

ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ

Εισαγωγή

Αυτό που στην εφαρμοσμένη γεωμετρία ονομάζουμε συχνά **γραμμική προοπτική** είναι ένα σύστημα αναπαράστασης του τρισδιάστατου χώρου σε επιφάνεια δύο διαστάσεων. Η μέθοδος αυτή απεικόνισης έχει πολλά κοινά με την εμπειρική προοπτική, τον τρόπο δηλαδή που οι άνθρωποι αντιλαμβανόμαστε το χώρο και τα αντικείμενα μέσα σ' αυτόν. Στην πραγματικότητα, επειδή η προοπτική απεικόνιση βασίζεται στη στατική άποψη ενός σημείου οράσεως και σε γεωμετρικούς υπολογισμούς, επιτυγχάνει μια προσέγγιση μόνο του σύνθετου τρόπου της λειτουργίας της όρασης.

Η προοπτική σαν επιστήμη σχετίζεται με την οπτική, δηλαδή τη μελέτη των νόμων της όρασης, επιστήμη που άρχισε και άνθισε στην αρχαία Ελλάδα και τη Ρώμη. Το προοπτικό σύστημα απεικόνισης όμως αναπτύχθηκε και οριστικοποιήθηκε στις αρχές του 15^{ου} αιώνα, με τους πρωτοποριακούς πειραματισμούς του Filippo Brunelleschi (1377 – 1446) και του Leon Battista Alberti (1406 – 1472). Ο τελευταίος ειδικά θεωρούσε την επιφάνεια προβολής της προοπτικής εικόνας σαν «ανοιχτό παράθυρο, μέσα από το οποίο βλέπουμε το ζωγραφικό θέμα».

Πρώτος κατέδειξε τις αρχές της γραμμικής προοπτικής ο Brunelleschi, γλύπτης και αρχιτέκτονας,

