M. Pei, εσωτερική σκάλα στην πυραμίδα του Λούβρου, με αναπτυκτή ελικοειδή επιφάνεια στον ουρανό της, Παρίσι

ελικοειδή επιφάνεια, με πολύ ιδιαίτερη φόρμα και καμπύλη βάσης, που μάλιστα είναι αναπτυκτή, όπως αποδεικνύει η διαφορική γεωμετρία (σχ. 76,77, εικ. 78).

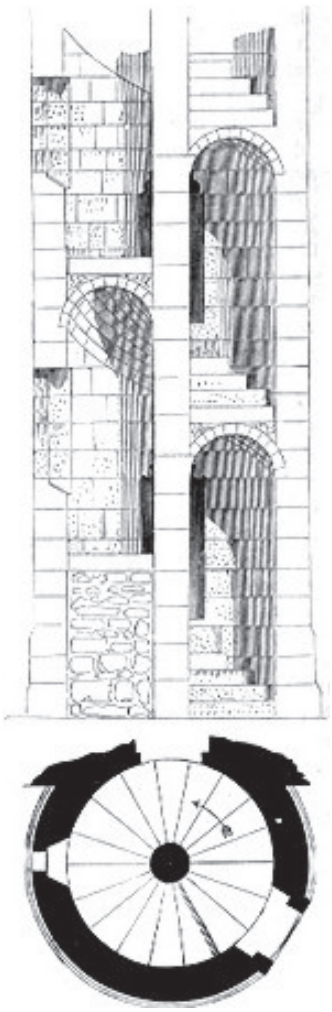
Η γενέτειρα καμπύλη κυλινδρικής ελικοειδούς επιφάνειας μπορεί βέβαια να μην είναι ευθεία, αλλά οποιαδήποτε επίπεδη καμπύλη ή στερεό σχήμα. Στην αρχιτεκτονική έχουμε αρκετά τέτοια παραδείγματα ελικοειδών επιφανειών, που αποτελούν τον ουρανό (κάτω μέρος) ελικοειδούς σκάλας (σχ. 79,81, εικ. 80) με γενέτειρα ημικύκλιο (ημικυκλικό ελικοειδές) ή ημιέλλειψη.



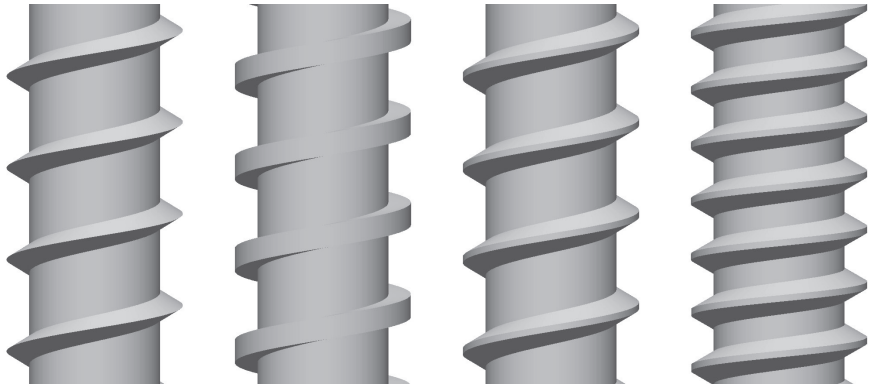
σχ. 79



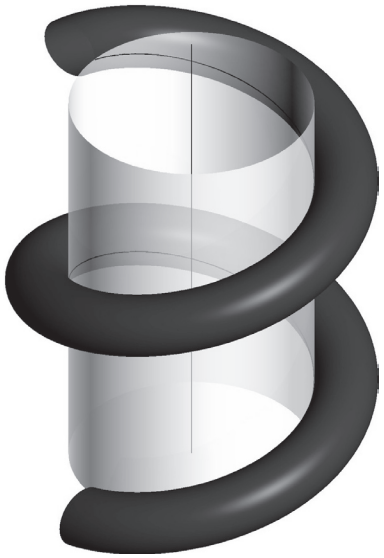
εικ. 80 Μοντέλο ουρανού ελικοειδούς σκάλας, Μουσείο Μέτρων και Σταθμών, Παρίσι.



