

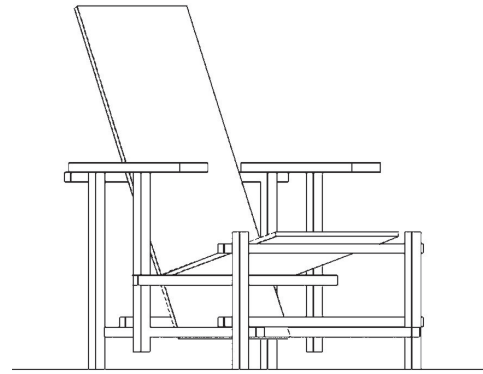
ΣΚΙΑΓΡΑΦΙΑ

Γενικές αρχές και έννοιες

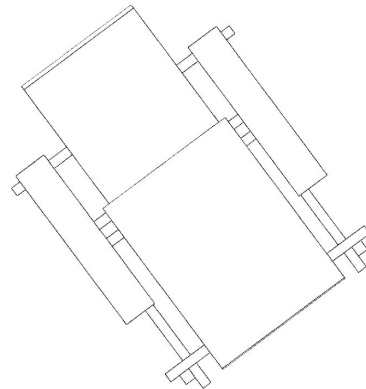
Στο σύστημα προβολής κατά Monge δεν μας δίνεται η δυνατότητα ν' αντιληφθούμε άμεσα τα αντικείμενα του χώρου, παρά μόνο αφού συνδυάσουμε τις δύο προβολές του αντικειμένου και αντιληφθούμε στο νου μας την εικόνα του στο χώρο. Αυτό που «λείπει» είναι κάθε φορά η τρίτη διάσταση, το βάθος (σχ. 1). Μπορούμε να βοηθηθούμε περισσότερο στην αναγνώριση του αντικειμένου, όπως αυτό είναι στο χώρο, αν σκιαγραφήσουμε τις προβολές του αντικειμένου. Αυτός ο τρόπος -αν και έμμεσος- μας βοηθά ν' αναγνωρίσουμε το βάθος και τις σχετικές θέσεις των στοιχείων του αντικειμένου (σχ. 2,3).

Στην αξονομετρική προβολή η σκιαγράφιση των αντικειμένων εμφανίζει καλύτερα τον όγκο των αντικειμένων, στη δε προοπτική τελειοποιεί την εικόνα της σύνθεσης (σχ. 4).

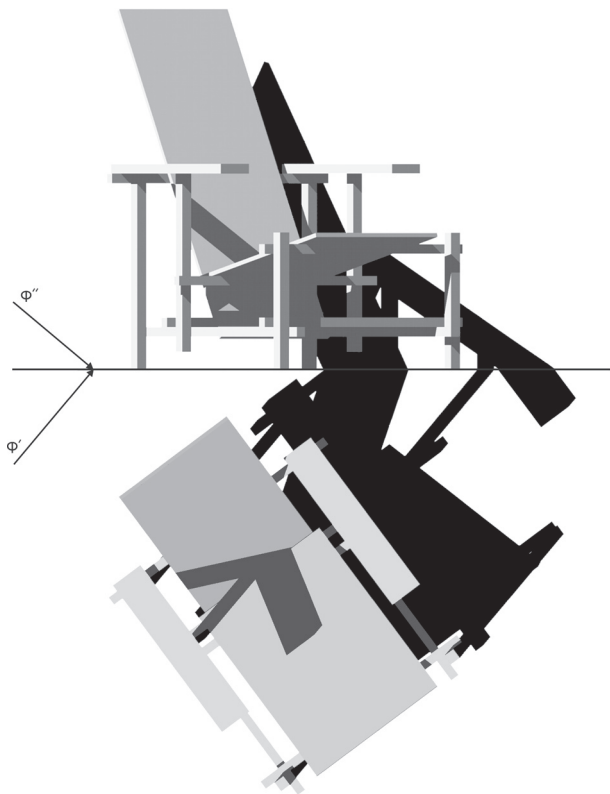
Για να υπολογίσουμε τη φωτοσκίαση ενός αντικειμένου που προβάλλουμε στα δύο επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2 , πρώτα ορίζουμε τη θέση και τη διεύθυνση του φωτός και βρίσκουμε και για τις



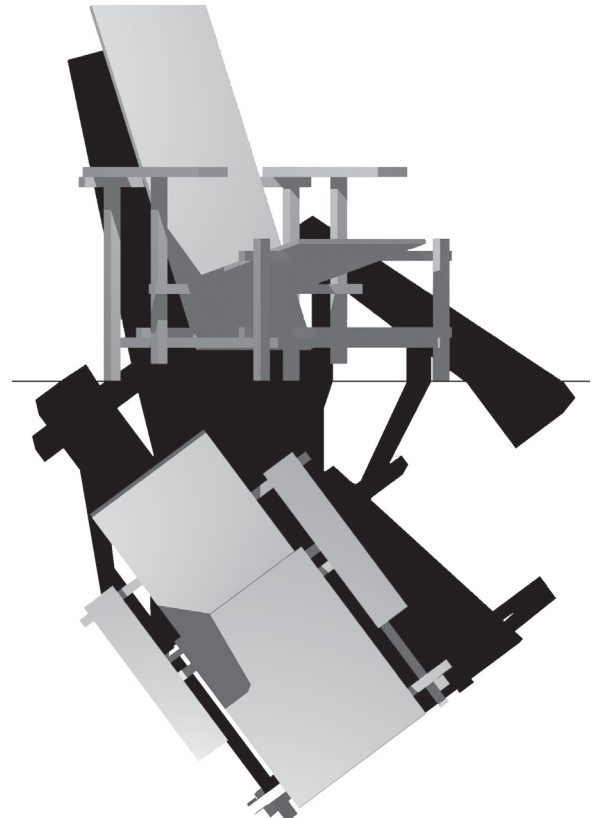
σχ. 1



· Φ''

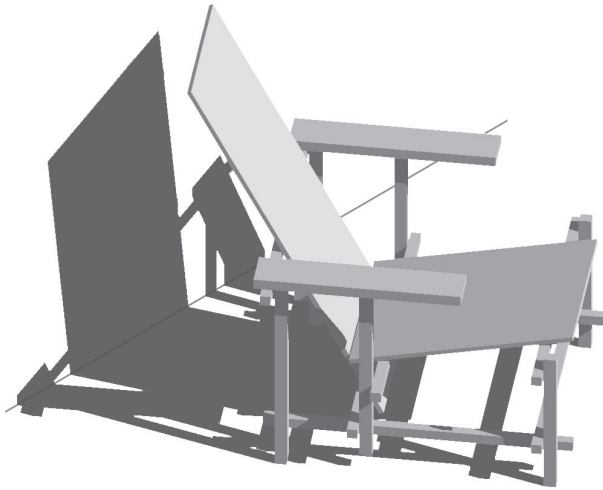


σχ. 2



σχ. 3

· Φ'



σχ. 4

φωτεινές ακτίνες τις προβολές στα επίπεδα Π_1 και Π_2 . Η πηγή φωτισμού μπορεί να είναι δύο ειδών:

α) παράλληλη (ηλιακή) δέσμη φωτός (σχ. 2) και

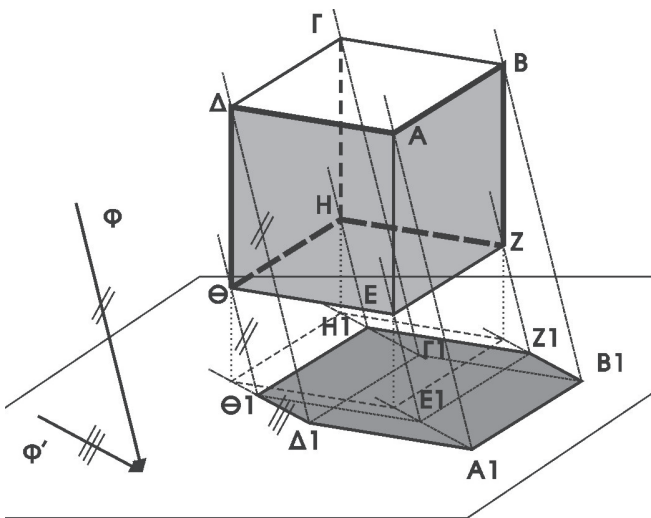
β) σημειακή πηγή φωτισμού (σχ. 3).

Στην πρώτη περίπτωση οι φωτεινές ακτίνες είναι παράλληλες μεταξύ τους και η πηγή φωτισμού είναι ο ήλιος, που θεωρούμε ότι βρίσκεται στο άπειρο. Εδώ λοιπόν ορίζουμε τη διεύθυνση του φωτός και εργαζόμαστε με τις δύο προβολές της. Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε ότι το φως ξεκινά από ένα σημείο του χώρου και διαχέεται σ' αυτόν σφαιρικά. Αρκεί επομένως να ορίσουμε τις προβολές της πηγής φωτισμού, μια και η διεύθυνση φωτισμού ποικίλει.

Τα στερεά σχήματα του χώρου όταν φωτίζονται δημιουργούν δύο ειδών σκιές: α) την ερριμμένη σκιά και β) την αυτοσκιά (σχ. 5).

Η ερριμμένη σκιά είναι η σκιά που δημιουργείται όταν ένα αντικείμενο σκιάζει ένα άλλο αντικείμενο: η σκιά του κοντινότερου προς το φως αντικειμένου που «πέφτει», «ρίχνεται» στο αντικείμενο που βρίσκεται μακρύτερα από τη φωτεινή πηγή. Η αυτοσκιά είναι η σκιά των επιφανειών ενός αντικειμένου που δημιουργείται εξ' αιτίας της θέσης κάθε επιφάνειας ως προς το φως. Για να βρούμε την αυτοσκιά ενός αντικειμένου, αρκεί να γνωρίζουμε το περίγραμμα της ερριμμένης σκιάς του.

Στις σημειώσεις αυτές θα μελετηθεί η μέθοδος σκιαγραφίας με ηλιακό φωτισμό των αντικειμένων. Σημειώνεται όμως ότι η μεθοδολογία εφαρμόζεται και στην περίπτωση σημειακού φωτισμού, με τη διαφορά ότι οι προβολές των φωτεινών ακτίνων δεν θεωρούνται παράλληλες, αλλά συγκλίνουσες προς τις προβολές της φωτεινής πηγής.



σχ. 5 Κάθε σημείο του στερεού σχήματος ρίχνει τη σκιά του στο οριζόντιο επίπεδο. Ενώνοντας κατ' αντιστοιχία με το στερεό τις σκιές των σημείων, βρίσκουμε το γενικό περίγραμμα της σκιάς του στερεού, που είναι το $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$. Το όριο αυτό της ερριμμένης σκιάς δημιουργεί το περίγραμμα της αυτοσκιάς. Έτσι αναγνωρίζουμε ότι οι πλευρές $AD\Theta E$, $ABZE$ και $EZH\Theta$ είναι αυτοσκιασμένες

ΣΚΙΑΓΡΑΦΙΑ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ MONGE

Σκιά ευθυγράμμου τμήματος

Η σκιά βρίσκεται ολόκληρη στο επίπεδο Π_1

Έχοντας τις δύο προβολές του ευθυγράμμου τμήματος AB, ορίζουμε τη διεύθυνση φωτισμού, μέσω των δύο προβολών της ϕ' και ϕ'' στα επίπεδα Π_1 και Π_2 . Ζητούμε να βρούμε τη σκιά του AB στο επίπεδο Π_1 (σχ. 6).

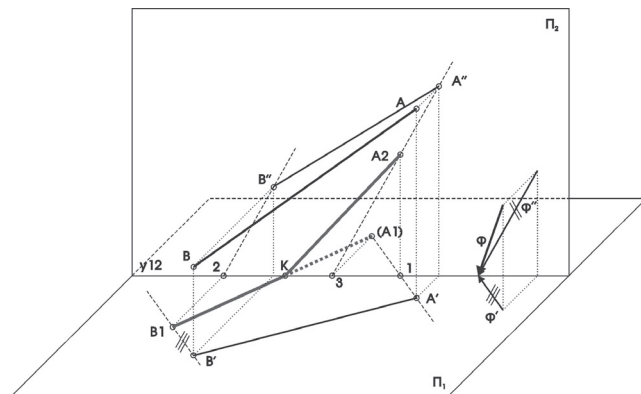
Από τα σημεία A'' και B'' φέρνουμε ευθείες παράλληλες στη δεύτερη προβολή της διεύθυνσης φωτισμού ϕ'' και ορίζουμε τα σημεία 1 και 2 (σχ. 7). Από τα σημεία A' και B' φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς την πρώτη προβολή της διεύθυνσης φωτισμού ϕ' . Από τα σημεία 1 και 2 φέρνουμε ευθείες κατακόρυφες, μέχρι να τμήσουν αντίστοιχα τις ϕ' από το A' και το B' και ορίζουμε τα σημεία A1 και B1, τα οποία είναι οι σκιές των A και B στο επίπεδο Π_1 .

Ενώνοντας τα σημεία A1 και B1, έχουμε τη σκιά του AB, ολόκληρη στο επίπεδο Π_1 .

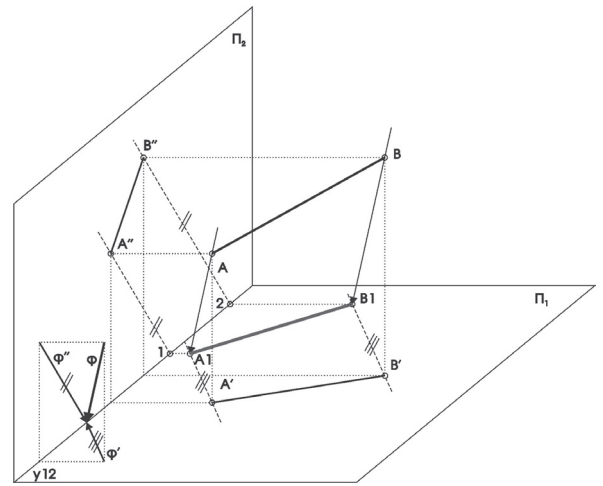
Η σκιά βρίσκεται και στα δύο επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, φέρνουμε από τα A'' και B'' ευθείες παράλληλες με τη δεύτερη προβολή ϕ'' της διεύθυνσης φωτισμού, μέχρι να τμήσουν τον άξονα $\gamma 12$ και ορίζουμε τα σημεία 1 και 2 (σχ. 8,9).

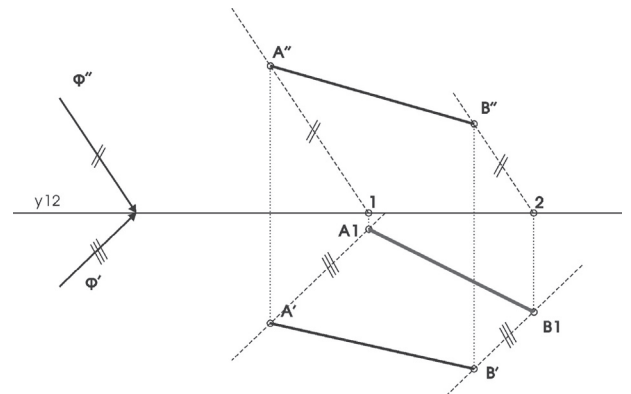
Φέρνοντας ευθείες κατακόρυφες από τα 1 και 2 μέχρι να τμηθούν οι παράλληλες με την πρώτη προβολή ϕ' της διεύθυνσης φωτισμού,



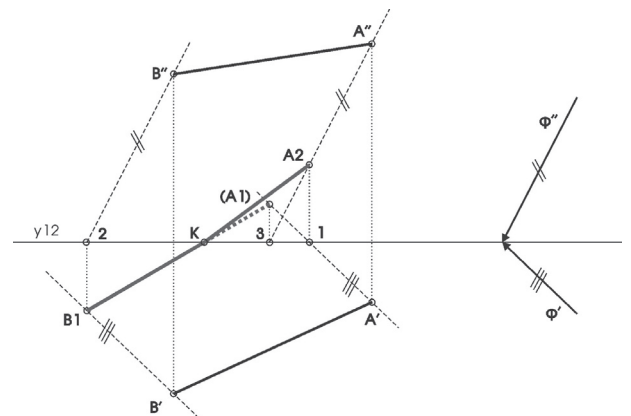
σχ. 8



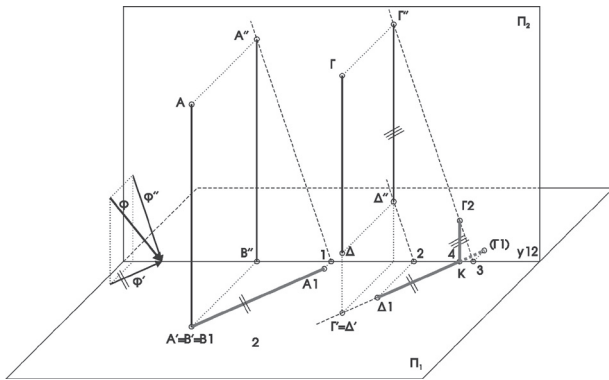
σχ. 6



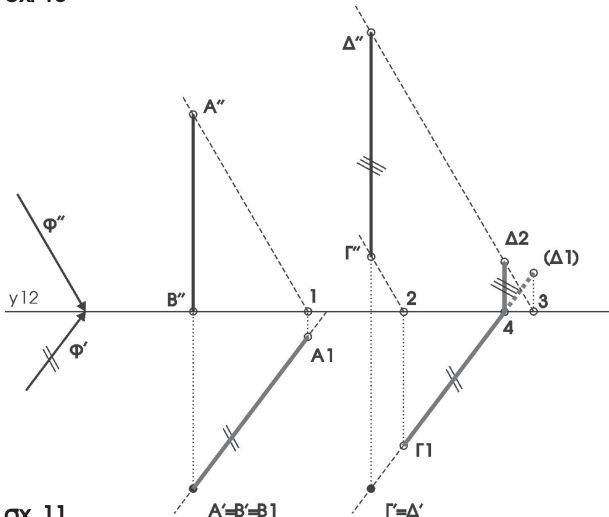
σχ. 7



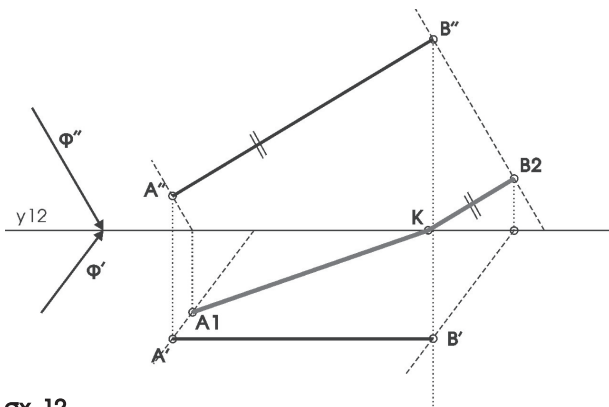
σχ. 9



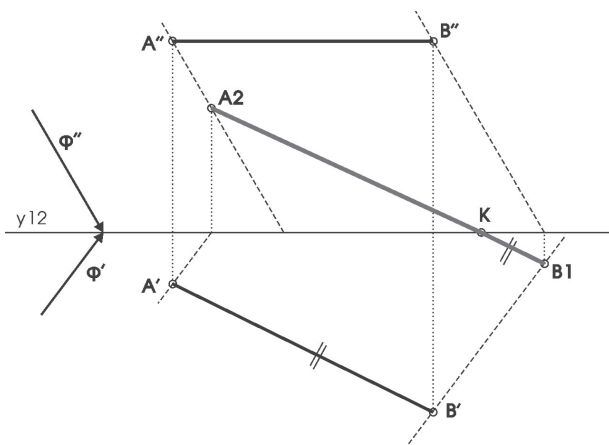
σχ. 10



σχ. 11



σχ. 12



σχ. 13

παρατηρούμε ότι το σημείο B1 βρίσκεται κάτω από τον άξονα γ_{12} , όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ενώ το σημείο A1 βρίσκεται πάνω από τον άξονα γ_{12} . Αυτό σημαίνει ότι στο χώρο το σημείο A1 βρίσκεται *πίσω* από το επίπεδο προβολής Π_2 (σχ. 8). Επομένως καταλαβαίνουμε ότι η σκιά του σημείου A δεν βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο Π_1 , αλλά στο κατακόρυφο επίπεδο προβολής Π_2 . Το σημείο A1 ονομάζεται **ψεύτικη σκιά** του σημείου A και σημειώνεται σε παρένθεση. Για να βρούμε τη σκιά του σημείου A φέρνουμε από το σημείο 3 -που είναι το σημείο τομής της ϕ' από το A' και του άξονα γ_{12} - ευθεία κατακόρυφη μέχρι να τμηθεί η ϕ'' από το σημείο A''. Το σημείο A2 είναι η πραγματική σκιά του σημείου A, στο επίπεδο προβολής Π_2 .