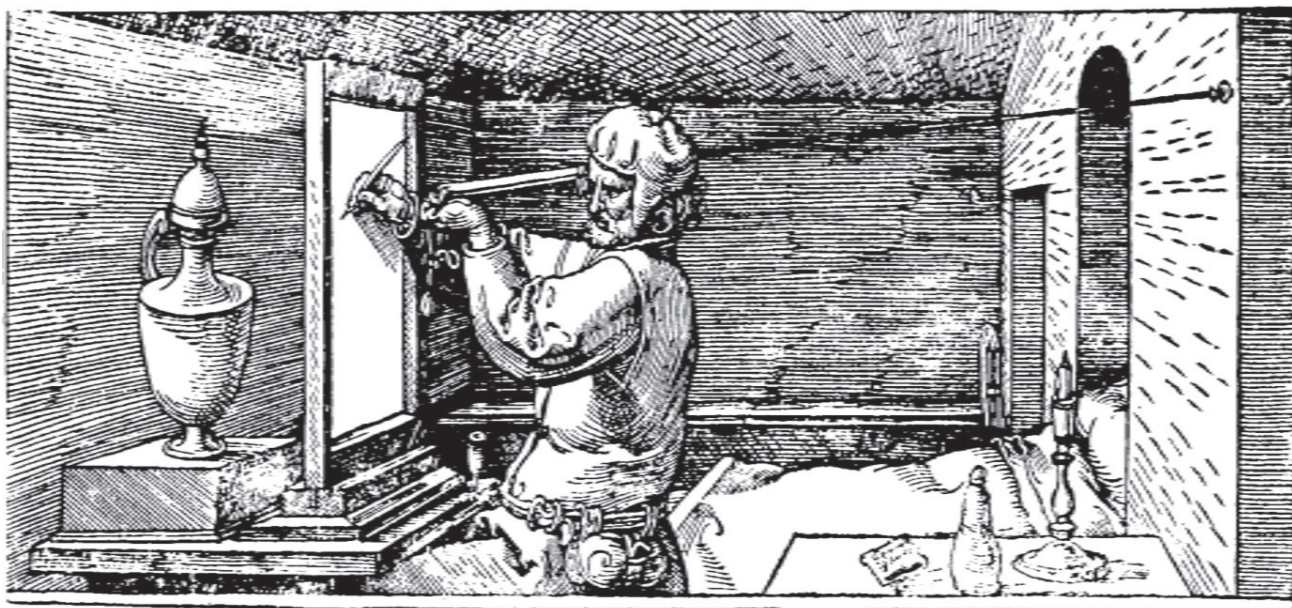


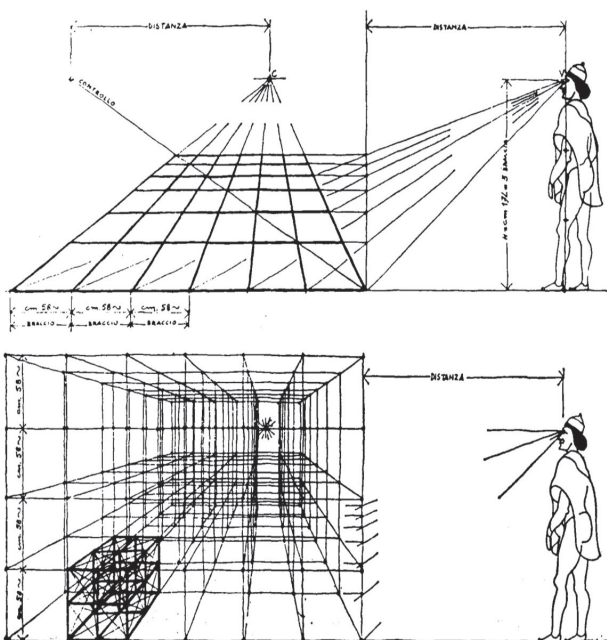
εικ. 1 Το τζάμι του καλλιτέχνη

Ο Alberti και ο da Vinci αναφέρουν στα κείμενά τους ότι μπορεί κανείς «να ζωγραφίζει μια εικόνα υπό κλίμακα, σχεδιάζοντας το αντικείμενο σε τζάμι». Στην ξυλογραφία του Dürer το τζάμι βρίσκεται σε κορνίζα σε ειδικό τραπέζι, όπου είναι τοποθετημένο ένα μετακινούμενο στόχαστρο. Είναι ο πιο απλός τρόπος κατασκευής ενός προοπτικού

εικ. 2 Η εφεύρεση του ντε Κέιζερ

Ένα άλλο σύστημα κατασκευής προοπτικού, με τη χρήση μιας ειδικής ακίδας στην άκρη ενός νήματος, στερεωμένου στον τοίχο. Διατηρείται μ' αυτό τον τρόπο σταθερή η οπτική γωνία του καλλιτέχνη.





εικ. 3 & 4 Ο κάρναβος του Alberti

Με τον κάρναβο να εξελίσσεται από δισδιάστατο σε τρισδιάστατο, ο Alberti κατάφερε να κάνει τις πρώτες μετρήσεις στις προοπτικές εικόνες