σχ. 81

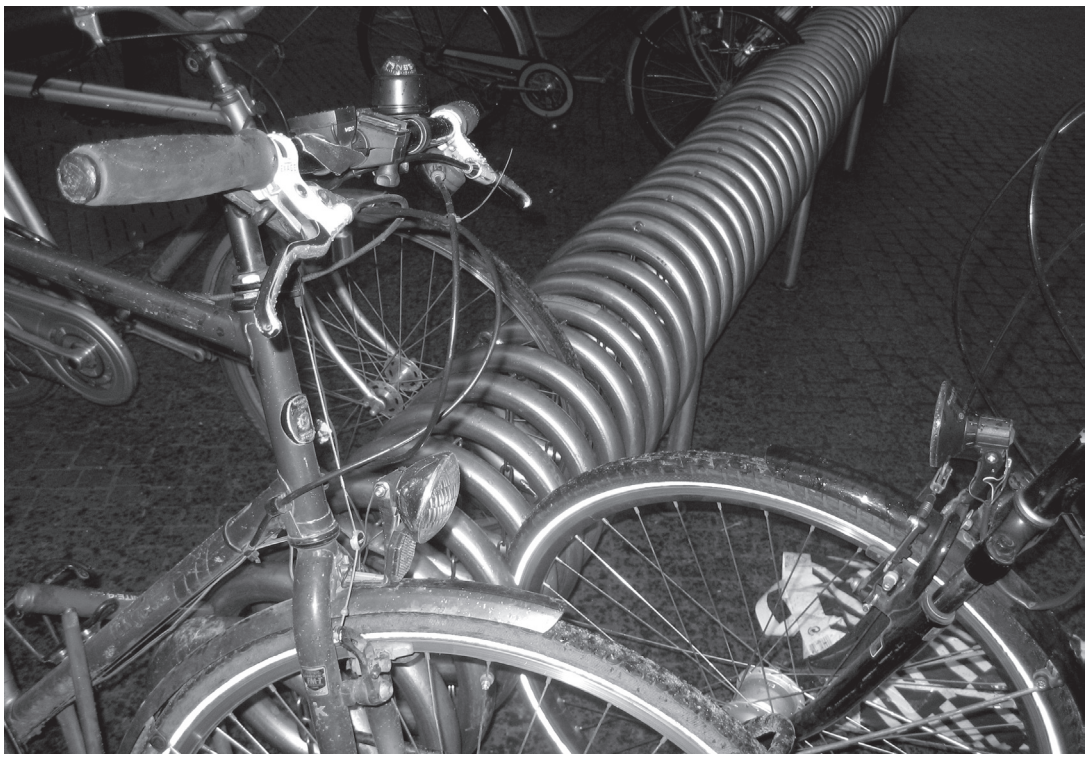


σχ. 82



σχ. 83

εικ. 84 Κώστας Βαρότσος, *Σπιράλ*, 1998

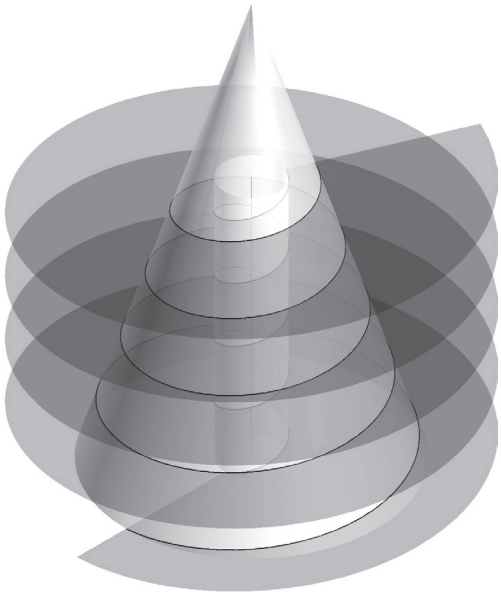


εικ. 85 Άκαμπτο ελατήριο για parking ποδηλάτων, Sony Center, Βερολίνο, Γερμανία

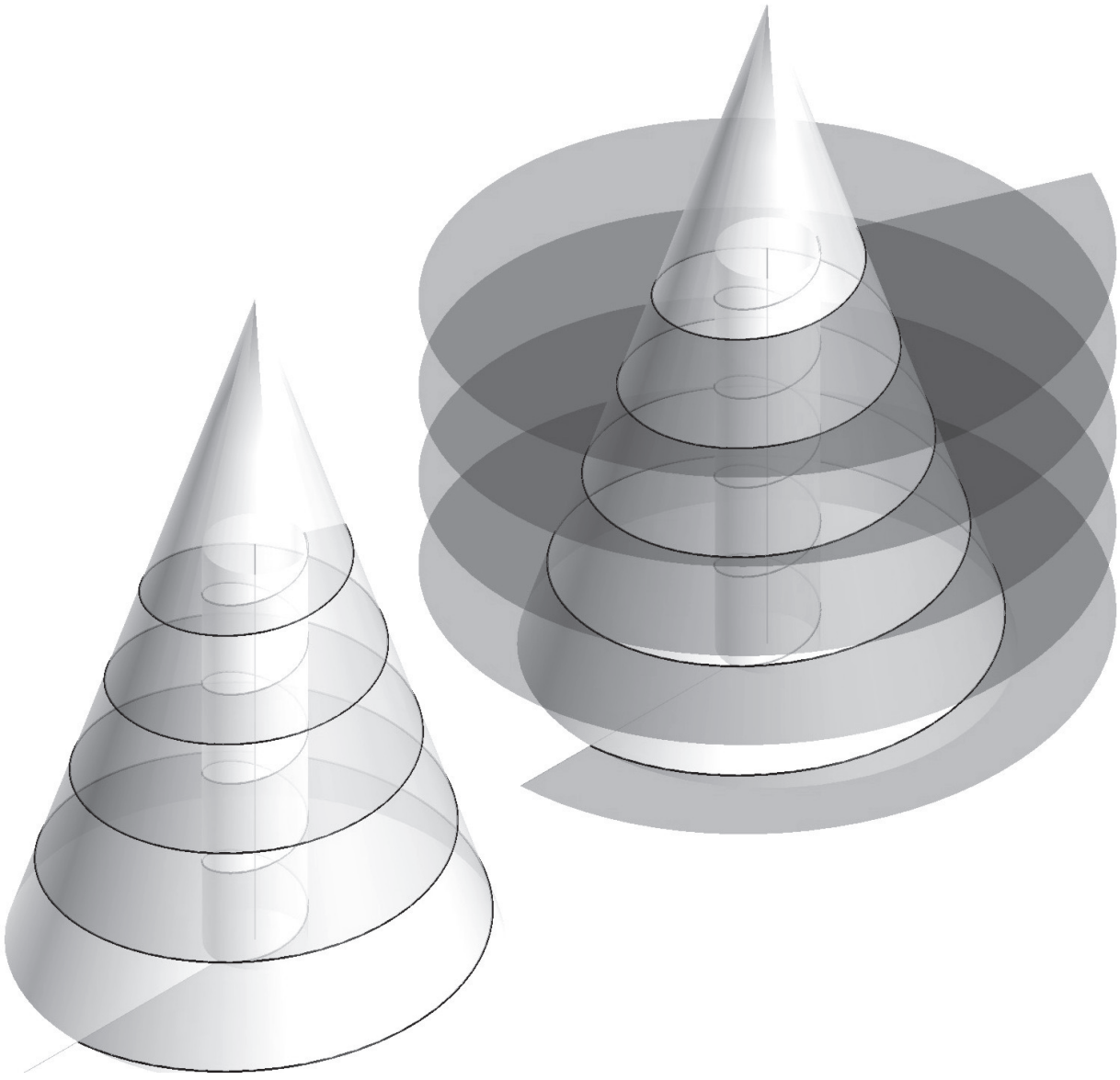
Τρίγωνα, τετράγωνα και τραπέζια είναι πάρα πολύ συνηθισμένες γενέτειρες ελικοειδών, με εφαρμογή στους κοχλίες (βίδες) (σχ. 82). Αξίζει ν΄ αναφερθεί -παρόλο που είναι πολύ σύνθετη- και η ελικοειδής επιφάνεια που παράγεται από ελίκωση σφαίρας, το κοινό αλλά ευρύτατα διαδεδομένο ελατήριο (σφαιρικό ελικοειδές) (σχ. 83, εικ. 84,85).