Η σκιά του τμήματος AB βρίσκεται δηλαδή κατά ένα μέρος πάνω στο επίπεδο Π_1 και κατά το υπόλοιπο μέρος στο επίπεδο Π_2 . Με άλλα λόγια, η σκιά του AB «σπάει», κάνει καμπή σε κάποιο κοινό σημείο των Π_1 και Π_2 .

Για να βρούμε το σημείο καμπής της σκιάς του AB, ενώνουμε τα σημεία (A1) και B1. Το τμήμα (A1)B1 τέμνει τον άξονα γ_{12} στο σημείο K, που είναι το ζητούμενο σημείο. Τέλος ενώνουμε τα σημεία K και A2.

Σκιά κατακόρυφου ευθυγράμμου τμήματος

Εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, φέρνοντας από τις προβολές των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος ευθείες παράλληλες προς τις διευθύνσεις ϕ' και ϕ'' κατ' αντιστοιχία (σχ. 10). Παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει πρώτο ίχνος το ίδιο το σημείο B, δηλαδή το AB «αγγίζει» το επίπεδο Π_1 (σχ. 11). Στην περίπτωση αυτή η σκιά B1 του σημείου B είναι το ίδιο το σημείο B. Παρατηρούμε ακόμη ότι η σκιά A1B1 του AB είναι παράλληλη προς τη ϕ' .

Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ δεν «αγγίζει» το επίπεδο Π_1 , διότι η 2^η προβολή Γ'' του σημείου Γ δεν είναι σημείο του άξονα γ_{12} . Η σκιά Γ1 του σημείου Γ βρίσκεται στην τομή της ϕ' από το σημείο Γ' και της κατακόρυφης από το σημείο 2 του άξονα γ_{12} , που προκύπτει όταν από το Γ'' φέρουμε ευθεία

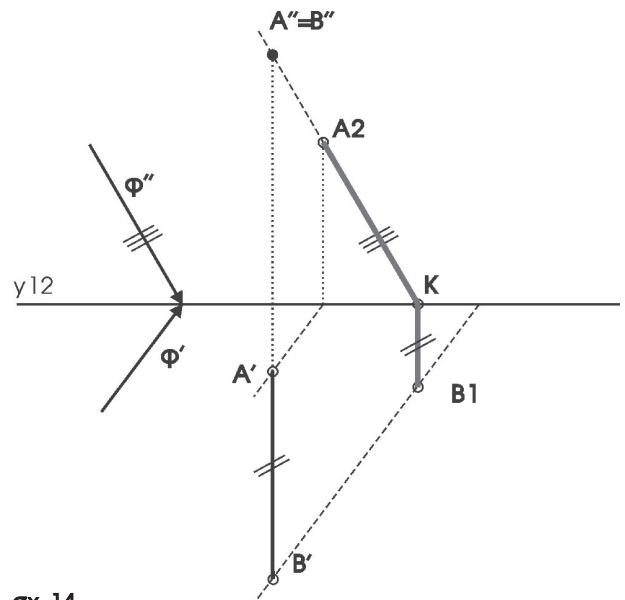
παράλληλη στη ϕ'' . Η σκιά του σημείου Δ βρίσκεται στο επίπεδο Π_2 . Όπως και προηγουμένως, βρίσκουμε την ψεύτικη σκιά ($\Delta 1$) του Δ, ενώνουμε με το Γ1, βρίσκουμε το σημείο καμπής Κ της σκιάς και τέλος ενώνουμε το Κ με την πραγματική σκιά Δ2 του Δ. Παρατηρούμε ότι το τμήμα ΚΔ2 είναι κατακόρυφο, παράλληλο στη 2^η προβολή $\Gamma''\Delta''$ της ΓΔ.

Γενικεύοντας:

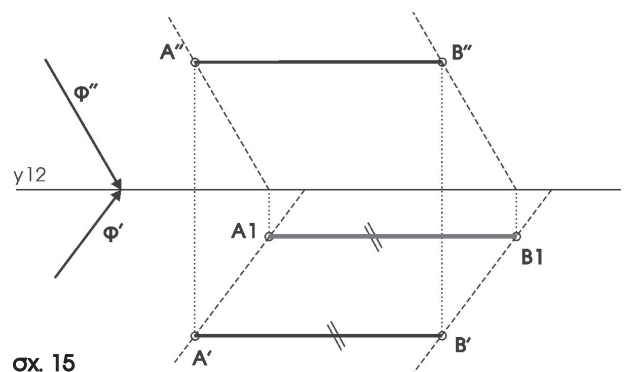
1. Η σκιά στο Π_2 μετωπικής ευθείας είναι ευθεία παράλληλη προς τη 2^η προβολή της ευθείας (σχ. 12).
2. Η σκιά στο Π_1 οριζόντιας ευθείας είναι ευθεία παράλληλη προς την 1^η προβολή της ευθείας (σχ. 13).
3. Η σκιά στο Π_1 κατακόρυφης ευθείας είναι ευθεία παράλληλη στην 1^η προβολή ϕ' της διεύθυνσης φωτισμού και στο Π_2 είναι ευθεία κατακόρυφη (σχ. 11).
4. Η σκιά στο Π_1 πρόσθιας ευθείας είναι ευθεία παράλληλη στην 1^η προβολή της και στο Π_2 είναι ευθεία παράλληλη στη 2^η προβολή της διεύθυνσης φωτισμού (σχ. 14).
5. Η σκιά ευθείας παράλληλης στον άξονα $\gamma 12$ είναι και στα δύο επίπεδα Π_1 και Π_2 ευθεία παράλληλη και ίση με την 1^η ή 2^η προβολή της (σχ. 15).

Σκιά επιπέδου σχήματος

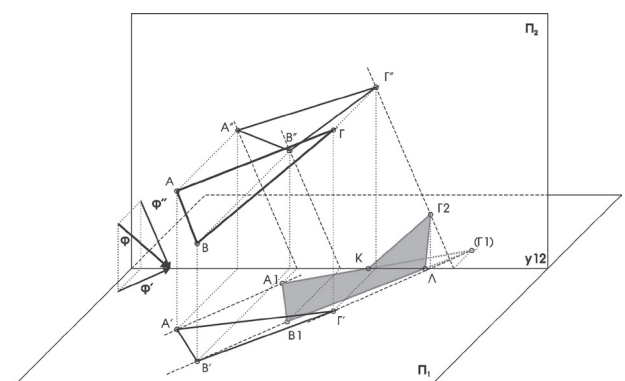
Αρχικά προσδιορίζουμε τις σκιές των σημείων του τριγώνου ΑΒΓ: από κάθε μία από τις προβολές του τριγώνου στα επίπεδα Π_1 και Π_2 φέρνουμε αντίστοιχα ευθείες παράλληλες στις προβολές της διεύθυνσης του φωτός (σχ. 16, 17). Η κορυφή Γ βλέπουμε ότι έχει σκιά Γ2 στο επίπεδο Π_2 , επομένως χρειαζόμαστε την ψεύτικη σκιά (Γ1) του Γ στο πρώτο επίπεδο προβολής Π_1 . Ενώνουμε τις σκιές των κορυφών Α1(Γ1) και Β1(Γ1). Οι ευθείες ορίζουν στον άξονα $\gamma 12$ τα σημεία καμπής Κ και Λ, τα σημεία δηλαδή όπου η σκιά του τριγώνου «σπάει» και μετατοπίζεται από το οριζόντιο, στο κατακόρυφο επίπεδο προβολής. Τέλος ενώνουμε τα σημεία ΚΓ2 και ΛΓ2. Το περίγραμμα της σκιάς του τριγώνου ΑΒΓ είναι το σχήμα Α1Β1ΛΓ2Κ.



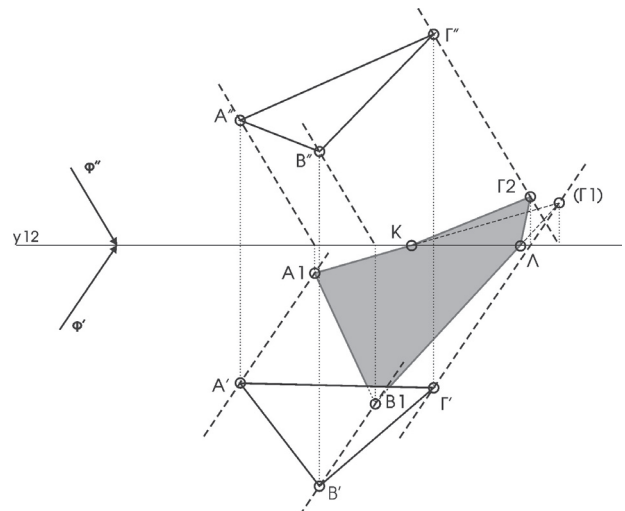
σχ. 14



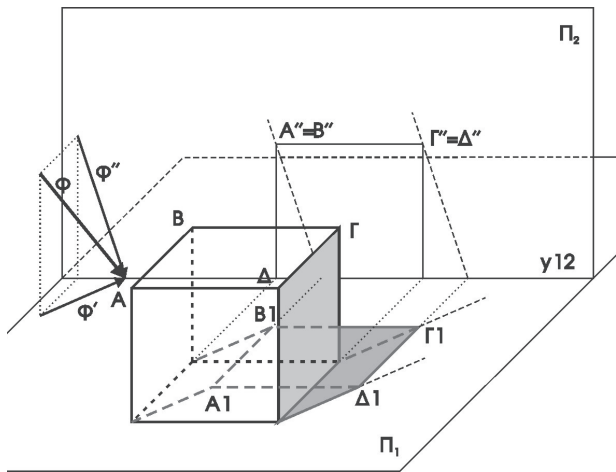
σχ. 15



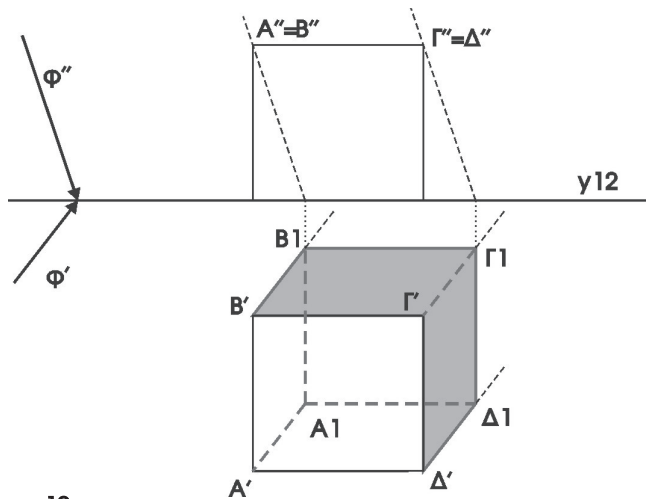
σχ. 16



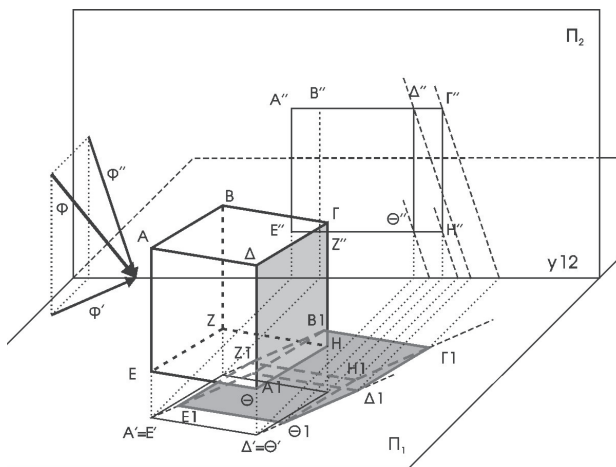
σχ. 17



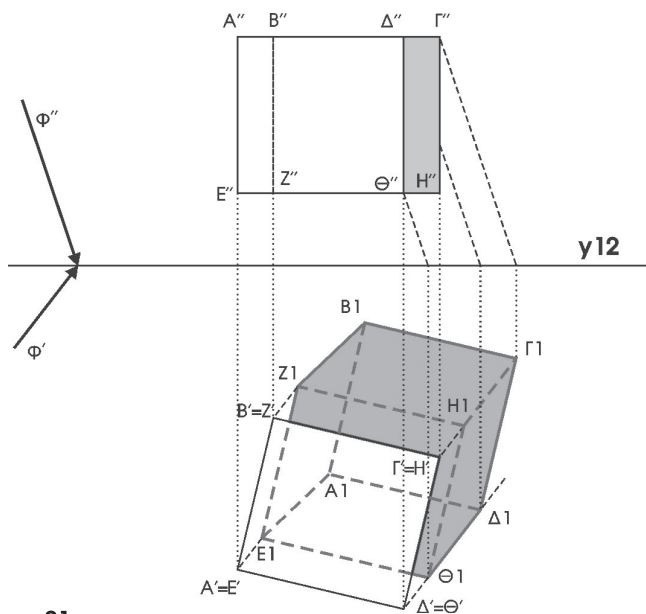
σχ. 18



σχ. 19



σχ. 20

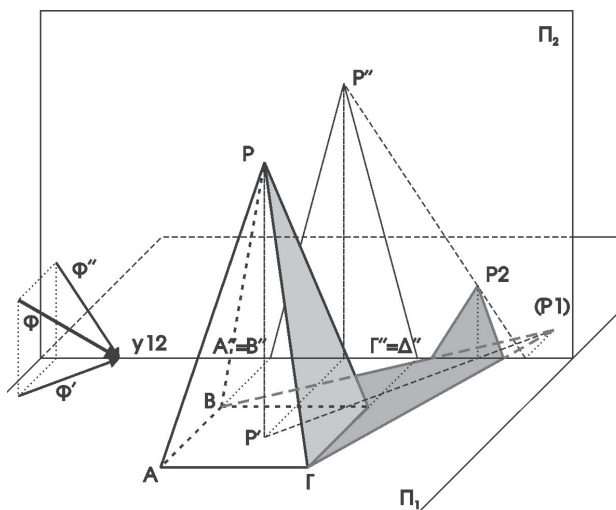


σχ. 21

Σκιές πολυέδρων

Για να βρούμε τη σκιά ενός πολυέδρου σχήματος, εργαζόμαστε βρίσκοντας τις σκιές των κορυφών του. Στο σχήμα 18 ο κύβος εδράζεται στο επίπεδο Π_1 , επομένως η σκιά της κάτω βάσης του ταυτίζεται με την ίδια την κάτω βάση του κύβου. Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη σκιά $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ της άνω βάσης $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 19) και να ενώσουμε με τα σημεία της πρώτης προβολής του κύβου. Στο σχήμα 20 ο κύβος βρίσκεται ψηλότερα από το επίπεδο Π_1 και είναι απαραίτητο να βρεθεί η σκιά τόσο της άνω, όσο και της κάτω βάσης του. Κατόπιν ενώνουμε τις σκιές των σημείων της άνω βάσης με τις σκιές των σημείων της κάτω βάσης.

Στην πυραμίδα του σχήματος 22 η σκιά της κορυφής της P βρίσκεται στο 2^ο επίπεδο προβολής Π_2 οπότε



σχ. 22

εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας την ψεύτικη σκιά (P1) (σχ. 23).

Γνωρίζοντας το περίγραμμα της ερριμμένης σκιάς ενός στερεού, μπορούμε να βρούμε το περίγραμμα της αυτοσκιάς του, δηλαδή ποιες πλευρές του στερεού δεν φωτίζονται. Το όριο της ερριμμένης σκιάς πάνω στα επίπεδα στα οποία αυτή εμφανίζεται, ορίζει το περίγραμμα της αυτοσκιάς πάνω στις πλευρές του ίδιου του στερεού.