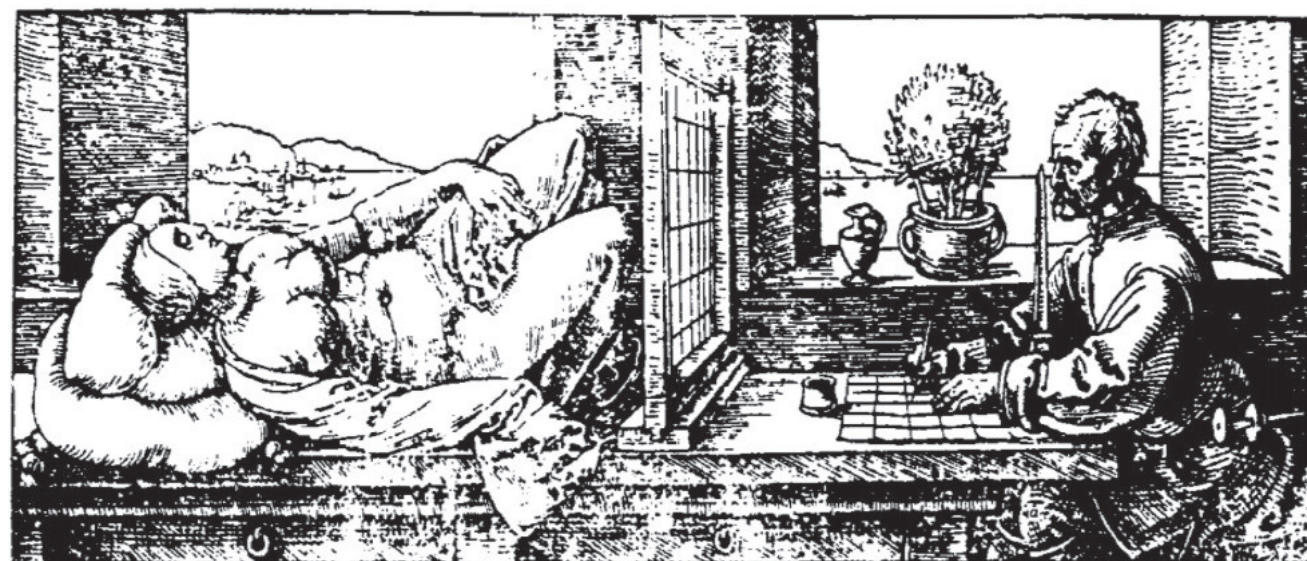
που αργότερα έγινε διάσημος για το θόλο του καθεδρικού ναού της Φλωρεντίας. Αυτός όμως που ανακάλυψε και μελέτησε τη γεωμετρική βάση της γραμμικής προοπτικής ήταν ο L. B. Alberti, καλλιτέχνης, αρχιτέκτονας, αρχαιογνώστης και γενικά άνθρωπος του πνεύματος.

Βάσισε το σύστημά του στο ύψος του ανθρώπου, το οποίο όρισε να είναι τρεις πήχεις (περίπου 1,80). Καθόρισε απέναντί του μια κατακόρυφη επιφάνεια προβολής και χώρισε τη γραμμή του εδάφους, τη γραμμή δηλαδή τομής της επιφάνειας του πίνακα προβολής και του εδάφους, σε μέρη ανάλογα με τους πήχεις. Έπειτα όρισε ένα σημείο σύγκλισης στη μεσοκάθετο της γραμμής εδάφους και σε ύψος τριών πήχεων. Ένωσε τέλος κάθε τμήμα ενός πήχη με το σημείο φυγής. Σχηματίζεται τελικά ένας τρισδιάστατος προοπτικός κάρναβος, μέσα στον οποίο μπορούν να απεικονιστούν προοπτικά τα σχήματα του χώρου (εικ. 3,4).

Αργότερα και άλλοι σημαντικοί καλλιτέχνες ασχολήθηκαν με το θέμα και ανάμεσα σ' αυτούς ο Albrecht Dürer και ο Leonardo da Vinci.

Σύστημα προβολής

Η προβολή ενός αντικειμένου επάνω σε ένα επίπεδο από ένα συγκεκριμένο σημείο Ο (καθ' υπόσταση), ονομάζεται **κεντρική προβολή** ή **προοπτική εικόνα του αντικειμένου** ή απλά **προοπτικό** (σχ. 6).



Το σημείο προβολής O , ονομάζεται **κέντρο προβολής** ή **σημείο οράσεως** ή **οπτικό κέντρο**.

Η επιφάνεια προβολής, είναι συνήθως ένα κατακόρυφο επίπεδο το οποίο ονομάζεται **πίνακας**.

Ο πίνακας τέμνει το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους κατά μία ευθεία που, ονομάζεται **βάση του πίνακα** ή **γραμμή του εδάφους (γε)** (σχ. 7).