2. Κωνικές ελικοειδείς επιφάνειες

Μια ευθειογενής κωνική ελικοειδής επιφάνεια μπορεί να παραχθεί από την αλληλοτομία κώνου εκ περιστροφής και ενός κοινού ελικοειδούς (σχ. 86). Παράγονται δύο κωνικές ελικοειδείς επιφάνειες, μία εσωτερική και μία εξωτερική του κώνου (σχ. 87). Σε οποιαδήποτε περίπτωση, η αλληλοτομία



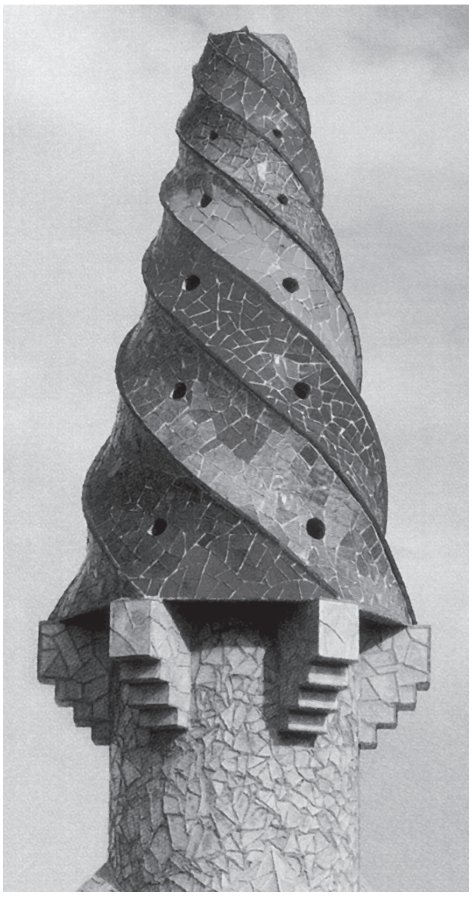
σχ. 86



σχ. 87

των επιφανειών δημιουργεί τη σπείρα του Αρχιμήδη ως καμπύλη αλληλοτομίας. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η επιφάνεια που δημιουργείται έχει μεταβαλλόμενο μήκος γενέτειρας, είτε είναι εσωτερική, είτε εξωτερική του κώνου (εικ. 88-90). Είναι προφανές ότι στη θεωρητική γεωμετρία το μεταβαλλόμενο ευθύγραμμο τμήμα της γενέτειρας του κωνικού ελικοειδούς μπορεί ν΄ αντικατασταθεί με οποιαδήποτε άλλη επίπεδη καμπύλη. Στην αρχιτεκτονική τέτοιου είδους επιφάνειες δε χρησιμοποιούνται συχνά, λόγω της δυσκολίας υπολογισμού και κατασκευής τους. Συναντώνται παρόλ΄ αυτά στη φύση, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τα κοχύλια (εικ. 93), όπου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταβαλλόμενη ευθεία αποτελεί διάμετρο μεταβαλλόμενου κύκλου, ως γενέτειρας καμπύλης.

Εάν διατηρηθεί το μήκος ευθύγραμμου τμήματος, που κινείται σε κωνική έλικα, δημιουργείται άλλη οικογένεια κωνικής ελικοειδούς επιφάνειας (εικ. 91, σχ. 92).

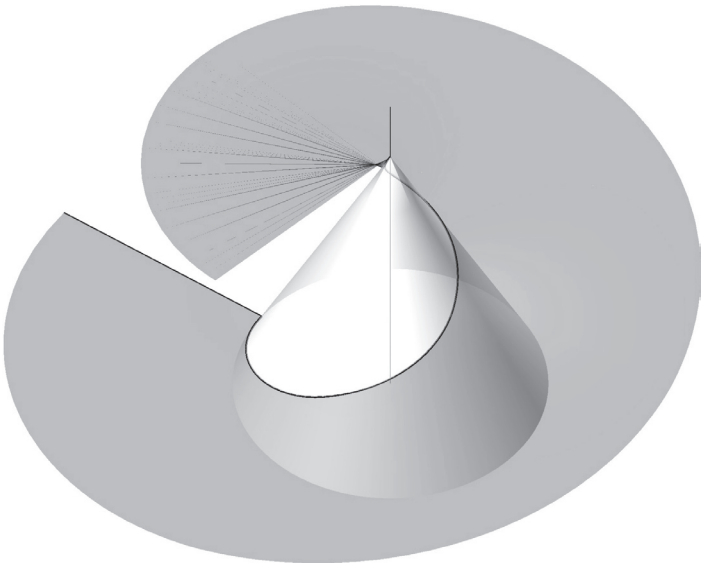


εικ. 88 Antoni Gaudí, κωνική ελικοειδής καμινάδα στο *Güell palace*, Carrer de la Rambla, Βαρκελώνη, Ισπανία, 1886

εικ. 89 Kenzo Tange, *National gymnasium*, Ολυμπιακό χωριό, Yoyogi, Tokyo, Ιαπωνία, 1964

εικ. 90 Κωνοειδής ελικοειδής τοίχος για την πρόσβαση σε αγωγούς ύδατος, Illinois, ΗΠΑ, 1973

εικ. 91 Frank Lloyd Write, άποψη του εσωτερικού κωνοειδή ελικοειδή διαδρόμου στο *Guggenheim Museum*, Νέα Υόρκη, ΗΠΑ, 1956



σχ. 92

εικ. 93 «Ναυτίλος»

Γεωδαισιακός θόλος

Ο γεωδαισιακός θόλος είναι στη γενική περίπτωση στερεό *πολύεδρο* που τείνει σε μη αναπτυκτή επιφάνεια. Αν ο γεωδαισιακός θόλος έχει επίπεδες έδρες κι επομένως ευθύγραμμες ακμές, τότε είναι αναπτυκτό στερεό. Κάθε έδρα του πολυέδρου έχει σχήμα τριγώνου. Ο γεωδαισιακός θόλος δεν είναι τετραγωνική επιφάνεια, στην πραγματικότητα δεν νοείται καν σαν επιφάνεια. Ο γεωδαισιακός θόλος είναι πολύεδρο. Στην αρχιτεκτονική ο γεωδαισιακός θόλος έχει χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή χωροδικτυωμάτων, που είναι τμήματα ή ολόκληρες μη αναπτυκτές επιφάνειες, όπως είναι η σφαίρα ή το ελλειψοειδές. Συνήθως ο σφαιρικός γεωδαισιακός θόλος παράγεται από κανονικό εικοσάεδρο[4], που αποτελεί τη βάση του, με συχνότητα ν.