Σκιές ευθυγράμμων τμημάτων σε έδρες πολυέδρων

1. Το τμήμα AB είναι κατακόρυφο

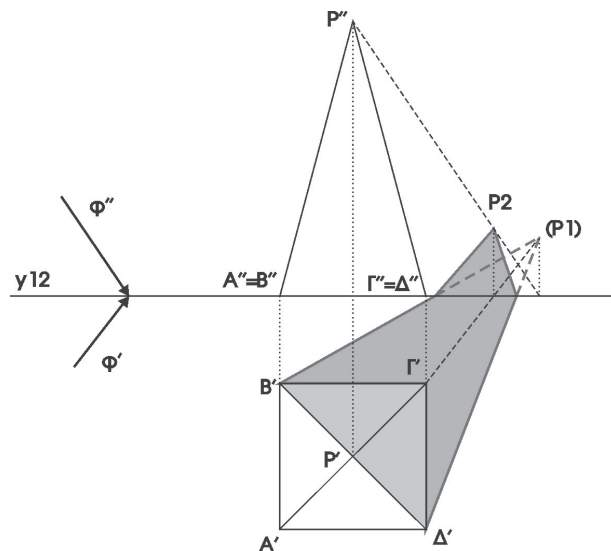
Στο σχήμα 24 το ευθύγραμμο τμήμα είναι κατακόρυφο και ο κύβος που βρίσκεται πίσω του έχει τις έδρες του παράλληλες στα επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2 . Σύμφωνα με την πρόταση 3 (σελ. 159) το τμήμα της σκιάς της AB που βρίσκεται στο Π_1 είναι παράλληλο με την ϕ' και το τμήμα της σκιάς της AB που βρίσκεται στο Π_2 ή σε οποιοδήποτε επίπεδο παράλληλο στο Π_2 , είναι ευθεία παράλληλη με τη 2^η προβολή του AB.

Το σημείο A' είναι σημείο του επιπέδου Π_1 , επομένως έχει σκιά τον εαυτό του (σχ. 24). Από το σημείο B' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη ϕ' και από το σημείο B'' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη ϕ'' . Το σημείο που η ϕ' από το B' συναντά την μπροστινή κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι το σημείο καμπής K' (σχ. 25). Φέρνοντας κατακόρυφη ευθεία, ορίζουμε τη 2^η προβολή K'' του σημείου K στον άξονα $y12$ και από το σημείο K'' συνεχίζουμε κατακόρυφα (παράλληλα στην A'B''), μέχρι η κατακόρυφη από το K'' να τμήσει την ϕ'' από το B''. Μ' αυτό τον τρόπο ορίζουμε το σημείο B2, που είναι η σκιά του B στην έδρα του κύβου.

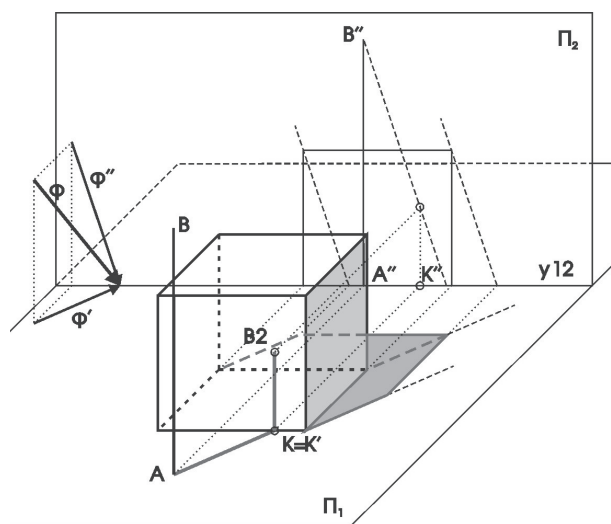
2 Το τμήμα AB είναι πλάγιο

Στην περίπτωση αυτή το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι σε τυχαία θέση ως προς τον κύβο (σχ. 26). Το σημείο A του τμήματος AB βρίσκεται πάνω στο επίπεδο Π_1 και επομένως έχει σκιά τον εαυτό του.

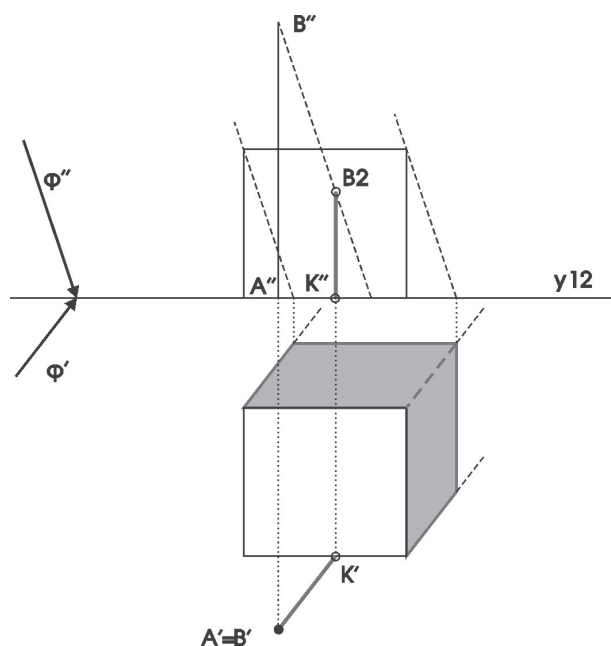
Από τα σημεία B' και B'' φέρνουμε ευθείες



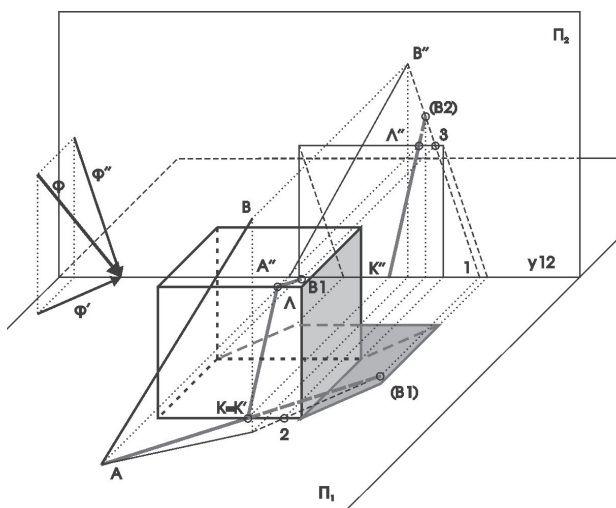
σχ. 23



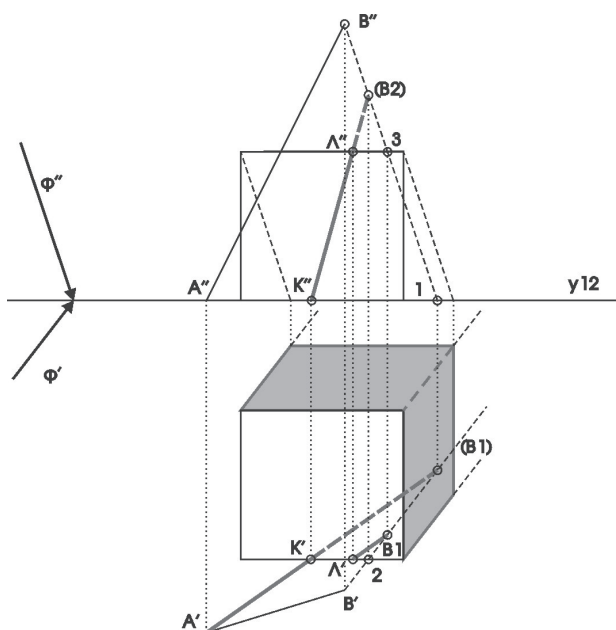
σχ. 24



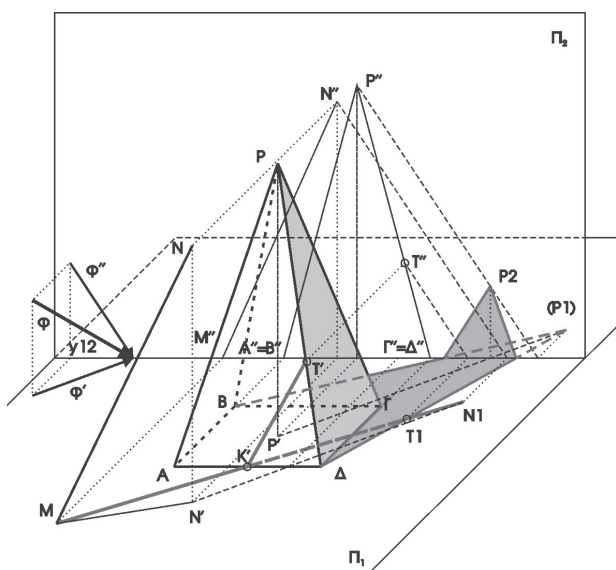
σχ. 25



σχ. 26



σχ. 27



σχ. 28

παράλληλες στις ϕ' και ϕ'' αντίστοιχα. Από το σημείο 1 (σχ. 27) φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη και ορίζουμε το σημείο (B1), τη σκιά του B στο επίπεδο Π_1 , που όμως βρίσκεται μέσα στον όγκο της σκιάς του κύβου και γι' αυτό είναι *ψεύτικη σκιά* του B.

Ενώνουμε τα σημεία A' και (B1). Η ευθεία αυτή τέμνει τον κύβο στο σημείο K' . Το τμήμα $A'K'$ είναι ένα πραγματικό τμήμα της σκιάς του AB στο επίπεδο Π_1 . Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, φέρνουμε από το K' ευθεία κατακόρυφη και ορίζουμε στον άξονα γ_{12} τη 2^η προβολή K'' του σημείου K. Στο σημείο K η σκιά του AB κάνει μία καμπή, παύει να εμφανίζεται στο επίπεδο Π_1 και συνεχίζει στην μπροστινή κατακόρυφη έδρα του κύβου.

Φέρνοντας την παράλληλη στη ϕ' από το B' , ορίζουμε το σημείο 2, στην τομή με την οριζόντια ακμή του κύβου. Από το σημείο 2 φέρνουμε κατακόρυφη μέχρι να τμήσει τη ϕ'' από το B'' . Το σημείο αυτό είναι ψεύτικη σκιά του B στην κατακόρυφη έδρα του κύβου, διότι η έδρα του κύβου δεν είναι αρκετά μεγάλη ώστε το (B2) να βρεθεί μέσα στην περίμετρό της. Ενώνουμε παρόλ' αυτά τα σημεία K'' και (B2) και βρίσκουμε ένα δεύτερο τμήμα της σκιάς του AB, αυτή τη φορά στην μπροστινή κατακόρυφη έδρα του κύβου. Η ευθεία $K''(B2)$ τέμνει την επάνω οριζόντια ακμή του κύβου στο σημείο Λ'' . Ορίζουμε την 1^η προβολή Λ' του σημείου Λ πάνω στην 1^η προβολή της επάνω οριζόντιας ακμής του κύβου. Από το σημείο 3 -που είναι η τομή της ϕ'' από το B'' με την οριζόντια ακμή του κύβου- φέρνουμε κατακόρυφη, μέχρι να τμήσουμε την ϕ' από το B' . Το σημείο B1 είναι η πραγματική σκιά του B στην άνω βάση του κύβου. Παρατηρούμε ότι το τμήμα $\Lambda'B1$ είναι παράλληλο με το τμήμα $A'K'$, μια και είναι τμήματα σκιάς της ίδιας ευθείας σε δύο παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα (στο Π_1 και στην άνω βάση του κύβου).

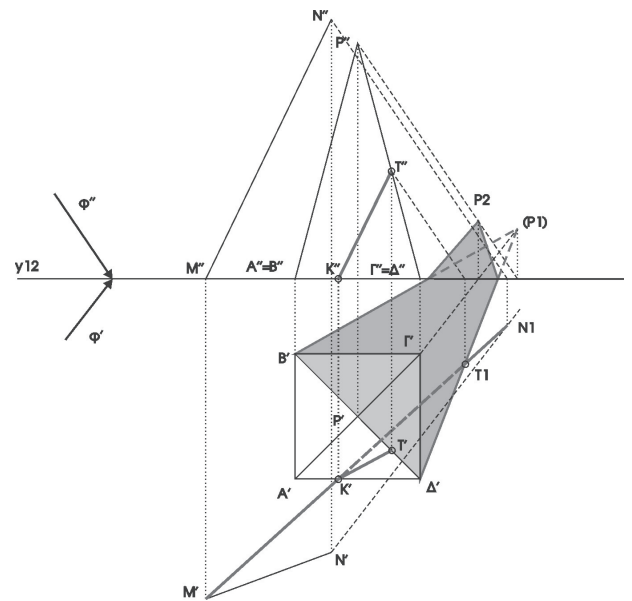
3 Σκιά πλάγιου τμήματος σε πλάγιο επίπεδο (μέθοδος επικάλυψης σκιών)

Στην περίπτωση κατά την οποία ένα ευθύγραμμο τμήμα MN ρίχνει τη σκιά του σε πλάγια έδρα πολυέδρου (σχ. 28), προσδιορίζουμε το τμήμα της σκιάς που βρίσκεται στην πλάγια έδρα μέσω της μεθόδου επικάλυψης σκιών.

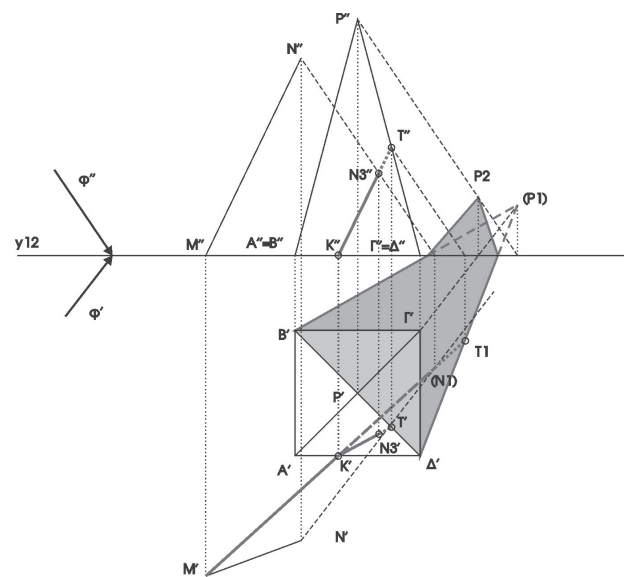
Εργαζόμαστε κατά τα μέχρι τώρα γνωστά για να προσδιορίσουμε τη σκιά του πολυέδρου και του τμήματος MN στο επίπεδο Π_1 . Το σημείο N1 (σχ. 29) είναι η σκιά του N στο Π_1 . Το σημείο M είναι σημείο του Π_1 , επομένως έχει σκιά τον εαυτό του. Ενώνουμε τα M' και N1 και παρατηρούμε ότι η σκιά της MN πέφτει κατά ένα τμήμα της στην εμπρός έδρα της πυραμίδας. Προσδιορίζουμε τα σημεία K' και K'', τις δύο προβολές του σημείου καμπής της σκιάς

Στην τομή της σκιάς της MN και της σκιάς μίας από τις ακμές της πυραμίδας, έστω της ΔΡ, ορίζουμε το σημείο T1, που ονομάζεται **σημείο επικάλυψης** (οι σκιές της MN και ΔΡ επικαλύπτονται στο σημείο T1). Με άλλα λόγια το σημείο T1 είναι η σκιά ενός σημείου T, που βρίσκεται τόσο στην ευθεία MN, όσο και στην ευθεία ΔΡ. Γνωρίζοντας τη σκιά T1 του σημείου, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις δύο προβολές του σημείου, ως εξής: από το T1 φέρνουμε κατακόρυφη μέχρι τον άξονα $\gamma 12$ και από εκεί φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη Φ'' έως ότου αυτή τμήσει τη $\Delta''P''$. Το σημείο τομής είναι η 2^η προβολή T'' του σημείου T. Γνωρίζοντας ότι το σημείο T είναι σημείο της ΔΡ, φέρνουμε από το T'' κατακόρυφη μέχρι να τμήσει την 1^η προβολή $\Delta'P'$ της ΔΡ και ορίζουμε την 1^η προβολή T' του σημείου T. Η ευθεία KT, με προβολές K'T' και K''T'' είναι το τμήμα της σκιάς της NM στην έδρα της πυραμίδας.

Στην περίπτωση κατά την οποία η σκιά του σημείου N βρίσκεται μέσα στον όγκο της σκιάς της πυραμίδας, εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, αλλά βρίσκουμε το σημείο επικάλυψης T1 στην *προέκταση* της σκιάς της MN στο Π_1 (σχ. 30).



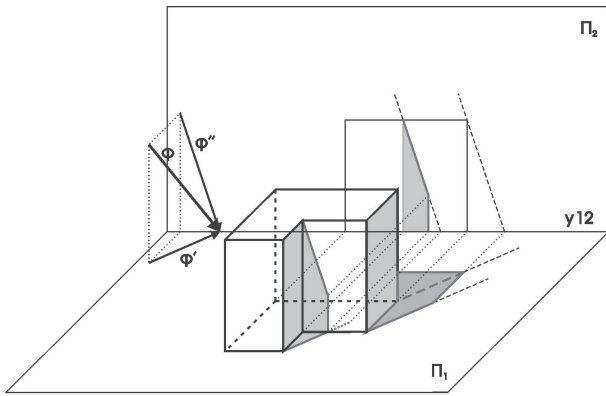
σχ. 29



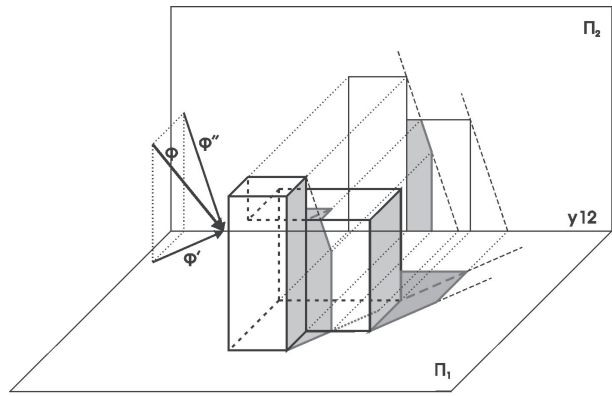
σχ. 30

Σκιές στερεών

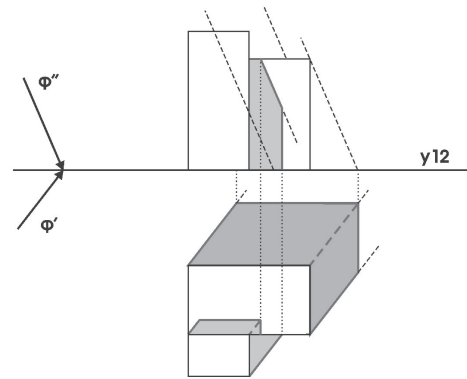
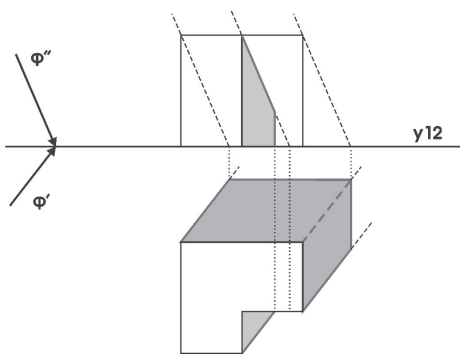
Τα στερεά σχήματα αντιμετωπίζονται σαν σύνθεση σημείων (κορυφών), ευθειών (ακμών) και επιφανειών (εδρών), στον προσδιορισμό της σκιάς τους, τόσο στα επίπεδα Π_1 και Π_2 όσο και για τον προσδιορισμό της σκιάς που ρίχνει το ένα στερεό στο άλλο.