Οι ευθείες που ξεκινούν από το κέντρο προβολής και προβάλλουν το αντικείμενο στο πίνακα, ονομάζονται **οπτικές ακτίνες**.

Το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο οράσεως O και είναι παράλληλο στο έδαφος, ονομάζεται **επίπεδο του ορίζοντα** (σχ. 8).

Η τομή του με τον πίνακα προβολής είναι μία ευθεία παράλληλη προς την γραμμή εδάφους (γε), και την ονομάζουμε **γραμμή του ορίζοντα (γο)**.

Είναι προφανές ότι η απόσταση της γραμμής του εδάφους από την γραμμή του ορίζοντα, ισούται με το ύψος του παρατηρητή (σχ. 9).

Συμβατικά το επίπεδο πίνακα προβολής ονομάζεται Π και το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους e_1 .

Το οριζόντιο επίπεδο e_1 είναι απαραίτητο στο παραπάνω προβολικό σύστημα για τον καθορισμό του αντικειμένου στο χώρο. Τα διάφορα σημεία του αντικειμένου εξαρτώνται από το e_1 μέσω του υψομέτρου τους.

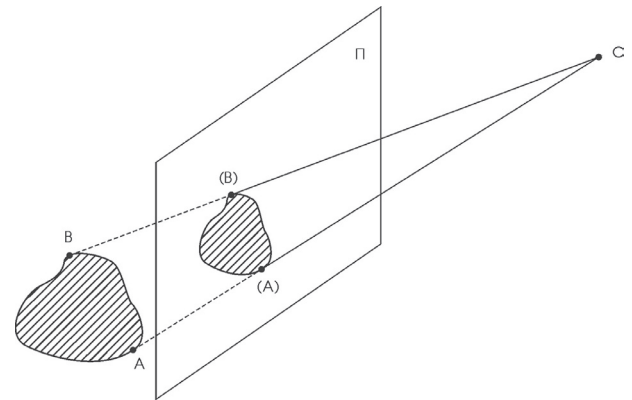
Προοπτικά βασικών σχημάτων του e_1

Προοπτικό ευθείας

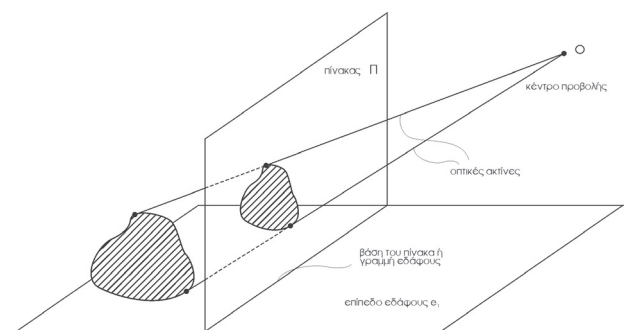
Προκειμένου να καθορίσουμε το προοπτικό μιας ευθείας a , αρκεί να προσδιορίσουμε τα προοπτικά δύο σημείων της.

Θεωρώντας επί της ευθείας a διάφορα σημεία B , Γ , Δ ..., τα προοπτικά τους (B) , (Γ) , (Δ) ..., στον πίνακα Π προσδιορίζονται αν τα προβάλλουμε από το O επί του επιπέδου Π , δηλαδή στην τομή των οπτικών ακτινών OB , $O\Gamma$, $O\Delta$ κλπ με το Π (σχ. 10).

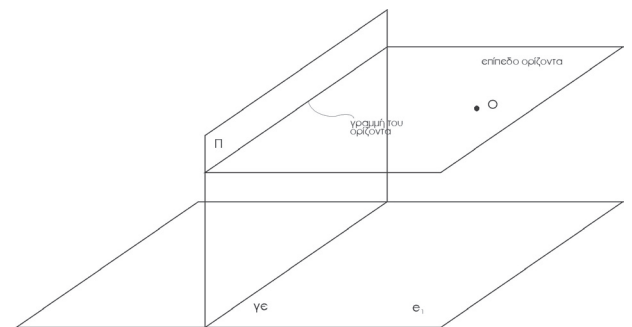
Παρατηρούμε ότι η τυχούσα ευθεία a του οριζοντίου επιπέδου e_1 συναντά τη βάση του πίνακα (γε) σε ένα σημείο A το οποίο έχει προοπτικό τον εαυτό του, δηλαδή $A=(A)$.