Ένα κανονικό εικοσάεδρο έχει έδρες ισόπλευρα τρίγωνα. Αν διαιρέσουμε κάθε πλευρά του τριγώνου μιας έδρας σε ν ίσα μέρη, τότε πάνω στην έδρα του εικοσαέδρου θα σχηματιστούν $ν^2$ ίσα ισόπλευρα τρίγωνα. Προβάλλοντας κεντρικά τις κορυφές των τριγώνων αυτών στην επιφάνεια της περιγεγραμμένης σφαίρας του εικοσαέδρου, με κέντρο προβολής το κέντρο της περιγεγραμμένης σφαίρας, δημιουργείται ένα πολύεδρο με ακμές που τείνουν σε ευθύγραμμα τμήματα, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός ν (όσο μεγαλύτερος είναι ο διαμερισμός της έδρας του εικοσαέδρου). Οι ακμές του γεωδαισιακού θόλου στην εφαρμοσμένη γεωμετρία ονομάζονται **ράβδοι** και οι κορυφές του ονομάζονται **κόμβοι**.

Ο γεωδαισιακός θόλος με βάση κανονικό εικοσάεδρο και συχνότητα ν έχει:

έδρες:	$20ν^2$
ακμές:	$30ν^2$
κορυφές:	$10ν^2+2$ [5]

Οι ακμές (ράβδοι) δεν είναι όλες ίσες μεταξύ τους.

4. Το εικοσάεδρο, το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο και το δωδεκάεδρο αποτελούν τα λεγόμενα πέντε πλατωνικά στερεά. Είναι πολύεδρα με ίσες έδρες που εγγράφονται σε σφαίρα. Από τα πλατωνικά στερεά το εικοσάεδρο είναι το μεγαλύτερο και πλέον επιμερισμένο και είναι ο λόγος που το χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό γεωδαισιακών θόλων.
5. Τύπος του Euler

Αποδεικνύεται ότι:

- για v=2n (άρτιο πλήθος) δημιουργούνται (n(n+1))/2+(2n-1) διαφορετικού μήκους ράβδοι και
- για v=2n+1 (περιττό πλήθος) δημιουργούνται ((n+1)(n+2))/2+(2n-1) διαφορετικού μήκους ράβδοι.

Για παράδειγμα, για συχνότητα v=5, τότε n=2 και δημιουργούνται 9 διαφορετικού μήκους ράβδοι.

	εικοσάεδρο	γεωδαισιακός συχνότητας v
έδρες	20	$20v^2$
ακμές	32	$30v^2$
κορυφές	12	$10v^2+2$

Η παράσταση σφαιρικού γεωδαισιακού θόλου με βάση εικοσάεδρο ξεκινά από την παράσταση του κανονικού εικοσαέδρου και της περιγεγραμμένης του σφαίρας. Η απεικόνιση μπορεί να

εικ. 94 Frank Gehry, *DG Bank*, Βερολίνο, Γερμανία, 1996

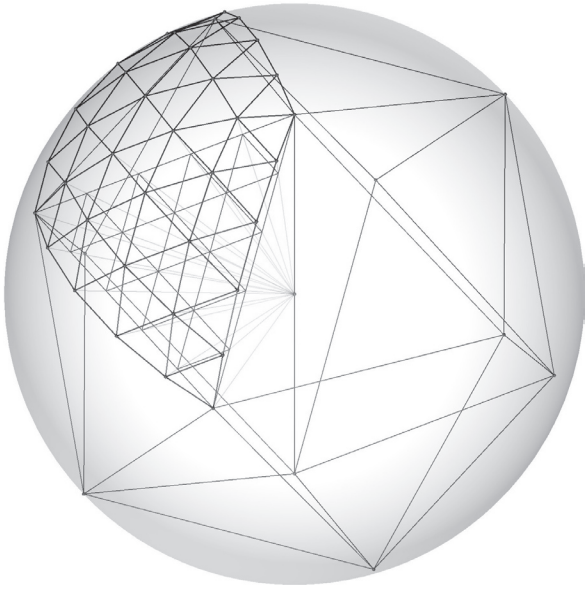
βασιστεί στη γεωμετρική κατασκευή ενός κανονικού δεκαγώνου[6] ή δύο ομόκεντρων κανονικών πενταγώνων[7] με στροφή τέτοια, ώστε η ακτίνα σε κορυφή του πρώτου πενταγώνου ν΄ αποτελεί μεσοκάθετο πλευράς του δεύτερου πενταγώνου (σχ. 96).

Στην 1η προβολή κατασκευάζουμε ένα κανονικό δεκάγωνο κι ενώνουμε τις κορυφές του ανά δύο, δημιουργώντας τα δύο πεντάγωνα του εικοσαέδρου, που βρίσκονται σε διαφορετικά υψόμετρα. Στη 2η προβολή ορίζουμε το κέντρο Ο΄΄ του εικοσαέδρου και σε υψόμετρο r/2 πάνω και κάτω από το Ο΄΄ (όπου r η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του δεκαγώνου) ορίζουμε τη 2η προβολή Α΄΄ της κορυφής Α(Α΄,Α΄΄) και τη 2η προβολή Ζ΄΄ της κορυφής Ζ(Ζ΄,Ζ΄΄). Οι 2ες προβολές των κορυφών Β, Γ, Δ και Ε βρίσκονται σε οριζόντια ευθεία διερχόμενη από το Α΄΄ και αντίστοιχα οι 2ες προβολές των κορυφών Η, Θ, Ι και Κ βρίσκονται σε οριζόντια ευθεία διερχόμενη από το Ζ΄΄. Ενώνουμε τις κορυφές των πενταγώνων, όπως φαίνεται στο σχήμα 96.