σχ. 31



σχ. 32



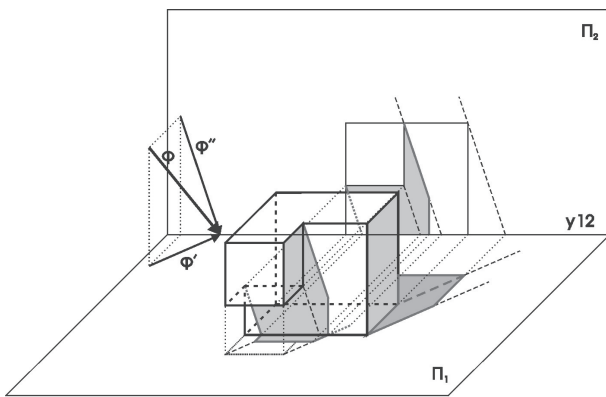
1. Σκιές πολυέδρων

Στα σχήματα 31 – 33 παρουσιάζονται οι σκιές δύο παραλληλεπιπέδων που σχηματίζουν σύνθετα στερεά σχήματα, σε αξονομετρική προβολή και ορθή προβολή.

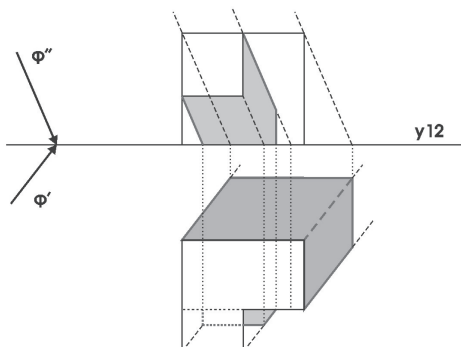
Στα σχήματα 34 και 35 παρουσιάζεται η σκιά μιας εξαγωνικής πυραμίδας. Παρατηρούμε ότι η μικρή αλλαγή της διεύθυνσης του φωτός (ϕ'') αλλάζει ριζικά τη σκιά της πυραμίδας, μια και στην πρώτη περίπτωση (σχ. 34) η ερριμμένη σκιά προέρχεται από δύο έδρες, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (σχ. 35) η ερριμμένη σκιά προέρχεται από τρεις έδρες της πυραμίδας.

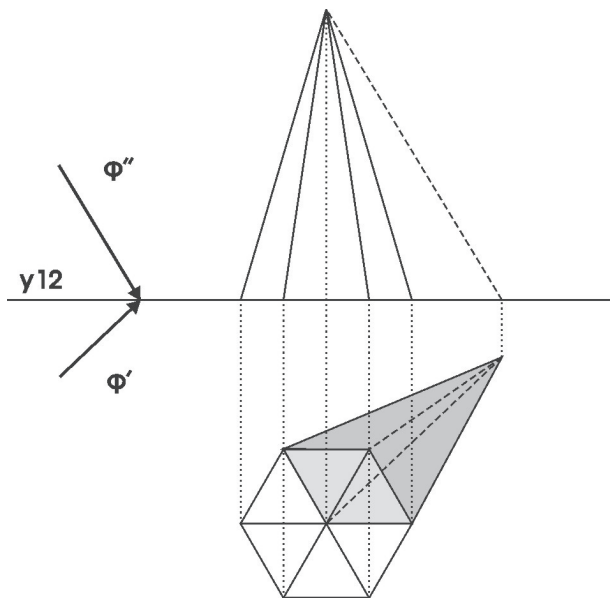
2 Σκιά κώνου

Ο κώνος είναι σχήμα εκ περιστροφής και δεν έχει ακμές. Οι ευθείες που ενώνουν ένα οποιοδήποτε σημείο της βάσης του με την κορυφή του, ονομάζονται γενέτειρες του κώνου, διότι η περιστροφή μιας οποιασδήποτε γενέτειρας γύρω από τον άξονα περιστροφής του κώνου δημιουργεί «γεννά» το στερεό.

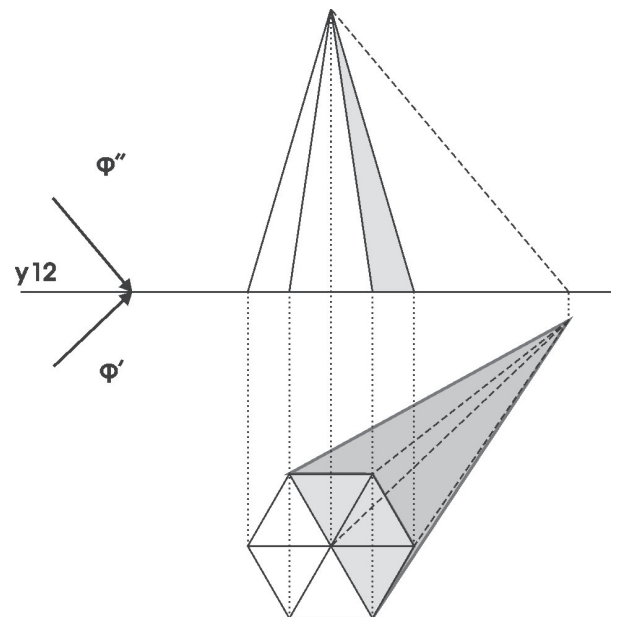


σχ. 33



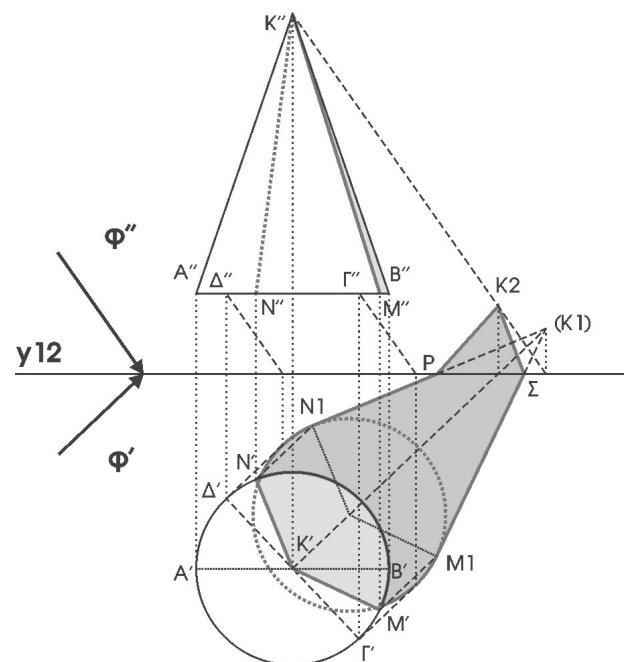


σχ. 34



σχ. 35

Η βάση του κώνου του σχήματος 36 είναι παράλληλη στο Π_1 , επομένως η σκιά της βάσης είναι κύκλος παράλληλος και ίσος στην ίδια τη βάση. Η θέση του κύκλου της σκιάς του κώνου προσδιορίζεται όταν φέρουμε στον κύκλο της βάσης τις παράλληλες στη Φ' εφαπτόμενες ευθείες. Στην 1^η προβολή ορίζονται τα σημεία Γ' και Δ' , των οποίων βρίσκουμε τη 2^η προβολή Γ'' και Δ'' στη 2^η προβολή της βάσης του κώνου. Η σκιά της κορυφής βρίσκεται στο επίπεδο Π_2 και είναι το σημείο $K2$. Βρίσκουμε την ψεύτικη σκιά ($K1$) της κορυφής του κώνου στο επίπεδο Π_1 , για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τις ακραίες φωτισμένες γενέτειρες από το σημείο ($K1$) φέρνουμε ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο της σκιάς της βάσης του κώνου¹ και ορίζουμε τα σημεία επαφής $M1$ και $N1$. Με ευθείες παράλληλες στη Φ' , βρίσκουμε στη βάση του κώνου τα σημεία $M(M', M'')$ και $N(N', N'')$. Τα σημεία αυτά είναι τα τελευταία σημεία της βάσης που φωτίζονται κι επομένως ορίζουν τις γενέτειρες KM και KN της αυτοσκιάς του κώνου. Το τμήμα KMN που «βλέπει» προς την ερριμμένη σκιά του κώνου είναι το σκοτεινό τμήμα του κώνου.

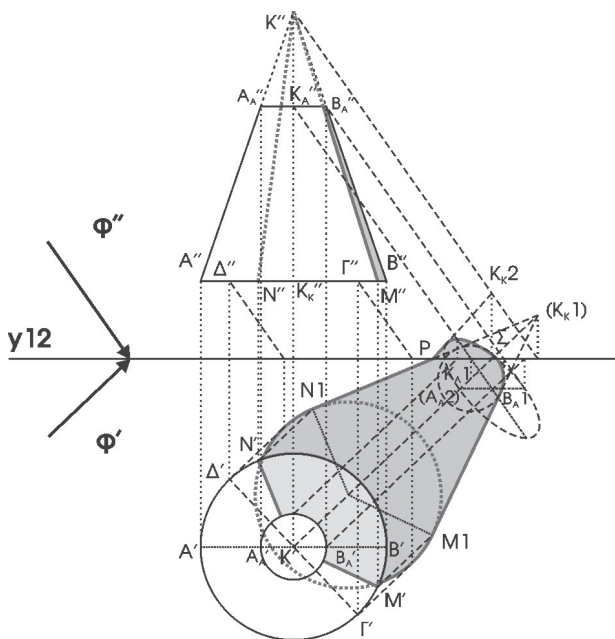


σχ. 36

3. Σκιά κόλουρου κώνου

Η σκιά κόλουρου κώνου παράγεται με τον ίδιο τρόπο, όπως και η σκιά κώνου. Προσδιορίζουμε

1. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 5



σχ. 37

αρχικά τις σκιές της άνω και κάτω βάσης του κώνου (σχ. 37) και κατόπιν φέρνουμε τις κοινές εφαπτόμενες των δύο κωνικών.

Στην περίπτωση που οι κωνικές δεν είναι ομοιογενείς (π.χ. δύο κύκλοι) τότε ο προσδιορισμός της κοινής εφαπτόμενης είναι αρκετά περίπλοκο γεωμετρικό πρόβλημα. Προτιμούμε λοιπόν να προσδιορίσουμε τη σκιά της νοητής κορυφής του κώνου και να εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τον προσδιορισμό και της αυτοσκιάς του κώνου.

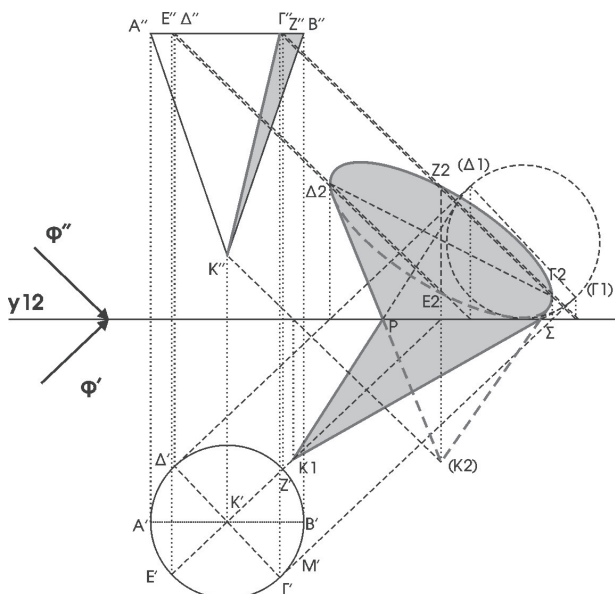
4 Σκιά ανάστροφου κώνου

Η σκιαγραφία ανάστροφου κώνου δεν έχει καμία διαφορά από εκείνη τη σκιαγραφία κώνου ορθής θέσης. Προσδιορίζουμε τη σκιά της κορυφής και της βάσης του κώνου. Στο σχήμα 38 η σκιά της βάσης βρίσκεται ολόκληρη στο επίπεδο Π_2 ενώ η σκιά της κορυφής βρίσκεται στο Π_1 .

Προσδιορίζουμε τη σκιά της βάσης στο επίπεδο Π_1 για να καταστεί δυνατό να ορίσουμε τις σκιές των ακραίων γενετειρών κι επομένως τα σημεία καμπής P και Σ. Βρίσκουμε τις σκιές των διαμέτρων ΓΔ και ΕΖ, που σε 1^η προβολή είναι ψεύτικες και χαράσσουμε κύκλο ίσο με τη βάση του κώνου. Κατόπιν φέρνουμε τις εφαπτόμενες προς τον κύκλο της ψεύτικης σκιάς της βάσης του κώνου, από την πραγματική σκιά της κορυφής K1. Στην τομή των εφαπτομένων με τον άξονα $\gamma 12$ ορίζονται τα σημεία καμπής P και Σ.

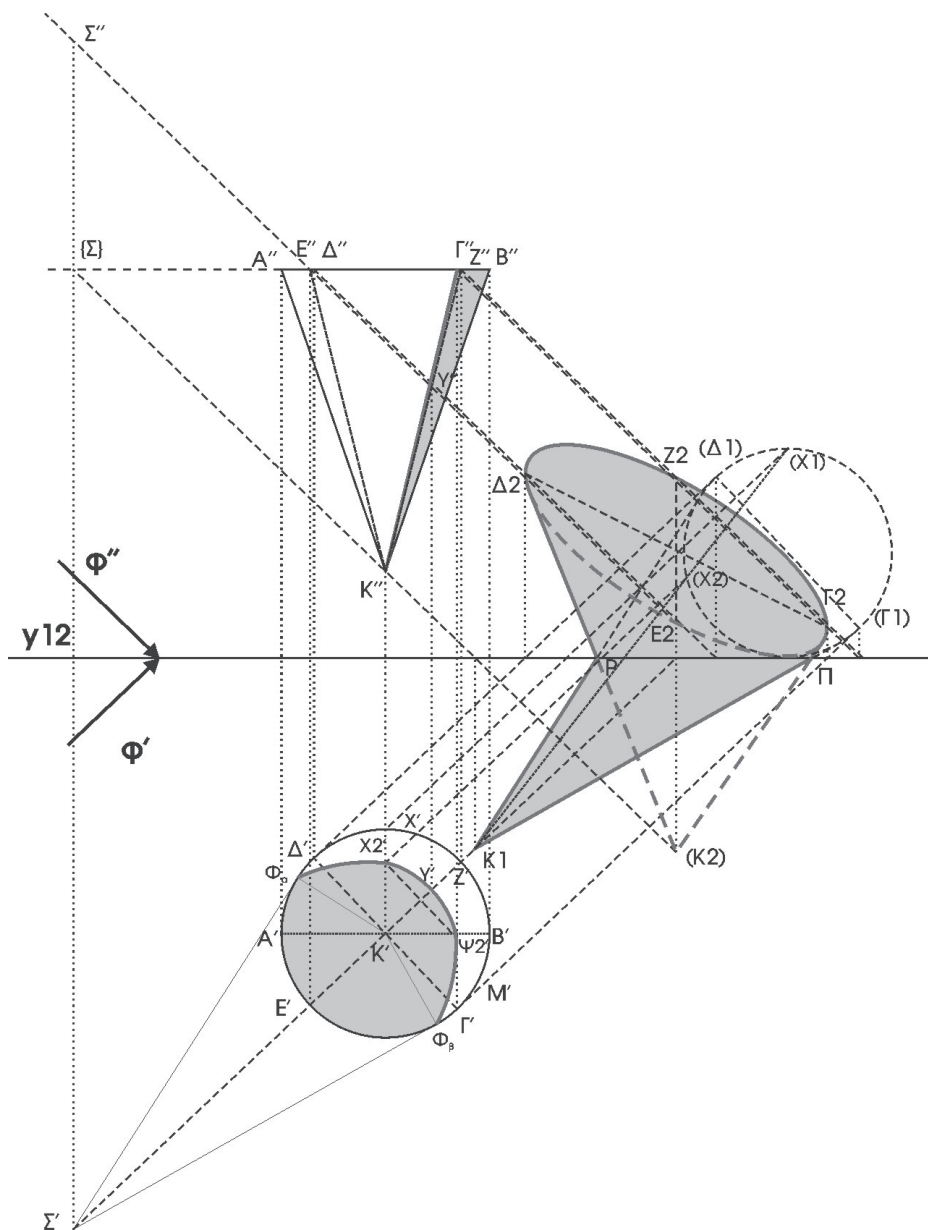
Βρίσκουμε τη σκιά του κύκλου της βάσης στο επίπεδο Π_2 χρησιμοποιώντας τις ίδιες διαμέτρους ΓΔ και ΕΖ, που δημιουργούν συζυγείς διαμέτρους της έλλειψης, η οποία αποτελεί τη σκιά της βάσης του κώνου στο Π_2 . Προσδιορίζουμε την έλλειψη με κατασκευή Rytz και βρίσκουμε την ψεύτικη σκιά (K2) της κορυφής του κώνου στο Π_2 . Από το (K2) φέρνουμε τις εφαπτόμενες στην έλλειψη².