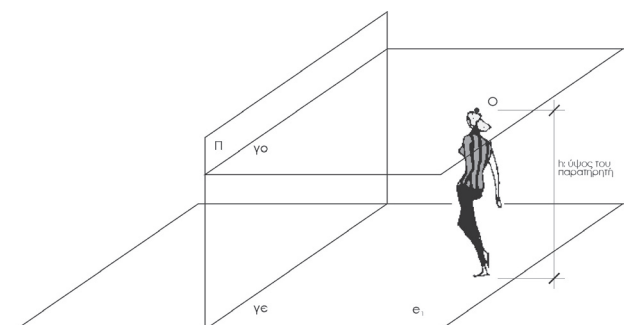
σχ. 6



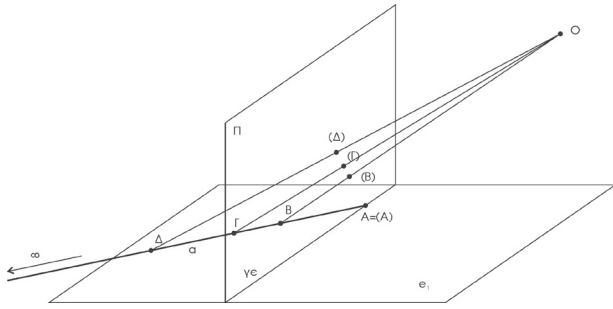
σχ. 7



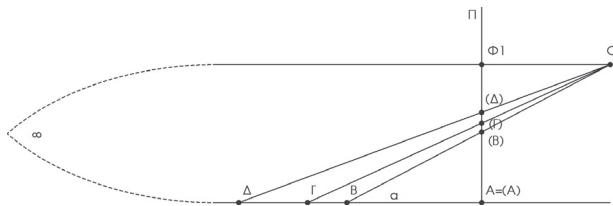
σχ. 8



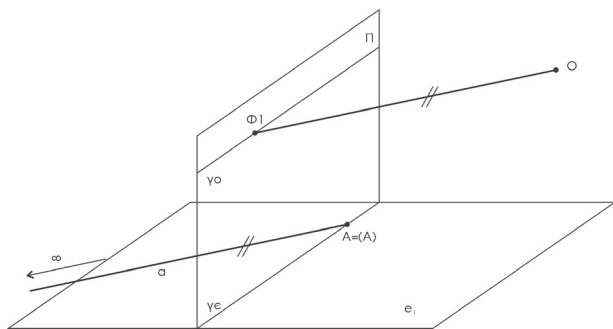
σχ. 9



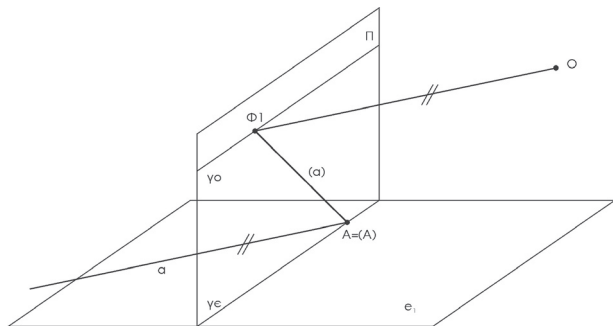
σχ. 10



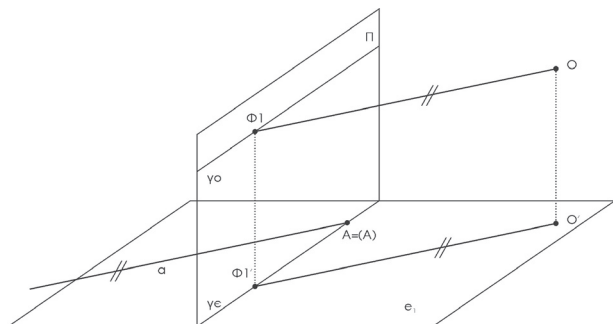
σχ. 11



σχ. 12



σχ. 13



σχ. 14

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε επί της a προς το άπειρο, οι οπτικές ακτίνες από το O τείνουν να γίνουν παράλληλες προς το e_1 και την a (σχ. 11).