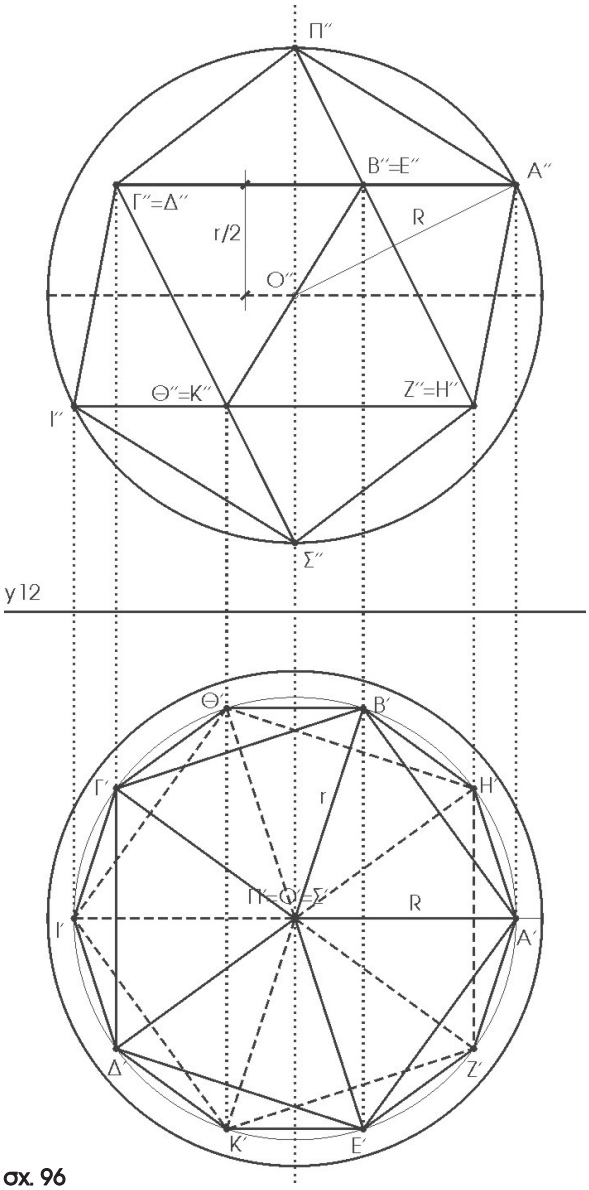
Χαράσσουμε τον κύκλο (Ο΄,Ο΄΄Α΄΄), που αποτελεί την παράσταση σε 2η προβολή της περιγεγραμμένης σφαίρας του εικοσαέδρου. Από το κέντρο Ο΄΄ φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία και στην τομή της με τον κύκλο (Ο΄΄,Ο΄΄Α΄΄) ορίζουμε τις κορυφές Π΄΄ και Σ΄΄ του εικοσαέδρου, που στην 1η προβολή τους ταυτίζονται με το κέντρο Ο΄ του εικοσαέδρου. Ενώνουμε την κορυφή Π με τις κορυφές του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ και την κορυφή Σ με τις κορυφές του πενταγώνου ΖΗΘΙΚ σε 1η και 2η προβολή. Ολοκληρώνουμε την παράσταση με τη χάραξη της 1ης προβολής της περιγεγραμμένης σφαίρας που είναι ο κύκλος (Ο΄,Ο΄΄Α΄΄).

Αν ορίσουμε τη συχνότητα του γεωδαισιακού θόλου ν=5, διαιρούμε κάθε ακμή του στερεού σε 5 ίσα μέρη. Στο σχήμα 97 έχει σχηματιστεί η παράσταση του 1/20 του γεωδαισιακού θόλου, δηλαδή σχηματίστηκε ο διαμερισμός μόνο της μίας έδρας του εικοσαέδρου, για λόγους ευκρίνειας.

Το τρίγωνο ΠΓΔ είναι στο χώρο ισόπλευρο. Σε παράσταση και σε 1η προβολή το τρίγωνο Π΄Γ΄Δ΄ εμφανίζεται ισοσκελές, αλλά η πλευρά Γ΄Δ΄