Στην περίπτωση που ο ανάστροφος κώνος αποτελεί ανοιχτή επιφάνεια, δημιουργείται ερριμμένη σκιά στην εσωτερική παρειά της επιφάνειάς του. Δημιουργείται έτσι μια καμπύλη από τμήμα του κύκλου της βάσης, σε τμήμα της εσωτερικής παρειάς της επιφάνειας του κώνου (σχ. 39).



σχ. 38

Ο προσδιορισμός των σημείων τομής Φ_α και Φ_β της καμπύλης της εσωτερικής σκιάς με τη βάση του κώνου γίνεται μέσω του βοηθητικού σημείου Σ . Το σημείο $E(E', E'')$ βρίσκεται στην τομή του κύκλου της βάσης του κώνου με τη διεύθυνση των φωτεινών ακτινών και είναι το *ακρότατο* σημείο της βάσης του κώνου, που θα δημιουργήσει επίσης *ακρότατο* σημείο της καμπύλης της εσωτερικής σκιάς. Από τις προβολές του E φέρνουμε ευθείες παράλληλες στις προβολές της διεύθυνσης φωτισμού. Επίσης φέρνουμε από το K''' ευθεία παράλληλη στη διεύθυνση φ'' και προεκτείνουμε τη 2^η προβολή της ευθείας της βάσης του κώνου $A''B''$. Στην τομή της βρίσκεται το φαινόμενο σημείο $\{\Sigma\}$. Από το $\{\Sigma\}$ βρίσκουμε τις προβολές Σ' και Σ'' του Σ στη



σχ. 39

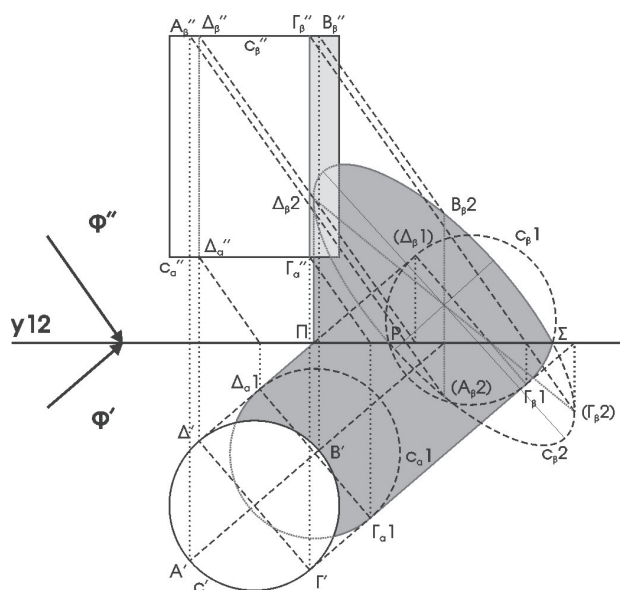
φωτεινή ακτίνα που περνά από το Ε. Το σημείο Σ είναι χαρακτηριστικό, διότι από αυτό το σημείο περνούν οι φωτεινές ακτίνες, που προσδιορίζουν τα ακρότατα Φ_α και Φ_β , εάν από το Σ' φέρουμε εφαπτόμενες στη βάση του κώνου.

Το σημείο Ε δημιουργεί σκιά στην αντιδιαμετρική γενέτειρα ΚΖ του κώνου. Ορίζουμε τις δύο προβολές Κ'Ζ' και Κ''Ζ'' της ΚΖ και βρίσκουμε το Υ''' στην τομή της Κ'Ζ' με την Σ'Ε''. Βρίσκουμε την 1^η προβολή Υ' του Υ στην Ε'Ζ'. Η καμπύλη της σκιάς διέρχεται από τα Φ_α , Υ' και Φ_β . Μπορούμε να προσδιορίσουμε όσα σημεία της καμπύλης εσωτερικής σκιάς επιθυμούμε, με τη μέθοδο επικάλυψης σκιών. Για παράδειγμα για να προσδιορίσουμε το σημείο Χ2 στη γενέτειρα ΚΧ, βρίσκουμε τη σκιά Κ1(Χ1) της ΚΧ στο επίπεδο Π_1 . Η τομή της Κ1(Χ1) με τη σκιά του κύκλου της βάσης, θα δώσει δεύτερο σημείο σκιάς, το (Χ2), το οποίο μεταφέρουμε στην Κ'Χ' και ορίζουμε το Χ2.

5. Σκιά κυλίνδρου

Ο κύλινδρος αντιμετωπίζεται γενικά με τον ίδιο τρόπο όπως ο κώνος, μια και θεωρείται κι αυτός κώνος με την κορυφή του στο άπειρο.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, προσδιορίζουμε τις σκιές $c_\alpha 1$ και $c_\beta 1$ της κάτω και άνω βάσης c_α και c_β αντίστοιχα (σχ. 40). Οι ακραίες φωτεινές γενέτειρες του κυλίνδρου είναι οι κοινές εφαπτόμενες $\Gamma_\alpha 1$ $\Gamma_\beta 1$ και $\Delta_\alpha 1$ ($\Delta_\beta 1$), οι οποίες είναι παράλληλες στη διεύθυνση Φ' , διότι είναι σκιές κατακορύφων ευθειών. Παρατηρούμε ότι η σκιά $c_\beta 1$ της άνω βάσης του κυλίνδρου δε βρίσκεται ολόκληρη στο επίπεδο Π_1 , γεγονός που μας υποχρεώνει να βρούμε τη σκιά της άνω βάσης και στο επίπεδο Π_2 . Τα σημεία A_β , B_β και Γ_β , Δ_β δημιουργούν δύο κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους στον κύκλο της άνω βάσης και έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί η σκιά της άνω βάσης στο επίπεδο Π_1 . Οι σκιές των τεσσάρων αυτών σημείων στο επίπεδο Π_2 μας δίνουν διαμέτρους της καμπύλης της σκιάς της άνω βάσης του κυλίνδρου στο Π_2 . Η καμπύλη είναι έλλειψη, τα δε ευθύγραμμα τμήματα $(A_\beta 2)B_\beta 2$ και $(\Gamma_\beta 2)\Delta_\beta 2$ είναι συζυγείς διάμετροί της. Μέσω της κατασκευής Rytz³ προσδιορίζουμε την έλλειψη $c_\beta 2$, τη σκιά δηλαδή της άνω βάσης του κυλίνδρου στο επίπεδο Π_2 . Τα σημεία Ρ και Σ



σχ. 40

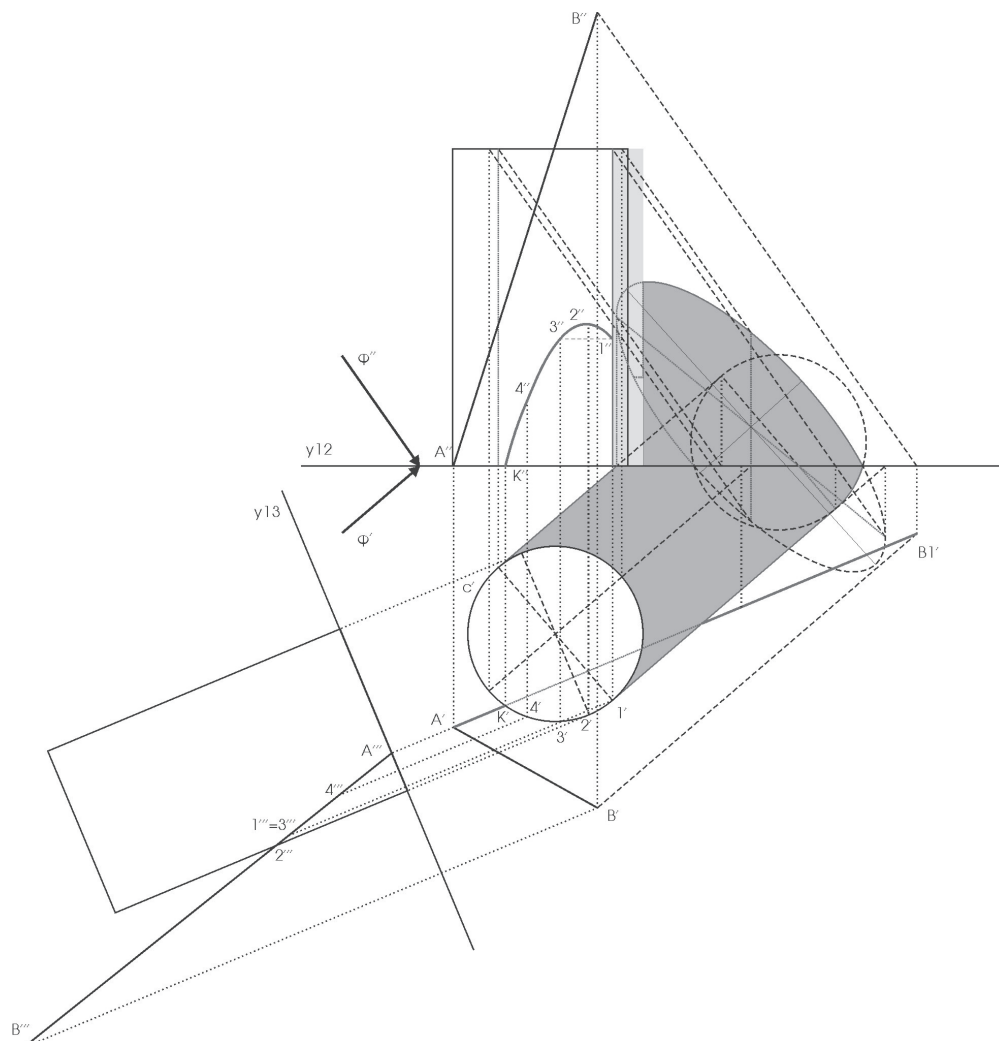
3. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 26

του άξονα γ_{12} είναι τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων $c_{\beta 1}$ και $c_{\beta 2}$, τα σημεία καμπής της σκιάς της άνω βάσης. Η σκιά τέλος της γενέτειρας $\Delta_{\alpha}\Delta_{\beta}$ παρουσιάζει επίσης καμπή στο σημείο Π του άξονα γ_{12} και μετατρέπεται σε κατακόρυφη εφαπτόμενη της έλλειψης $c_{\beta 2}$.

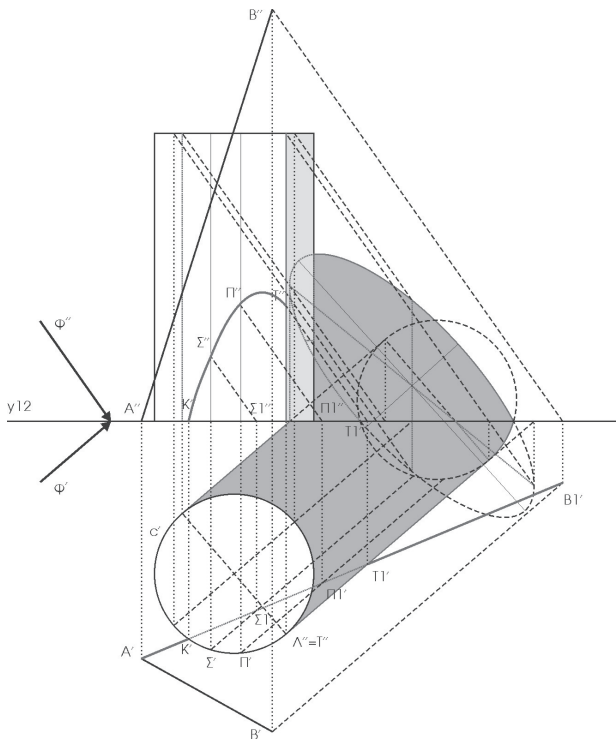
Η αυτοσκιά του κυλίνδρου ορίζεται από τις ακραίες γενέτειρες $\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta}$ και $\Delta_{\alpha}\Delta_{\beta}$. Το αυτοσκιασμένο τμήμα του κυλίνδρου είναι αυτό που «βλέπει» προς την ερριμμένη σκιά του.

6. Σκιά ευθυγράμμου τμήματος σε κώνο ή κύλινδρο

Προσδιορίζουμε τις σκιές του κυλίνδρου και του ευθυγράμμου τμήματος AB , σύμφωνα με τα μέχρι τώρα γνωστά. Παρατηρούμε ότι ένα τμήμα της σκιάς του AB θα βρεθεί στην επιφάνεια του κυλίνδρου (σχ. 41). Στη γενική περίπτωση το τμήμα



σχ. 41



σχ. 42

αυτό είναι τμήμα έλλειψης, διότι το επίπεδο E που δημιουργείται από τις παράλληλες προς τη διεύθυνση φωτισμού Φ ευθείες, οι οποίες ταυτόχρονα διέρχονται από σημεία της AB, τέμνει τον κύλινδρο με διεύθυνση πλάγια σε σχέση με τον άξονά του.

Ένας τρόπος λοιπόν προσδιορισμού της καμπύλης της σκιάς του AB στον κύλινδρο είναι αν ορίσουμε το επίπεδο E, που δημιουργούν οι φωτεινές ακτίνες οι οποίες διέρχονται από την AB. Εφόσον η AB ανήκει στο επίπεδο E και η AB l είναι η σκιά της AB στο Π_1 , είναι προφανές ότι η AB l αποτελεί το 1^ο ίχνος του επιπέδου E. Τοποθετούμε άξονα $\gamma 13$ κάθετα στην AB l, ώστε το επίπεδο E να μετατραπεί σε πρόσθιο στο σύστημα προβολής Π_1 - Π_3 και προσδιορίζουμε τον κύλινδρο και την AB σε 3^η προβολή. Η A''B''' ταυτίζεται τότε με το 3^ο ίχνος του επιπέδου E. Η τομή του επιπέδου E με τον κύλινδρο στην 3^η προβολή μας δίνει τα σημεία της καμπύλης τομής στην 1^η και 2^η προβολή, που αποτελούν σημεία της σκιάς του AB στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

Ένας άλλος τρόπος που καταλήγει προφανώς στο ίδιο αποτέλεσμα, είναι να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της επικάλυψης σκιών (σχ. 42). Προσδιορίζουμε δηλαδή σημεία επικάλυψης της AB με διάφορες γενέτειρες του κυλίνδρου και σχηματίζουμε την καμπύλη που δημιουργείται από της ένωσή τους.

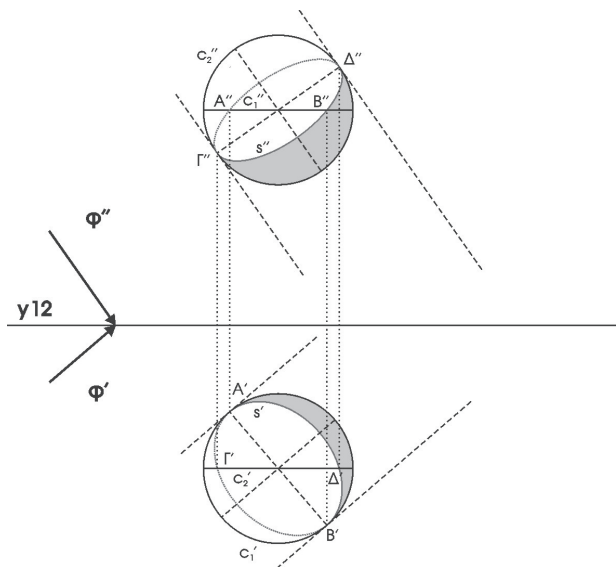
Οι παραπάνω δύο τρόποι προσδιορισμού της σκιάς ευθυγράμμου τμήματος σε κύλινδρο μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για άλλες καμπύλες επιφάνειες, όπως ο κώνος. Για επιφάνειες πιο πολύπλοκης γεωμετρίας, όπως η σφαίρα και η σπείρα, ο πρώτος τρόπος είναι μάλλον ο ενδεδειγμένος.

7. Σκιά σφαίρας

Η σφαίρα είναι κι αυτό στερεό εκ περιστροφής, με γενέτειρα καμπύλη τον κύκλο.

Η σφαίρα είναι ένα από τα ελάχιστα στερεά σχήματα για τα οποία -για να προσδιορίσουμε τη σκιά του- χρησιμοποιούμε το περίγραμμα της αυτοσκιάς του, αντίθετα με ό,τι περιγράψαμε μέχρι τώρα.

Στο σχήμα 43 παριστάνεται μία σφαίρα, όπου η



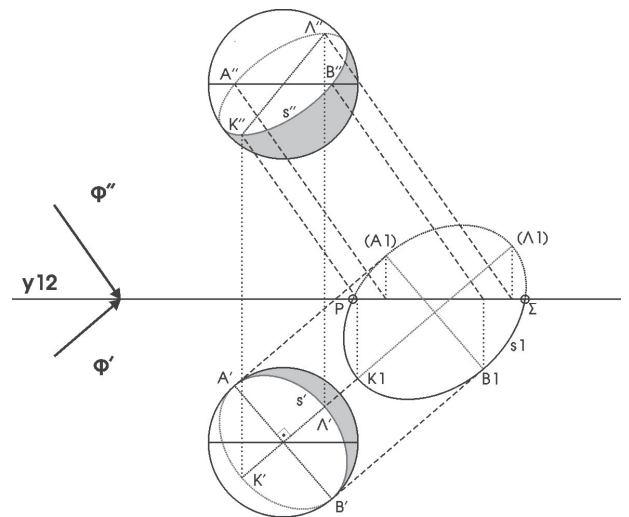
σχ. 43

γενέτειρα c_1 στην 1^η προβολή είναι ο κύκλος c_1' και στη 2^η προβολή εκφυλίζεται στη διάμετρο c_1'' . Αντίστοιχα, η γενέτειρα c_2 στη 2^η προβολή είναι ο κύκλος c_2'' , που εκφυλίζεται στη διάμετρο c_2' στην 1^η προβολή.