Έτσι, η τομή της οπτικής ακτίνας -η οποία είναι παράλληλη στην a - με τον πίνακα Π είναι ένα σημείο της γραμμής του ορίζοντα και ονομάζεται **σημείο φυγής $\Phi 1$** της a (σχ. 12).

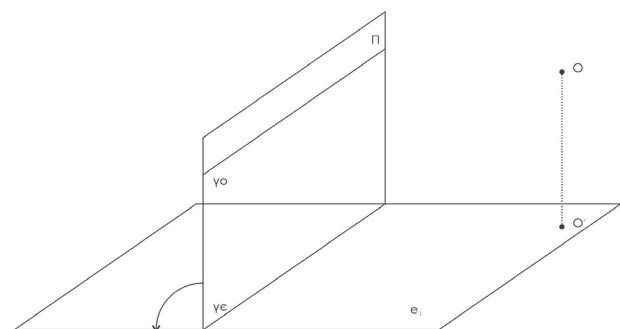
Σύμφωνα με τα παραπάνω, προκειμένου να εντοπίσουμε το σημείο φυγής της ευθείας a , αρκεί από το O να φέρουμε παράλληλη προς την a και να τμήσουμε το Π .

Δηλαδή το σημείο φυγής $\Phi 1$ τυχούσας ευθείας a του e_1 βρίσκεται στη γραμμή του ορίζοντα (γ_o), και είναι η τομή της οπτικής ακτίνας (με την οποία προβάλλεται από το O το επ' άπειρον σημείο $\Phi\omega$ της a) με το επίπεδο του πίνακα Π .

Ύστερα από την παραπάνω ανάλυση, για να βρούμε το προοπτικό ευθείας a του e_1 , που τέμνει τη βάση του πίνακα στο $A=(A)$, φέρνουμε την $O\Phi 1$ παράλληλη με την a και ορίζουμε το $\Phi 1$ στη γραμμή του ορίζοντα. Ενώνουμε το $\Phi 1$ με το $A=(A)$ και η ευθεία $\Phi 1(A)$, είναι η προοπτική (a) της a (σχ. 13).

Παρατηρούμε ότι αν O' είναι η προβολή του σημείου οράσεως O στο επίπεδο e_1 , η παράλληλη από την προβολή O' προς την ευθεία a , τέμνει τη βάση του πίνακα στο $\Phi 1'$, το οποίο είναι η προβολή του σημείου φυγής $\Phi 1$ στο επίπεδο του εδάφους (σχ. 14).

Έτσι, για να σχεδιάσουμε το σημείο φυγής $\Phi 1$ ευθείας a , μπορούμε να φέρουμε την $O'\Phi 1'$ παράλληλη στην a και από το σημείο τομής της $\Phi 1'$ με την γραμμή εδάφους φέρνουμε κάθετη σ' αυτή. Το σημείο τομής της κατακόρυφης με τη γραμμή του ορίζοντα είναι το σημείο φυγής $\Phi 1$.