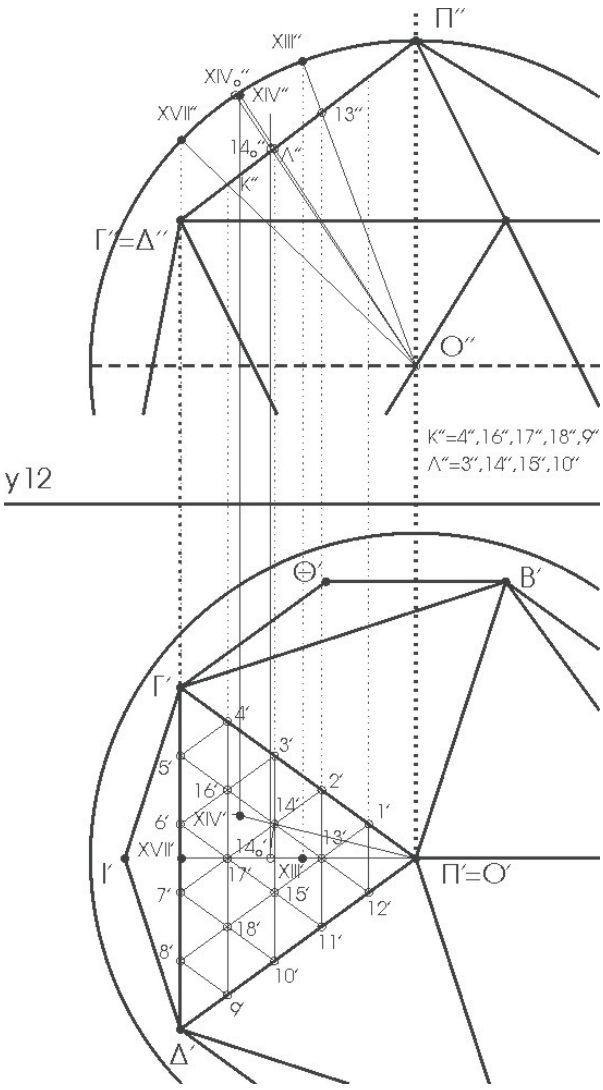


σχ. 95

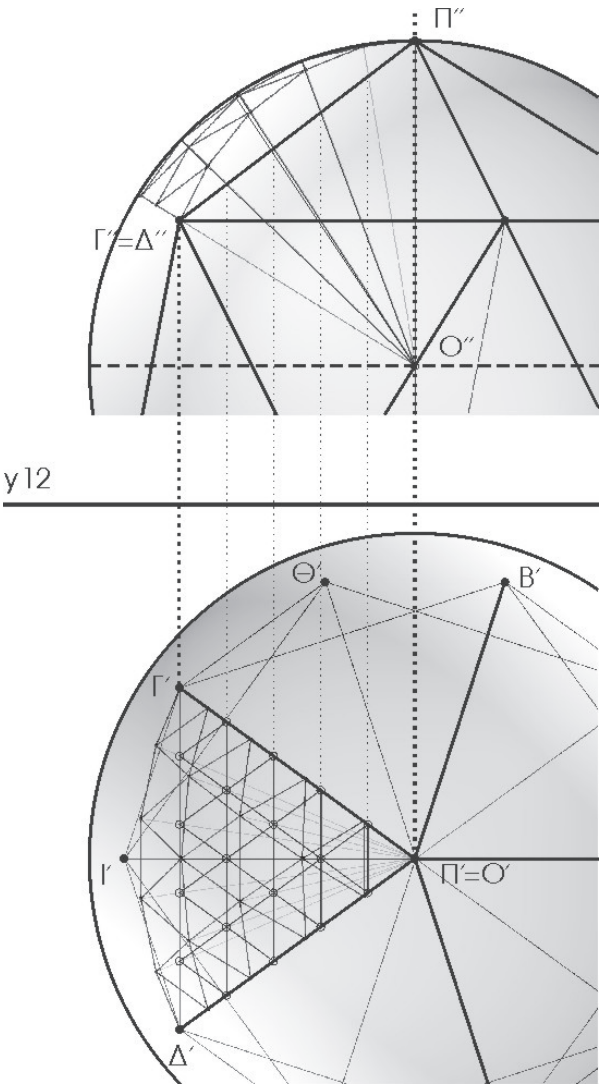


σχ. 96

6. βλ. παράπτημα Α, παρ. 17
7. βλ. παράρτημα Α, παρ. 10



σχ. 97



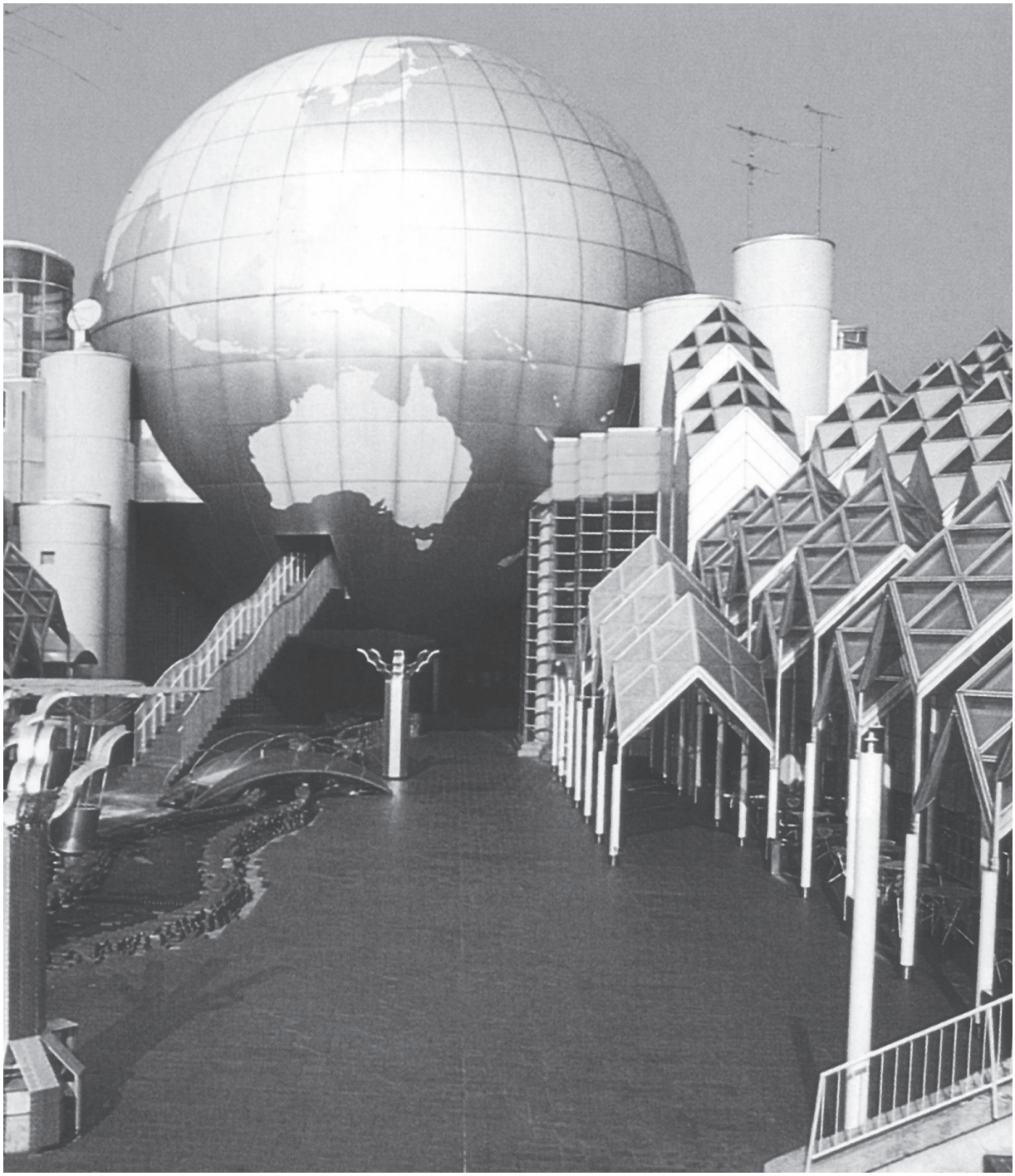
σχ. 98

είναι ίση με την πραγματική. Στη 2η προβολή το τρίγωνο ΠΓΔ εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα Π″Δ″ (Γ″=Δ″) (το ΠΓΔ βρίσκεται σε πρόσθιο επίπεδο). Χωρίζουμε κάθε μια από τις ακμές ΠΓ, ΠΔ και ΓΔ σε 5 ίσα μέρη στην 1η προβολή και δημιουργούμε τα σημεία 1′, 2′, ..., 12′. Ενώνουμε τα σημεία διαμερισμού, ώστε να σχηματιστούν μέσα στο αρχικό 25 νέα τρίγωνα, ίσα μεταξύ τους και όμοια με το ΠΓΔ. Έτσι, σχηματίζονται στην 1η προβολή οι κορυφές 13′, 14′, ..., 18′.

Οι κορυφές Π, Γ και Δ -ως κορυφές του εικοσαέδρου- ανήκουν στην περιγεγραμμένη σφαίρα. Οι κορυφές όμως 1-18 δεν ανήκουν και θα πρέπει να προβληθούν στην περιγεγραμμένη σφαίρα, χρησιμοποιώντας κεντρική προβολή, με κέντρο προβολής το Ο.

Το σημείο 17(17′,17″) αν ενωθεί με το κέντρο προβολής Ο, δημιουργεί ακτίνα, που είναι ευθεία μετωπική. Η ακτίνα Ο″17″ τέμνει τον κύκλο c_1'' στο σημείο XVII″. Η 1η προβολή του XVII βρίσκεται στην 1η προβολή c_1'. Με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζεται και το σημείο XIII(XIII′,XIII″), κεντρική προβολή του σημείου 13 στη σφαίρα. Όλα τα υπόλοιπα σημεία, αν ενωθούν με το κέντρο προβολής Ο, δημιουργούν ευθείες με τυχαία θέση όσον αφορά τα επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$. Για τον προσδιορισμό των προβολών τους στη σφαίρα, κάνουμε κατάκλιση κάθε ακτίνας Ο1, Ο2, Ο3, ..., Ο18 (εκτός των Ο13 και Ο17), ώστε να γίνουν μετωπικές. Για παράδειγμα, για να βρούμε την κεντρική προβολή XIV στη σφαίρα του σημείου 14 του εικοσαέδρου, φέρνουμε στις δύο