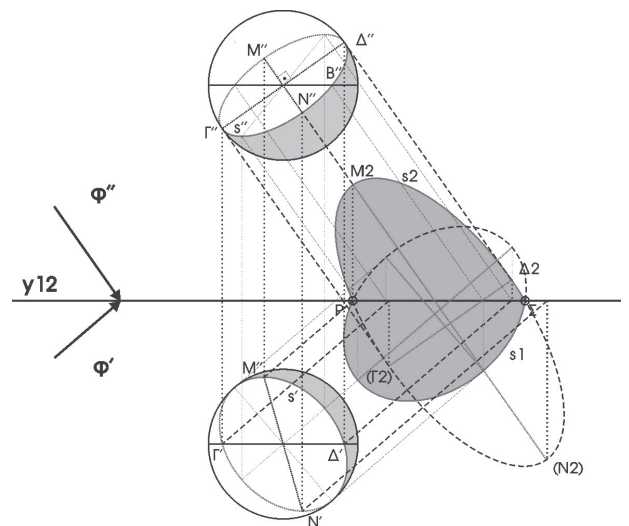
Η καμπύλη της αυτοσκιάς της σφαίρας είναι μία διάμετρος της, η οποία παριστάνεται σαν έλλειψη και στις δύο προβολές. Επιπλέον πρέπει η έλλειψη αυτή στην 1^η προβολή της να έχει μικρό άξονα παράλληλο στη ϕ' και μεγάλο άξονα κάθετο στη ϕ' και στη 2^η προβολή της να έχει μικρό άξονα παράλληλο στη ϕ'' και μεγάλο άξονα κάθετο στη ϕ'' (σχ. 43). Στην 1^η προβολή φέρνουμε τη διάμετρο $A'B'$ κάθετη στη ϕ' . Τα σημεία A και B ανήκουν στη γενέτειρα c_1 , επομένως μπορούμε να βρούμε και τη δεύτερη προβολή τους A'' και B'' στη διάμετρο c_1'' . Ομοίως φέρνουμε τη διάμετρο $\Gamma''\Delta''$ κάθετη στη ϕ'' και βρίσκουμε στη c_2' τις 1^{ες} προβολές Γ' και Δ' . Ο κύκλος s της αυτοσκιάς της σφαίρας στην 1^η προβολή παριστάνεται με την έλλειψη s' με μεγάλο άξονα την $A'B'$ και περνά από τα σημεία Γ' και Δ' . Στη 2^η προβολή παριστάνεται με την έλλειψη s'' , με μεγάλο άξονα την $\Gamma''\Delta''$ και περνά από τα σημεία A'' και B'' . Αρκεί τώρα να βρούμε τη σκιά του κύκλου s στα επίπεδα Π_1 και Π_2 .

Ξεκινώντας από την 1^η προβολή, ορίζουμε τα άκρα A', B', K' και Λ' των αξόνων της s' και βρίσκουμε τις 2^{ες} προβολές τους A'', B'', K'' και Λ'' στην s'' (σχ. 44). Βρίσκουμε τις σκιές των τεσσάρων σημείων στο Π_1 , είτε είναι πραγματικές ($K1, B1$), είτε ψεύτικες ($A1, \Lambda1$). Κατασκευάζουμε την έλλειψη $s1$, που είναι η σκιά του κύκλου s στο επίπεδο Π_1 . Τα σημεία Σ και P του άξονα $y12$ είναι σημεία καμπής της σκιάς.

Περνώντας τώρα στη 2^η προβολή, ορίζουμε τα άκρα Γ'', Δ'', M'' και N'' των αξόνων της s'' και βρίσκουμε τις 1^{ες} προβολές τους Γ', Δ', M' και N' στην s' (σχ. 45). Βρίσκουμε τις σκιές των σημείων, αλλά στο επίπεδο Π_2 πλέον, ανεξάρτητα από το αν είναι πραγματικές ($\Delta2, M2$) ή ψεύτικες ($\Gamma2, N2$). Κατασκευάζουμε την έλλειψη $s2$, που είναι η σκιά του κύκλου s στο επίπεδο Π_2 . Τα σημεία Σ και P είναι τα κοινά σημεία των δύο ελλείψεων.



σχ. 44



σχ. 45

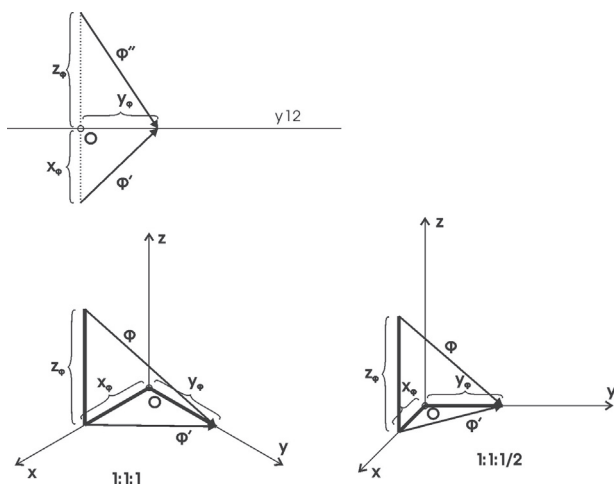
ΣΚΙΑΓΡΑΦΙΑ ΣΤΗΝ ΑΞΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η μεθοδολογία της σκιαγραφίας στο σύστημα Monge και στα διάφορα αξονομετρικά συστήματα, παρουσιάζει ελάχιστες διαφορές και πολλές ομοιότητες. Η κυριότερη διαφορά είναι ότι στην αξονομετρία δεν χρησιμοποιούμε τις δύο προβολές των διευθύνσεων προβολής, αλλά την ίδια τη διεύθυνση των φωτεινών ακτίνων και την 1^η προβολή της ϕ' . Αυτή η μικρή διαφορά διευκολύνει τη σχεδίαση και τον υπολογισμό της σκιαγραφίας. Μπορούμε πάντως να χρησιμοποιήσουμε κι εδώ τις προβολές ϕ' και ϕ'' του φωτός.

Μεταφορά της διεύθυνσης φωτισμού από την παραστατική στην αξονομετρική προβολή

Η διεύθυνση φωτισμού στην αξονομετρική προβολή είναι γενικά ανεξάρτητη και ορίζεται απ' ευθείας στο αξονομετρικό σχέδιο. Για λόγους απλούστευσης ή ευκρίνειας ζητούμε συχνά να μεταφέρουμε τη διεύθυνση φωτισμού από την ορθή προβολή στην αξονομετρική προβολή.

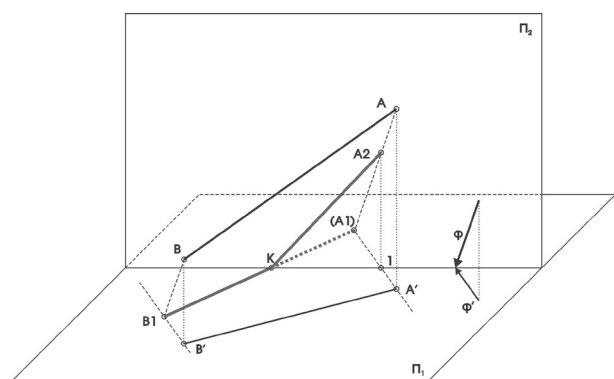
Γνωρίζοντας τις προβολές ϕ' και ϕ'' του φωτός, φέρνουμε μία κατακόρυφη ευθεία σε τυχαία θέση (σχ. 46) και ορίζουμε το σημείο O , σαν αρχή μέτρησης των μεγεθών x_ϕ , y_ϕ και z_ϕ . Μεταφέρουμε τα μεγέθη x_ϕ και y_ϕ στην αρχή των αξόνων O της αξονομετρικής προβολής, αντίστοιχα στους άξονες x και y . Κατόπιν υψώνουμε από την άκρη του x_ϕ παράλληλα στον άξονα των z και μεταφέρουμε και το μέγεθος z_ϕ , όπως φαίνεται στο σχήμα 44.



σχ. 46 Μεταφορά της διεύθυνσης φωτισμού από την προβολή κατά Monge σε ισομετρική και διμετρική αξονομετρική προβολή

Σκιά ευθυγράμμου τμήματος

Έχοντας την αξονομετρική προβολή ενός ευθυγράμμου τμήματος AB και την προβολή $A'B'$ του AB σε οριζόντιο επίπεδο προβολής (σχ. 47), βρίσκουμε τις σκιές των A και B ως εξής: από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη διεύθυνση ϕ και από την προβολή του B' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη ϕ' . Το σημείο τομής των ϕ και ϕ' από τα B και B' αντίστοιχα είναι η σκιά $B1$ του σημείου B στο οριζόντιο επίπεδο προβολής Π_1 . Όμοια προσδιορίζουμε τη σκιά $A1$ του σημείου A , που όμως βρίσκεται πίσω από το επίπεδο Π_2 είναι επομένως ψεύτικη σκιά. Από το σημείο 1



σχ. 47

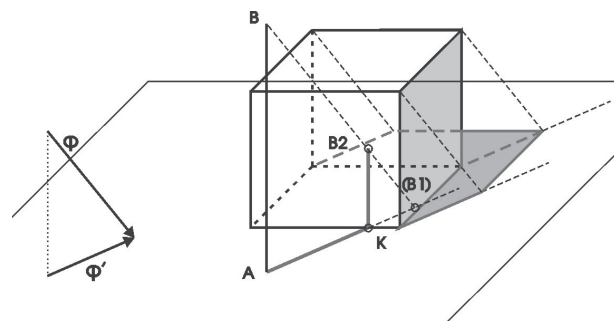
φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη (παράλληλη στον άξονα z) μέχρι να τμήσει τη ϕ από το A . Το σημείο τομής είναι το A_2 , πραγματική σκιά του A στο επίπεδο Π_2 . Ενώνουμε τα σημεία B_1 και (A_1) . Το τμήμα B_1K της $B_1(A_1)$ είναι τμήμα της σκιάς της AB στο Π_1 . Στο σημείο K η σκιά της AB «σπάει» και πέφτει στο επίπεδο Π_2 , μέχρι το σημείο A_2 . Ενώνουμε τα K και A_2 .

Σκιές ευθυγράμμων τμημάτων σε έδρες πολυέδρων

1. Το τμήμα AB είναι κατακόρυφο

Επειδή η αξονομετρική προβολή είναι κι αυτή ορθή προβολή, ισχύουν οι κανόνες της σκιαγραφίας όπως τους μελετήσαμε στην προβολή κατά Monge⁴.

Φέρνουμε από κάθε σημείο της άνω βάσης του κύβου του σχήματος 48 ευθείες παράλληλες στη διεύθυνση ϕ και από τις προβολές τους στο επίπεδο έδρασης του κύβου, ευθείες παράλληλες με τη ϕ' . Οι ακμές του κύβου που είναι παράλληλες με το επίπεδο έδρασης, δίνουν σκιές παράλληλες προς τις αντίστοιχες ακμές. Το σημείο B της AB έχει ψεύτικη σκιά μέσα στον όγκο του κύβου. Ενώνουμε τα σημεία A και (B_1) και προσδιορίζουμε το σημείο K , όπου η σκιά της ευθείας «σπάει» πάνω στην μπροστινή έδρα του κύβου. Επειδή η AB είναι κατακόρυφη, παράλληλη δηλαδή με τη μπροστινή έδρα του κύβου, από το σημείο K φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη μέχρι να τμήσει τη φωτεινή ακτίνα ϕ από το B .

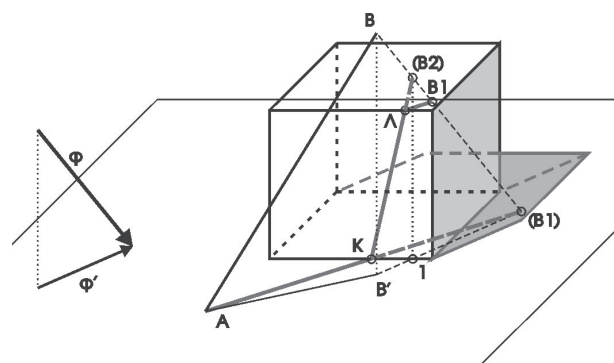


σχ. 48

2 Το τμήμα AB είναι πλάγιο

Προσδιορίζουμε τη σκιά του κύβου στο οριζόντιο επίπεδο έδρασής του. Το σημείο A του AB βρίσκεται πάνω στο επίπεδο έδρασης, επομένως έχει σκιά τον εαυτό του (σχ. 49).

Από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην διεύθυνση φωτισμού ϕ και από την προβολή του B' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη ϕ' . Το σημείο B έχει ψεύτικη σκιά (B_1) στο οριζόντιο επίπεδο, μέσα στον όγκο της σκιάς του κύβου. Ενώνουμε τα σημεία A και (B_1) και προσδιορίζουμε το σημείο καμπής της σκιάς K .



σχ. 49

4. βλ. Σκιαγραφία, Σκιαγραφία στο σύστημα Monge, Σκιά κατακόρυφου ευθυγράμμου τμήματος

Για να προσδιορίσουμε τη σκιά του σημείου B στην κατακόρυφη μπροστινή έδρα του κύβου, χρησιμοποιούμε την κατακόρυφη (παράλληλη στην έδρα) βοηθητική ευθεία που περνά από το B. Η σκιά της βοηθητικής αυτής ευθείας είναι η B'(B1), η οποία κάνει καμπή στο σημείο T1 και στρέφεται κατακόρυφα, μέχρι να τμήσει τη φ από το σημείο B. Εάν η έδρα του κύβου ήταν αρκετά μεγάλη, η σκιά του σημείου B στην κατακόρυφη έδρα του κύβου θα ήταν το σημείο (B2), το οποίο όμως είναι και πάλι ψεύτικο. Ενώνουμε τα K και (B2) και προσδιορίζουμε το σημείο Λ, δεύτερη καμπή της σκιάς της AB. Επειδή η επάνω έδρα του κύβου είναι επιφάνεια παράλληλη με την επιφάνεια έδρας του, η σκιά του AB στην επάνω έδρα, θα είναι παράλληλη με τη σκιά στην επιφάνεια έδρας. Επομένως από το σημείο Λ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AK μέχρι να τμήσει την φ από το B και προσδιορίζουμε το B1.

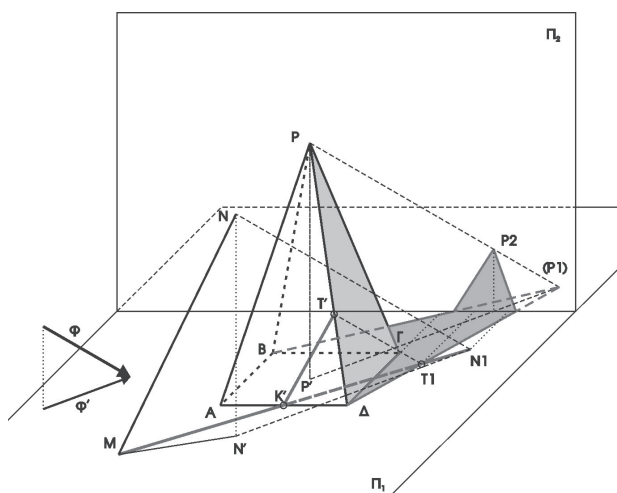
3. Σκιά πλαγίου τμήματος σε πλάγιο επίπεδο (μέθοδος επικάλυψης σκιών)

Κατασκευάζουμε τη σκιά της πυραμίδας, προσδιορίζοντας πρώτα τη σκιά της κορυφής της (P1) στο Π_1 (σχ. 50). Ενώνουμε το (P1) με τα σημεία της βάσης της πυραμίδας και προσδιορίζουμε τα σημεία καμπής των σκιών των ακμών και τα ενώνουμε με τη σκιά P2 του P στο Π_2 .

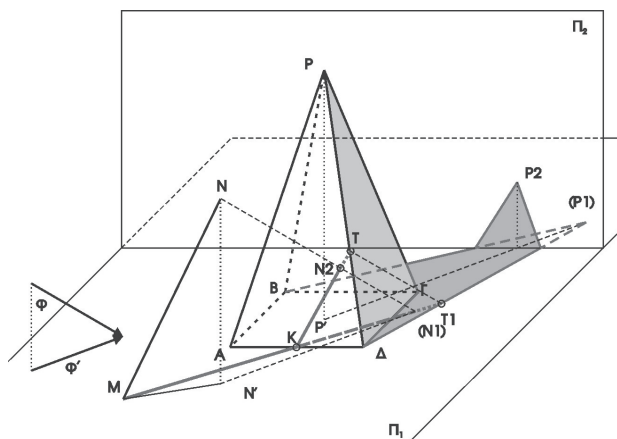
Το σημείο M του τμήματος MN έχει σκιά τον εαυτό του. Βρίσκουμε τη σκιά του σημείου N, φέρνοντας από το N παράλληλη στη φ και από το N' παράλληλη στη φ'. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει το N1, σκιά του N στο Π_1 . Ενώνουμε τα σημεία M και N1 και παρατηρούμε ότι η MN1 τέμνει στη διαδρομή της την πυραμίδα στο σημείο K, που είναι σημείο καμπής της σκιάς της MN.

Για να προσδιορίσουμε το τμήμα της σκιάς της MN στην έδρα της πυραμίδας χρειαζόμαστε άλλο ένα σημείο. Παρατηρούμε ότι η MN1 και η Δ(P1) τέμνονται στο σημείο T1, το οποίο είναι *σημείο επικάλυψης σκιών*. Το σημείο T1 είναι σκιά σημείου T που βρίσκεται τόσο στην MN, όσο και στην ΔP. Προσδιορίζουμε το σημείο T στη ΔP, φέρνοντας από το T1 ευθεία παράλληλη στη φ κι ενώνουμε με το K.

Στην περίπτωση που η σκιά του N βρίσκεται μέσα στον όγκο της σκιάς της πυραμίδας, προσδιορίζουμε το



σχ. 50



σχ. 51

σημείο επικάλυψης T1 στην προέκταση της M(N1) (σχ. 51). Τότε το σημείο N2 θα βρίσκεται στην τομή της ΚΤ με την παράλληλη της φ από το σημείο N.