σχ. 15 Κατάκλιση του Π στο e_1

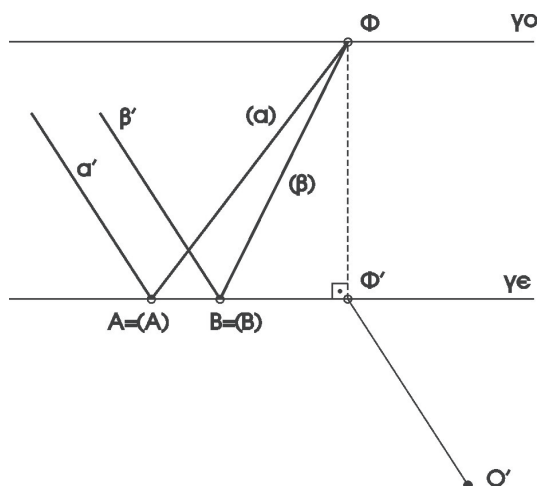
Προκειμένου να κατασκευάσουμε το προοπτικό της ευθείας στον δισδιάστατο χώρο, κατακλίνουμε το Π στο e_1 περιστρέφοντάς το περί την γραμμή του εδάφους (σχ. 15).

Η προοπτική εικόνα (α) της ευθείας a κατασκευάζεται τότε ως εξής: η ευθεία a συναντά τη γραμμή του εδάφους (βάση του πίνακα) στο σημείο A , το οποίο ταυτίζεται με το προοπτικό του (A). Η παράλληλη από το O' προς την a συναντάει την γραμμή εδάφους στο Φ' (προβολή του σημείου φυγής). Η κάθετη από το Φ' προς τη γραμμή του εδάφους τέμνει την γραμμή του ορίζοντα στο σημείο φυγής Φ . Η ευθεία ΦA είναι η (α), προοπτική εικόνα της ευθείας a (σχ. 16, 17).

Επειδή, όπως είναι φανερό, όλες οι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες έχουν κοινό επ' άπειρον σημείο, κατά συνέπεια θα έχουν κοινό σημείο φυγής (σχ. 18).

Επίσης παρατηρούμε ότι:

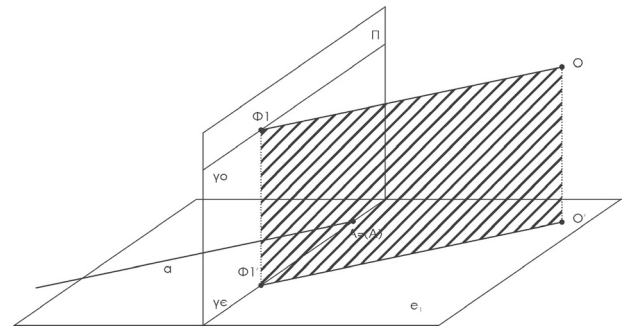
- η γραμμή του ορίζοντα είναι η ευθεία φυγής του οριζοντίου επιπέδου e_1 (σχ. 19).
- στη γραμμή του ορίζοντα ανήκουν τα σημεία φυγής όλων των οριζοντίων ευθειών.
- αν ευθεία a είναι κάθετη στη γ_e (και στον πίνακα Π), το σημείο φυγής της Φ_o είναι η ορθή προβολή του O στο Π και ονομάζεται **πρωτεύον σημείο φυγής** (σχ. 20).



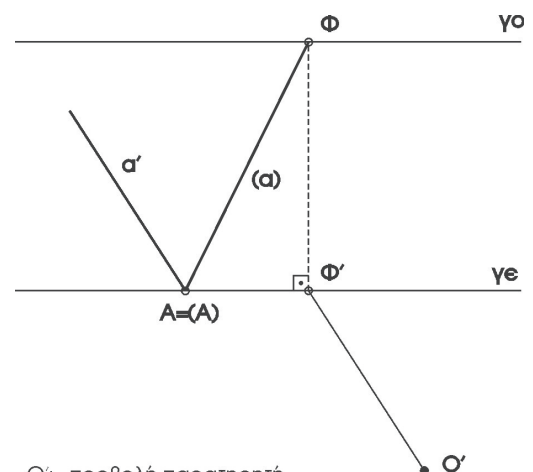
σχ. 18

Παράλληλη μετατόπιση βάσης

Προκειμένου να αποφεύγουμε την επικάλυψη του αρχικού σχήματος ενός αντικειμένου και του