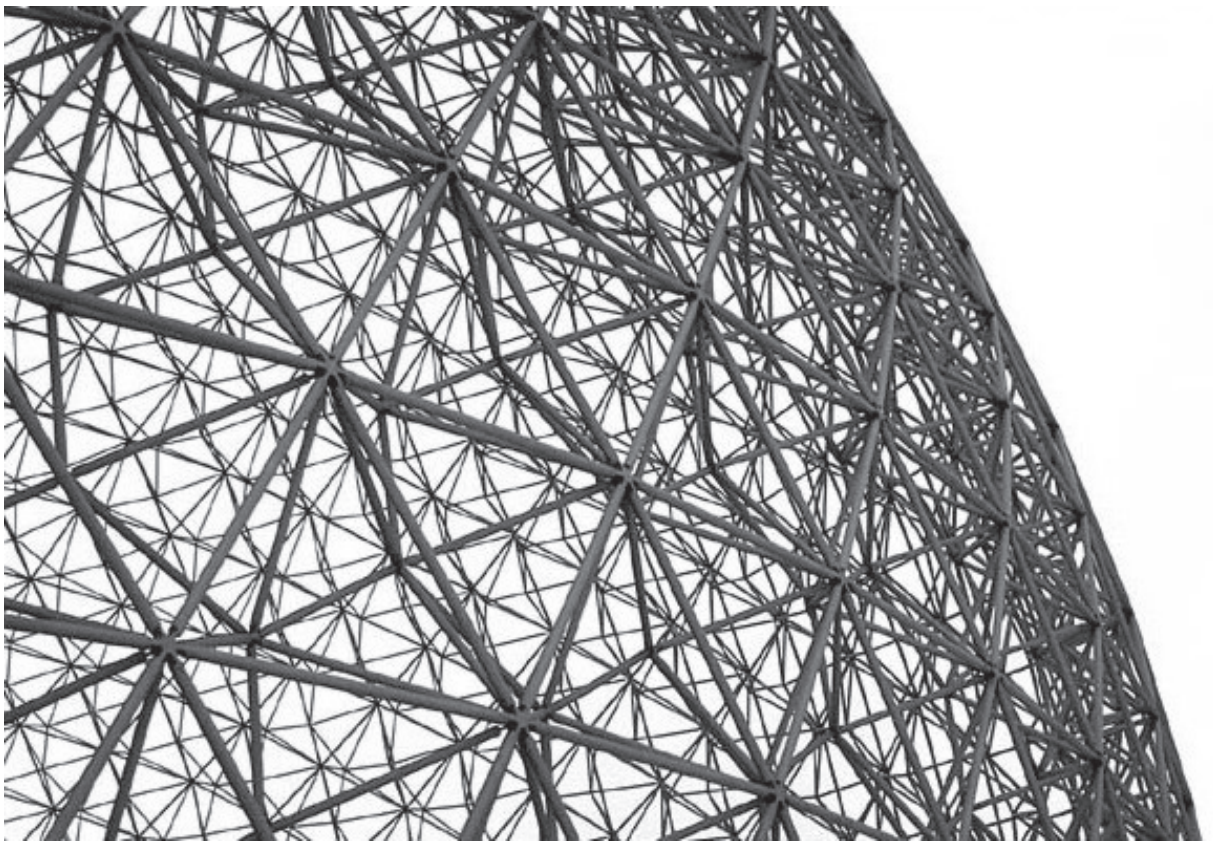
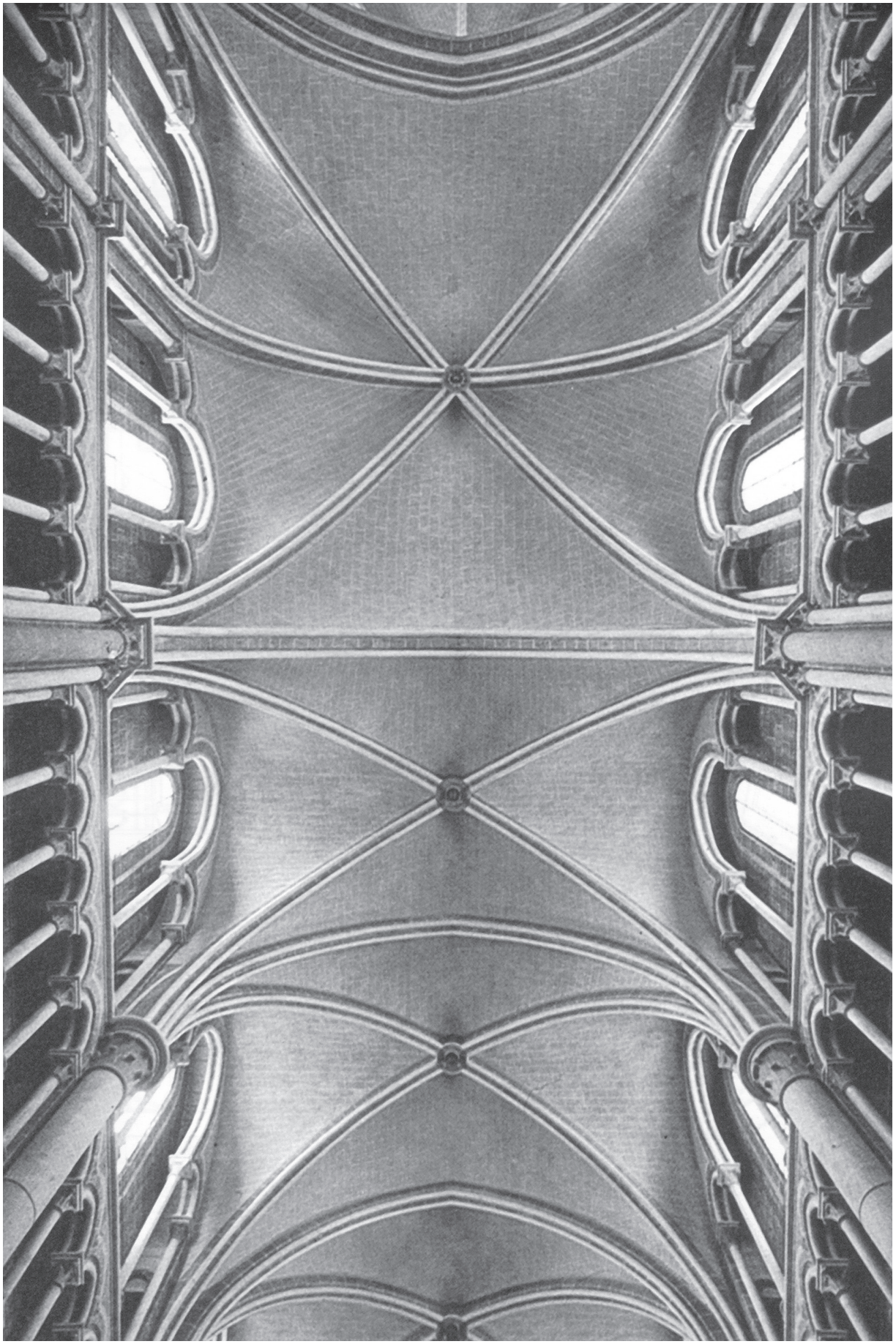
προβολές την ακτίνα Ο14(Ο΄14΄,Ο΄΄14΄΄). Στην 1η προβολή φέρνουμε τόξο κύκλου με κέντρο το Ο΄ και ακτίνα Ο΄14΄, μέχρι να τμήσει τον μετωπικό κύκλο c_1' και ορίζουμε το σημείο $14_o'$, από το οποίο φέρνουμε ευθεία κάθετη στον y12. Από το σημείο 14΄΄ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στον y12, μέχρι να τμηθεί η κάθετη από το $14_o'$ και ορίζουμε το $14_o''$. Φέρνουμε την ακτίνα Ο΄΄$14_o''$ και στην τομή της με τον κύκλο c_1'' ορίζουμε το σημείο XIV_o''. Μεταφέρουμε το σημείο XIV_o'' στην πραγματική του θέση, δηλαδή στην ακτίνα Ο΄΄14΄΄, μέσω ευθείας παράλληλης στον y12 και ορίζουμε τη 2η προβολή XIV΄΄ του σημείου XIV του γεωδαισιακού. Η 1η προβολή XIV΄ βρίσκεται στην τομή της καθέτου στον άξονα y12 με την ακτίνα Ο΄14΄. Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και για τα υπόλοιπα σημεία (σχ. 98).



εικ. 99 Itsuko Hasegawa, *Πολιτιστικό κέντρο Shonandai*, Fujisawa, Ιαπωνία, 1987

Αλγεβρικές εξισώσεις τετραγωνικών επιφανειών

μονόχωνο υπερβολοειδές	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$
δίχωνο υπερβολοειδές	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$
υπερβολικό παραβολοειδές	$x^2/a^2 - y^2/b^2 - 2z = 0$ με $a,b>0$
ελλειπτικό παραβολοειδές	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - 2cz = 0$
ελλειψοειδές	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$



εικ. 100 Λεπτομέρεια γεωδαισιακού θόλου, Montreal, Καναδάς