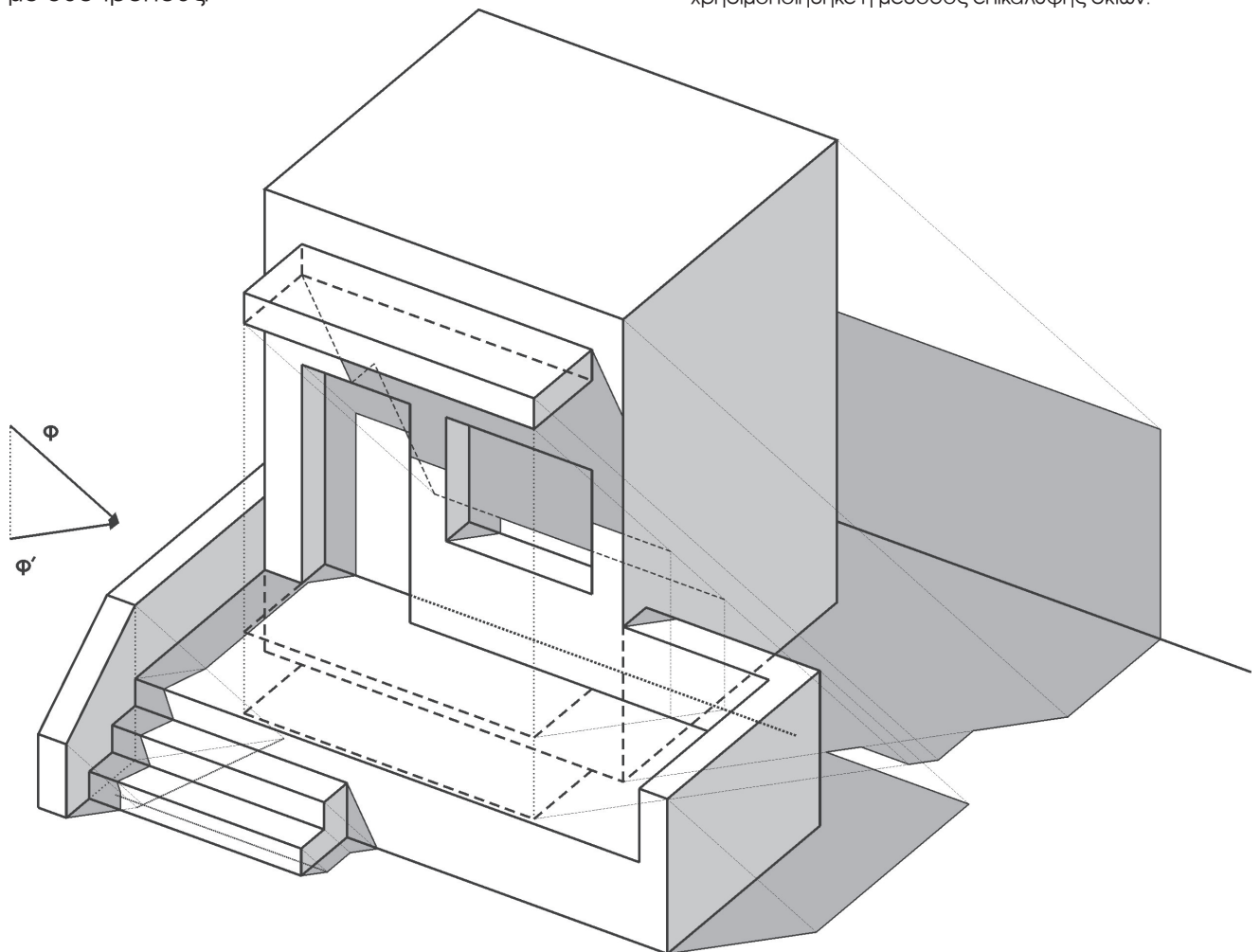
Σκιές στερεών

1. Σκιές πολυέδρων

Οι σκιές των πολυέδρων προσδιορίζονται μέσω των ακμών και των κορυφών τους, σύμφωνα με τους κανόνες τις σκιαγραφίας, όπως έχουμε αναλύσει μέχρι τώρα.

Αυτό που είναι σημαντικό ν' αναφέρουμε, είναι η μεθοδολογία προσδιορισμού της σκιαγράφησης ενός αξονομετρικού. Σε πολύπλοκες συνθέσεις πολυέδρων συχνά αντιμετωπίζουμε πρόβλημα με την αναγνώριση της επικάλυψης των σκιών κάθε στερεού στο άλλο, ή στο οριζόντιο επίπεδο έδρασης της σύνθεσης και κατακόρυφο επίπεδο Π_z όταν αυτό υπάρχει. Μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

σχ. 52 Κάθε στερεό σχήμα της σύνθεσης ρίχνει τη σκιά του στο αμέσως επόμενο του. Η σκιά του στεγάστρου, εφόσον δεν βρίσκεται ολόκληρη στον μπροστινό τοίχο, εξετάζουμε αν βλέπουμε τη σκιά του στο οριζόντιο επίπεδο. Για τον προσδιορισμό της σκιάς της κουπαστής χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος επικάλυψης σκιών.

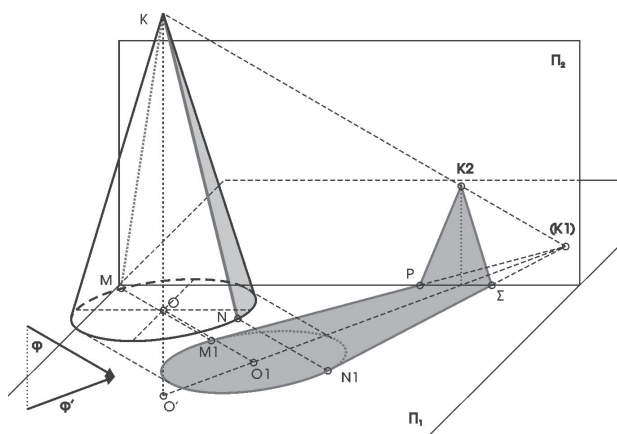


1. Προσδιορίζουμε τις σκιές όλων των στερεών στο έδαφος και κατόπιν μεταφέρουμε κάθε επικάλυψη στην αντίστοιχη έδρα.
2. Προσδιορίζουμε τη σκιά κάθε στερεού σχήματος χωριστά στα διάφορα επίπεδα στα οποία αυτή βρίσκεται (σχ. 52).

2 Σκιά κώνου

Στην αξονομετρική προβολή ενός κώνου ορίζουμε τη διεύθυνση φωτισμού ϕ και την 1^η προβολή της ϕ' . Η βάση του κώνου είναι κύκλος παράλληλος στο επίπεδο Π_1 , επομένως η σκιά του είναι αξονομετρικός κύκλος παράλληλος και ίσος με τον πραγματικό (σχ. 53). Άρα αρκεί να προσδιορίσουμε τη σκιά του κέντρου της έλλειψης, που παριστά αξονομετρικά τον κύκλο της βάσης του κώνου και να σχεδιάσουμε μία έλλειψη ίση με την αρχική στη νέα θέση (παράλληλη μεταφορά).

Προσδιορίζουμε έπειτα τη σκιά της κορυφής του κώνου K στο επίπεδο Π_1 . Η σκιά είναι ψεύτικη, αλλά τη χρησιμοποιούμε για να προσδιορίσουμε τις εφαπτόμενες προς την έλλειψη⁵ της σκιάς της βάσης. Τα σημεία επαφής $M1$ και $N1$ είναι τα ακραία φωτεινά σημεία της επιφάνειας του κώνου και μεταφέροντάς τα παράλληλα προς τη ϕ στη βάση του στερεού, προσδιορίζουμε τις ακραίες φωτεινές γενέτειρες KM και KN . Το τμήμα του κώνου που «βλέπει» προς την ερριμμένη σκιά του είναι το αυτοσκιασμένο τμήμα. Τα σημεία P και Σ είναι τα σημεία καμπής των σκιών $(K1)M1$, $(K1)N1$ των γενετειρών KM και KN , αντίστοιχα. Ενώνουμε τα P και Σ με την πραγματική σκιά $K2$ του K .



σχ. 53

3 Σκιά κυλίνδρου

Η κάτω βάση του κυλίνδρου εδράζεται στο επίπεδο Π_1 , επομένως έχει σκιά τον εαυτό της. Η άνω βάση είναι κύκλος παράλληλος στο επίπεδο Π_1 , επομένως η σκιά του είναι αξονομετρικός κύκλος (έλλειψη) ίσος και παράλληλος με τον πραγματικό (σχ. 54). Στην αξονομετρική προβολή του κυλίνδρου φέρνουμε εφαπτόμενες στην κάτω βάση ευθείες, παράλληλες στη ϕ' , (με την ευθεία Pascal⁶). Προσδιορίζουμε μ' αυτό τον τρόπο τις ακραίες φωτεινές γενέτειρες του κυλίνδρου MM' και NN' .

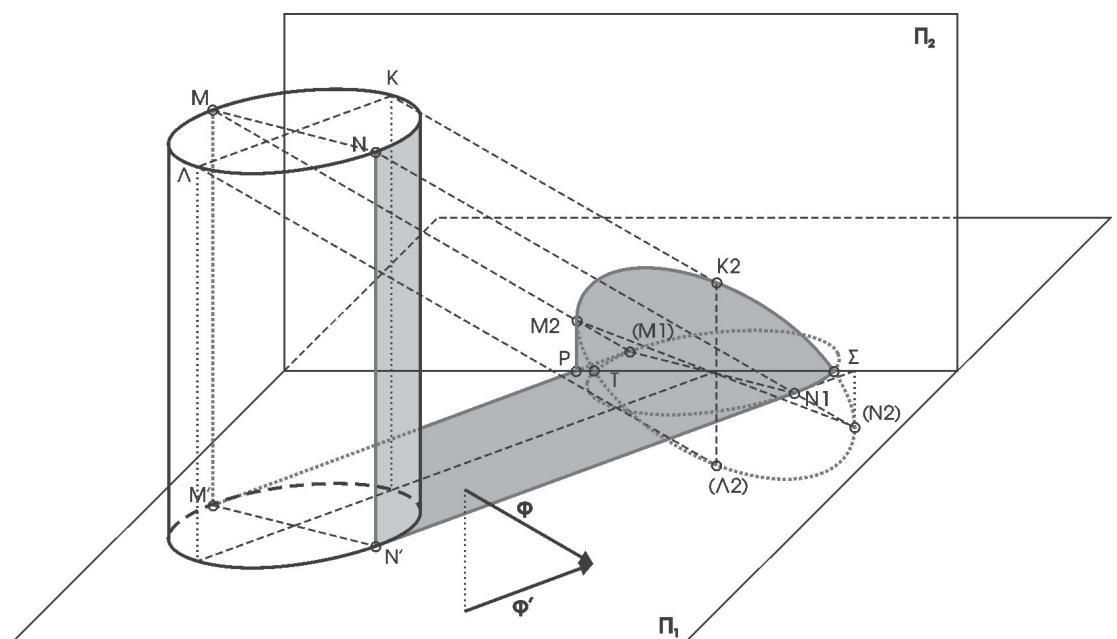
5. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 23

6. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 24

Παρατηρούμε ότι το σημείο M έχει σκιά $M2$ στο επίπεδο Π_2 , πρέπει επομένως να προσδιορίσουμε τη σκιά της άνω βάσης και στο επίπεδο Π_2 . Η σκιά ($N2$) του σημείου N βρίσκεται στην τομή της ϕ από το N και της κατακόρυφης από το σημείο όπου η ϕ' από το N' τέμνει την ευθεία τομής των επιπέδων Π_1 και Π_2 . Η $M2(N2)$ είναι μία διάμετρος της έλλειψης, που θ' αποτελέσει τη σκιά της άνω βάσης του κυλίνδρου στο Π_2 .

Βρίσκοντας τη σκιά μιας κάθετης (στο χώρο) προς την MN διαμέτρου, μπορούμε να βρούμε τους άξονες της νέας έλλειψης (κατασκευή Rytz⁷). Γνωρίζουμε ότι στο χώρο οι διάμετροι $K\Lambda$ και MN του κύκλου -που αποτελεί το πραγματικό σχήμα της βάσης του κυλίνδρου- είναι μεταξύ τους κάθετες. Επομένως στην αξονομετρική προβολή, που είναι παράλληλη ομολογία⁸, οι διάμετροι της έλλειψης, που προκύπτει σαν εικόνα του πραγματικού κύκλου, είναι αξονομετρικά κάθετες μεταξύ τους (η $K\Lambda$ είναι παράλληλη με τις εφαπτόμενες της έλλειψης από τα M και N).

Προσδιορίζουμε τη σκιά $K2(\Lambda2)$ της $K\Lambda$ στο επίπεδο Π_2 . Χρησιμοποιώντας την κατασκευή Rytz κατασκευάζουμε την έλλειψη της σκιάς της άνω βάσης του κυλίνδρου στο Π_2 . Οι δύο ελλείψεις αλληλοτέμνονται στα σημεία Σ και Γ . Ολοκληρώνουμε τη σκιά του κυλίνδρου, φέρνοντας τη $PM2$, που είναι κατακόρυφη εφαπτόμενη της έλλειψης του Π_2 .



σχ. 54

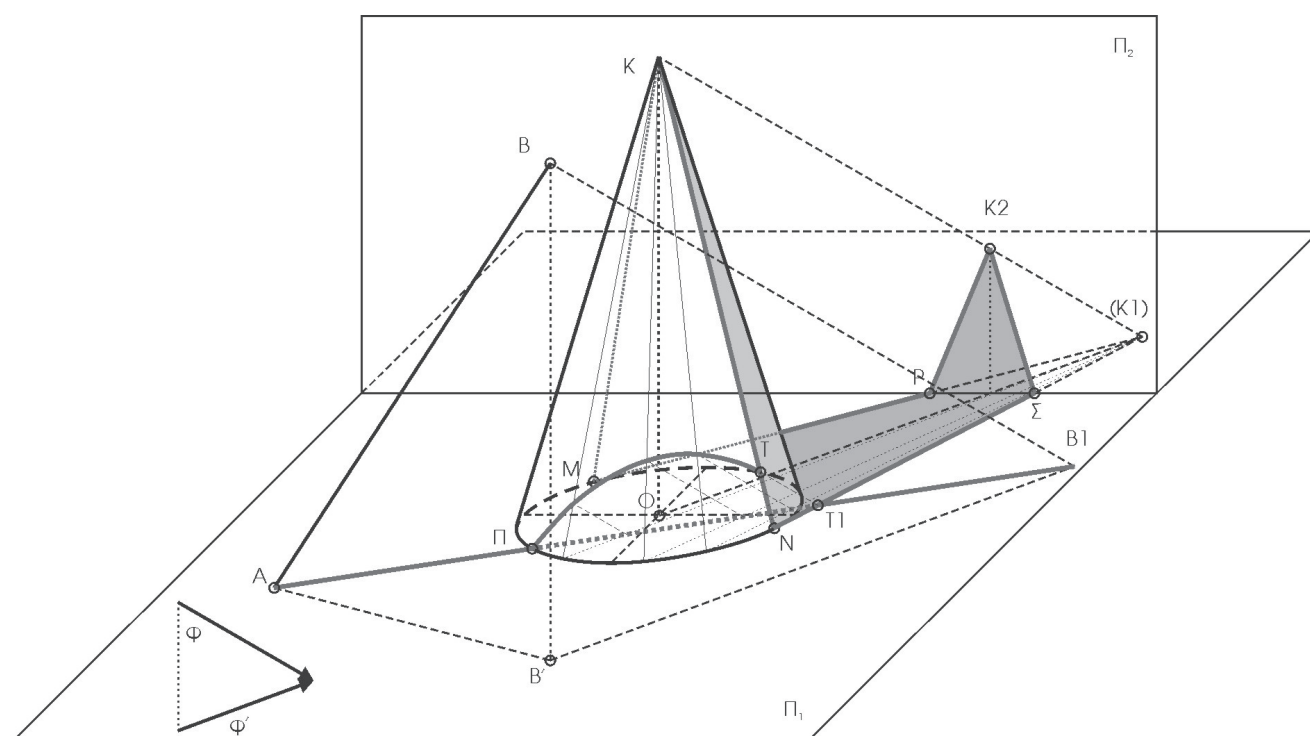
7. βλ Παράρτημα Α, παρ. 26
8. βλ Παράρτημα Α, παρ. 25

4. Σκιά ευθυγράμμου τμήματος σε κώνο ή κύλινδρο

Κατασκευάζουμε τη σκιά του κώνου και του ευθυγράμμου τμήματος AB, σύμφωνα με τα μέχρι τώρα γνωστά. Παρατηρούμε ότι η σκιά του AB τέμνει τη βάση του κώνου στο σημείο Π, στο οποίο κάνει καμπή και συνεχίζει στην κωνική επιφάνεια. Η γραμμή που δημιουργείται είναι καμπύλη κωνικής τομής και για τον προσδιορισμό της χρησιμοποιούμε τη μέθοδο επικάλυψης σκιών, ορίζοντας σημεία επικάλυψης T της σκιάς της AB με τις σκιές γενετειρών του κώνου (σχ. 55).

5. Σκιά σφαίρας

Ο προσδιορισμός της σκιάς μιας σφαίρας σε αξονομετρική προβολή είναι ίσως η μοναδική περίπτωση στην αξονομετρία, κατά την οποία είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε τις προβολές της διεύθυνσης φωτισμού Φ' και Φ'' , αντί για το σύστημα των Φ και Φ' . Οπότε τότε εργαζόμαστε ακριβώς όπως περιγράψαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, για τη σκιά σφαίρας στην παράσταση κατά Monge.

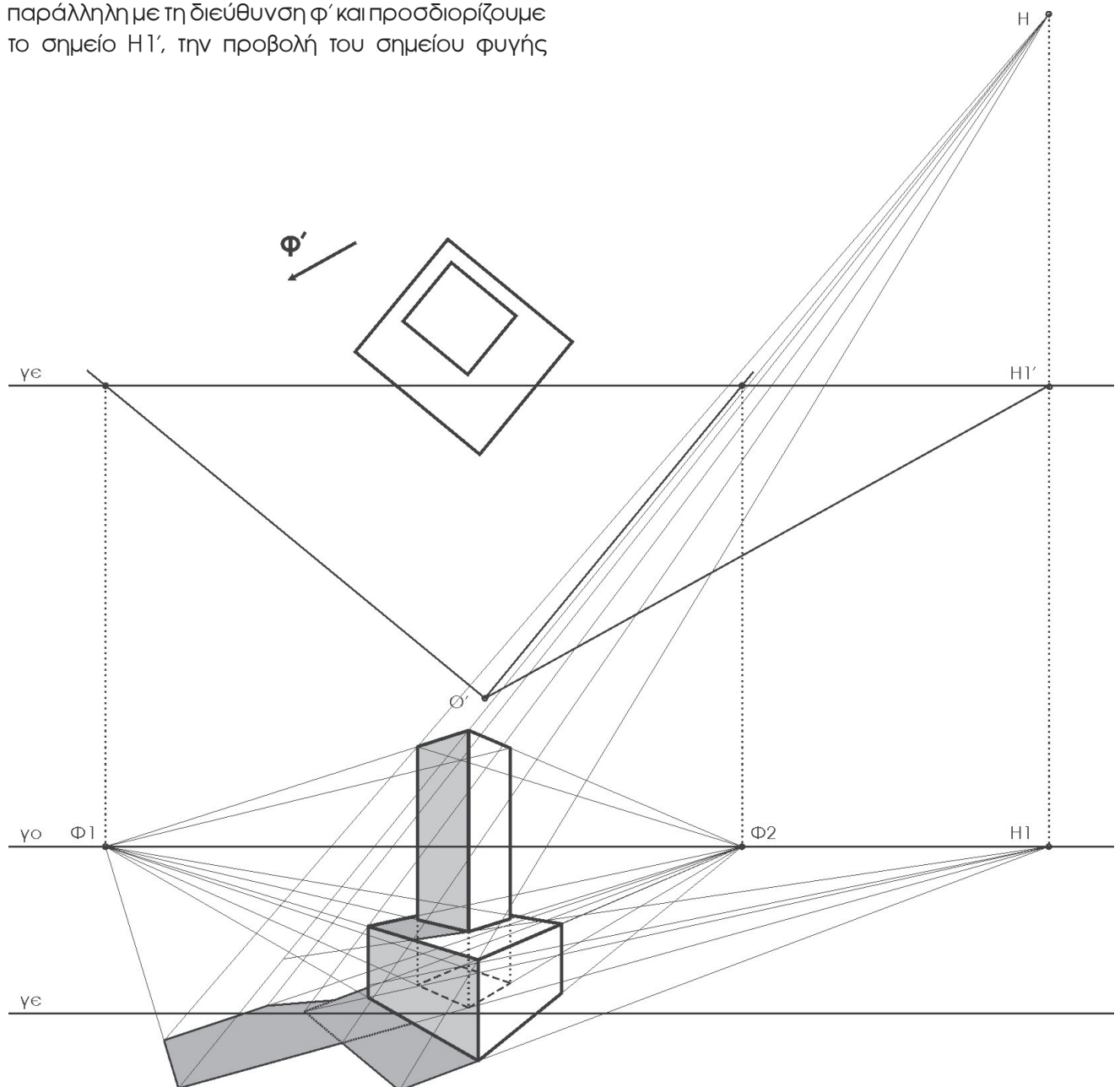


σχ. 55

ΣΚΙΑΓΡΑΦΙΑ ΣΤΗΝ ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ

Σε μια προοπτική απεικόνιση θεωρούμε τις ηλιακές ακτίνες συγκλίνουσες προς κάποιο σημείο φυγής, όπως άλλωστε θεωρούμε για όλες τις παράλληλες ευθείες του χώρου. Οι ηλιακές ακτίνες σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο ϵ_1 μια γωνία ω , που συνήθως μας είναι γνωστή. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε ότι οι ηλιακές ακτίνες είναι πλάγιες ευθείες στο χώρο, τις οποίες μπορούμε ν' απεικονίσουμε προοπτικά, αρκεί να γνωρίζουμε τη γωνία ω και την προβολή ϕ' των ακτίνων στο επίπεδο του πίνακα (σχ. 56).

Από το σημείο οράσεως φέρνουμε ευθεία παράλληλη με τη διεύθυνση ϕ' και προσδιορίζουμε το σημείο $H1'$, την προβολή του σημείου φυγής



σχ. 56

των ακτίνων του ήλιου. Το σημείο $H1$ του ορίζοντα ονομάζεται **προβολή του ήλιου** και μέσω της γωνίας ω^9 προσδιορίζουμε το σημείο H , που ονομάζεται **εικόνα του ήλιου**.

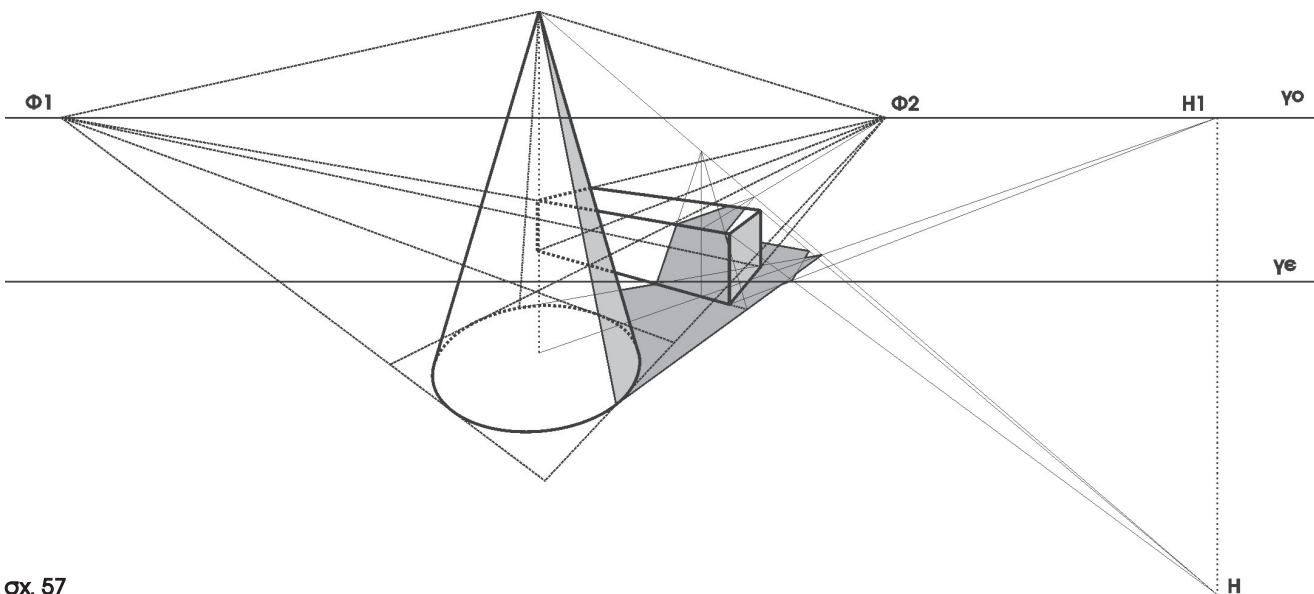
Μετά τον ορισμό της θέσης του ήλιου, εργαζόμαστε όπως και στη σκιαγραφία στην αξονομετρική προβολή, φέρνοντας από κάθε σημείο ευθεία *συγκλίνουσα* στο σημείο H και από την προβολή του στο οριζόντιο επίπεδο, ευθεία *συγκλίνουσα* στο σημείο $H1$. Στην τομή των ευθειών αυτών βρίσκεται κάθε φορά η σκιά του σημείου. Είναι προφανές ότι η σκιά μιας οριζόντιας ευθείας -που γνωρίζουμε ότι ρίχνει ίση και παράλληλη σκιά σε οριζόντιο επίπεδο- στην προοπτική ρίχνει σκιά *προοπτικά ίση* και *συγκλίνουσα* στο ίδιο με το αρχικό σημείο φυγής.

Σχετικές θέσεις της εικόνας του ήλιου

Όπως είδαμε στο προοπτικό πλάγias ευθείας, η γωνία ω μπορεί να βρίσκεται πάνω ή κάτω από την γραμμή του ορίζοντα. Αντίστοιχα προσδιορίζεται η εικόνα του ήλιου πάνω ή κάτω από τον ορίζοντα.

1. Η εικόνα του ήλιου βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα

Όταν η εικόνα H του ήλιου βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα, ο ήλιος βρίσκεται μπροστά από τον παρατηρητή:



σχ. 57

9. βλ. Προοπτική, Προοπτικό τυχαίας ευθείας

- Αν η εικόνα H του ήλιου βρίσκεται επάνω από τον ορίζοντα και αριστερά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται μπροστά και αριστερά του παρατηρητή.
- Αν η εικόνα του ήλιου βρίσκεται επάνω από τον ορίζοντα και δεξιά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται μπροστά και δεξιά του παρατηρητή (σχ. 56).

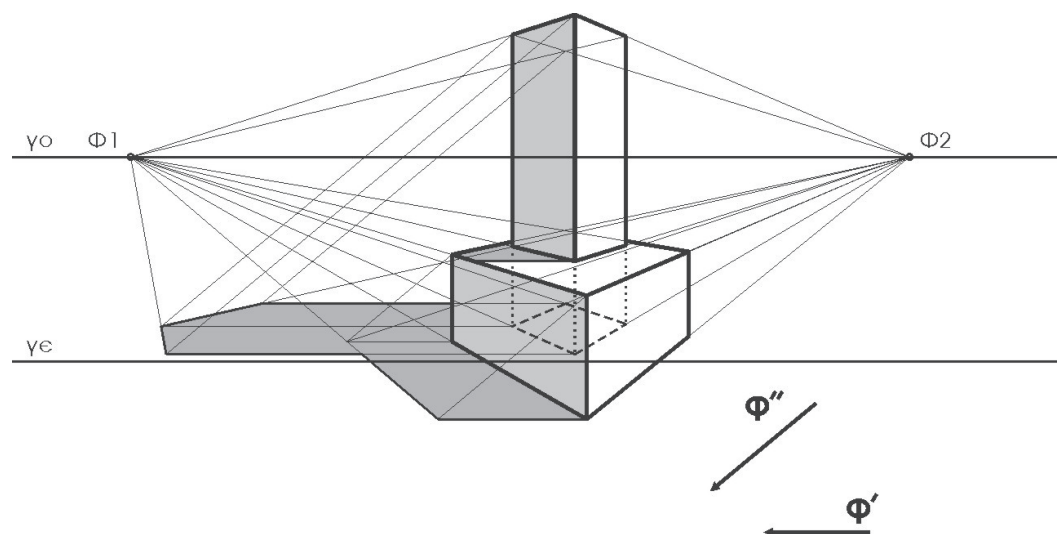
2 Η εικόνα του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα

Όταν η εικόνα H του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα, ο ήλιος βρίσκεται πίσω από τον παρατηρητή:

- Αν η εικόνα H του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα και αριστερά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται πίσω και δεξιά του παρατηρητή.
- Αν η εικόνα H του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα και δεξιά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται πίσω και αριστερά του παρατηρητή (σχ. 57).

Ακτίνες παράλληλες στον πίνακα

Μία ειδική περίπτωση έχουμε όταν οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες στο κατακόρυφο επίπεδο του πίνακα. Τότε οι ηλιακές ακτίνες δεν τέμνουν σε κανένα σημείο τον πίνακα κι επομένως δεν



σχ. 58

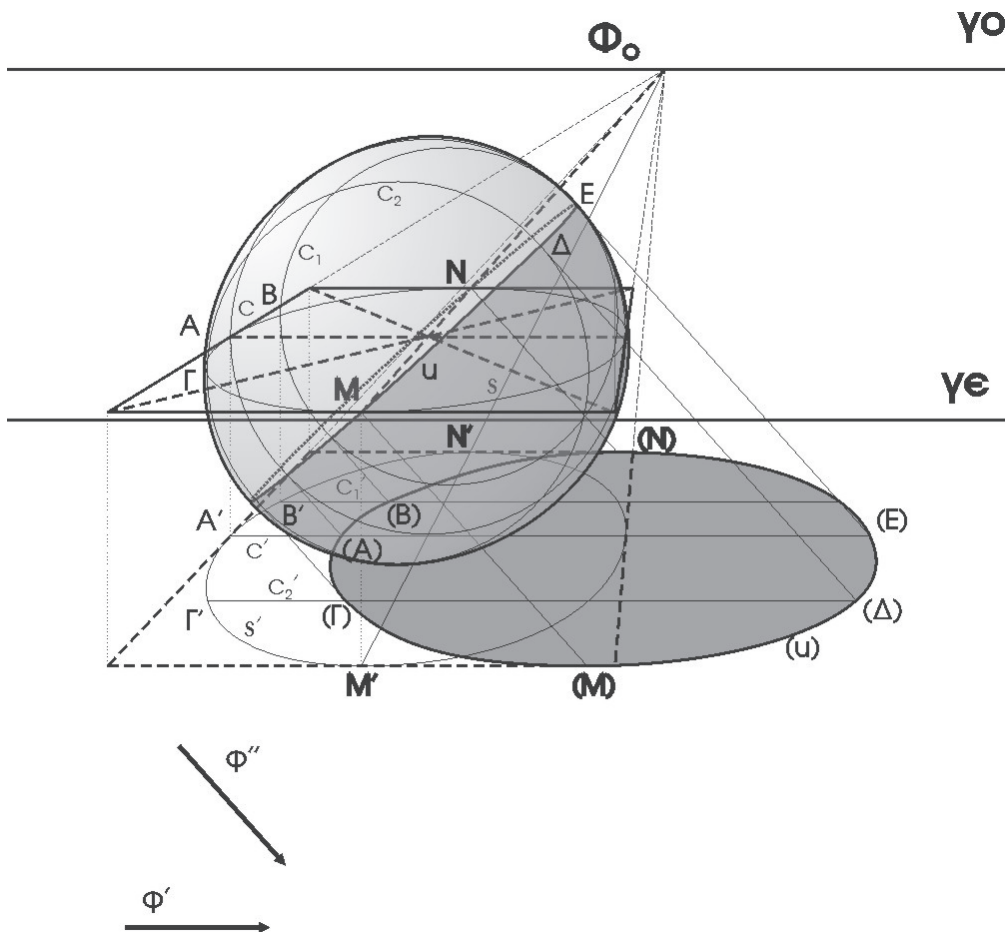
έχουν σημείο φυγής (εικόνα του ήλιου). Η γωνία πρόσπτωσης του φωτός ω είναι ίση με την πραγματική και η προβολή της στο επίπεδο e_1 έχει διεύθυνση παράλληλη με τη γραμμή του εδάφους γε. Οι προοπτικές εικόνες των φωτεινών ακτίνων εμφανίζονται παράλληλες μεταξύ τους (σχ. 58).

Σκιές στερεών

Οι σκιαγραφία των πολυέδρων, κωνικών και κυλινδρικών επιφανειών αντιμετωπίζεται με την ίδια μεθοδολογία όπως και στην αξονομετρία. Αντίθετα η σκιαγραφία μίας σφαίρας σε προοπτική απεικόνιση παρουσιάζει μερικές ιδιαιτερότητες και αξίζει να μελετηθεί.

1. Σκιά σφαίρας με παράλληλες ακτίνες

Όταν έχουμε κατασκευάσει το προοπτικό μιας σφαίρας με μετωπικούς κύκλους, η διαδικασία της



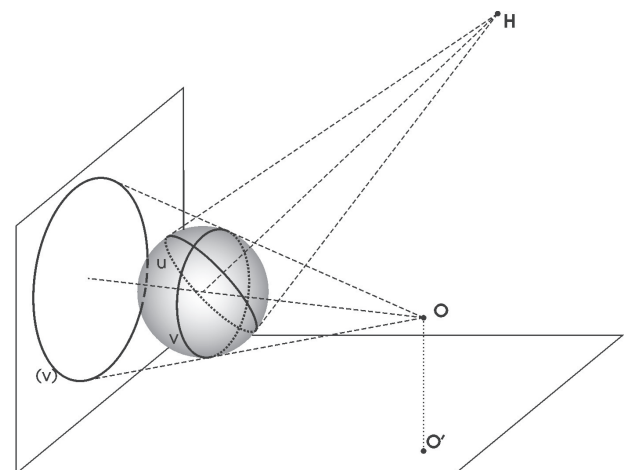
σκιαγράφησης της είναι σχετικά απλή, αρκεί να έχουμε προσδιορίσει τις προβολές των μετωπικών κύκλων c' , c_1' , c_2' και στην προοπτική εικόνα (σχ. 59). Όταν οι ακτίνες είναι παράλληλες στον πίνακα, η σφαίρα χωρίζεται σε δύο ημισφαίρια, ένα φωτεινό κι ένα σκοτεινό. Ο κύκλος της αυτοσκιάς της προσδιορίζεται όταν στους μετωπικούς κύκλους φέρουμε ευθείες εφαπτόμενες προς τις φωτεινές ακτίνες. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζονται διάφορα σημεία, ικανά να μας περιγράψουν την έλλειψη της αυτοσκιάς της σφαίρας.

Αρκεί τώρα να προσδιορίσουμε τη σκιά του κύκλου αυτού (του κύκλου της αυτοσκιάς) στο οριζόντιο επίπεδο e_1 . Προβάλλουμε στο οριζόντιο επίπεδο τα σημεία του κύκλου της αυτοσκιάς, όπως έχουμε ήδη προσδιορίσει. Η προβολή στο οριζόντιο επίπεδο οποιουδήποτε σημείου ενός μετωπικού κύκλου, του c για παράδειγμα, θα βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα c' . Προεκτείνουμε επομένως τη c' μέχρι να τμηθεί από τις ϕ'' που είναι εφαπτόμενες του c και προσδιορίζουμε τα σημεία $A1$ και $E1$, σκιές των A και E στο e_1 . Οι σκιές $M1$ και $N1$ των σημείων M και N του οριζόντιου κύκλου s είναι χαρακτηριστικά, διότι η έλλειψη της σκιάς της σφαίρας $u1$ έχει σ' αυτά τα σημεία οριζόντιες εφαπτόμενες.

2 Σκιά σφαίρας με την εικόνα του ήλιου

Μπορούμε κι εδώ να χρησιμοποιήσουμε τους μετωπικούς κύκλους της κατασκευής της προοπτικής εικόνας της σφαίρας, αλλά η διαδικασία είναι μάλλον ευκολότερη αν θεωρήσουμε ότι ο ήλιος «βλέπει» τη σφαίρα, είναι δηλαδή ο παρατηρητής (σχ. 60).

Προσδιορίζουμε τότε μία νέα περιβάλλουσα, που μπορεί εύκολα να σχεδιαστεί σαν εφαρμογή του θεωρήματος Dandelin¹⁰.



σχ. 60

10. βλ. Παράρτημα Β