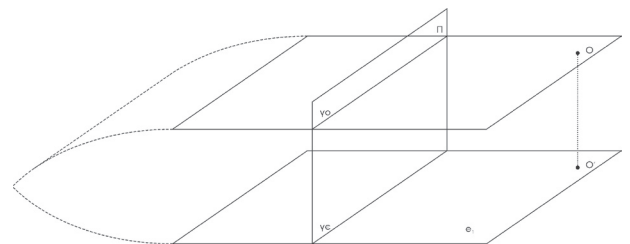


σχ. 16

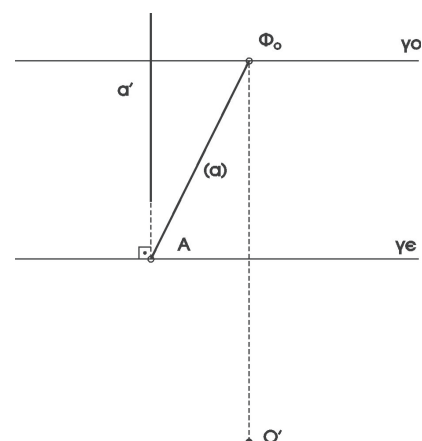


O' : προβολή παρατηρητή
 Φ : σημείο φυγής της a
 γ_e : γραμμή εδάφους
 γ_o : γραμμή ορίζοντα
 (a) : προοπτική της a

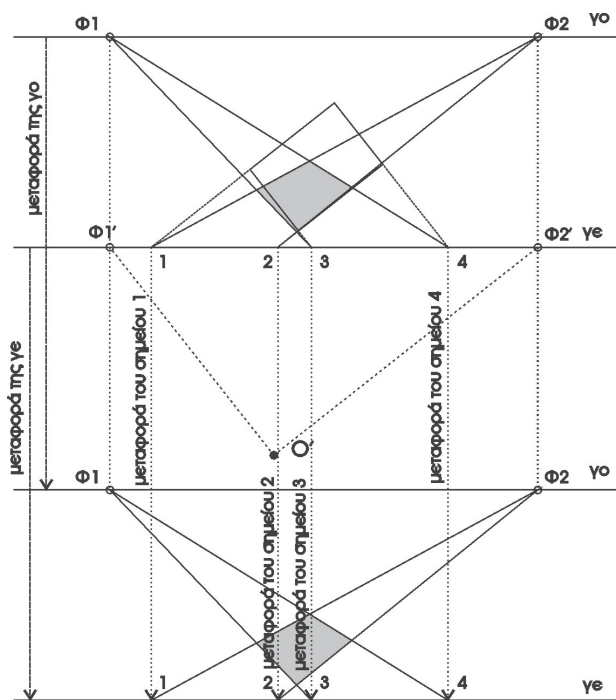
σχ. 17



σχ. 19



σχ. 20



σχ. 21

προοπτικού του, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της **παράλληλης μετατόπισης της βάσης** (σχ. 21). Διατηρούμε τα δεδομένα: γραμμή εδάφους, γραμμή ορίζοντα και αρχικό σχήμα στην αρχική τους θέση και μεταφέρουμε παράλληλα το προοπτικό με τα σημεία αναφοράς του σε νέα θέση.

Η απόσταση γραμμής εδάφους και γραμμής πίνακα δεν μεταβάλλεται. Η παράλληλη μεταφορά γίνεται αποκλειστικά και μόνο για λόγους ευκρίνειας του προοπτικού. Μετά την παράλληλη μεταφορά η αρχική γραμμή του ορίζοντα δεν είναι απαραίτητο να σχεδιάζεται.

Προοπτικό σημείου

Αν θεωρήσουμε ότι τυχαίο σημείο A είναι η τομή δύο ευθειών ρ και σ του e_1 , τότε η τομή των δύο προοπτικών ευθειών (ρ) και (σ) μας δίνουν την προοπτική εικόνα του A (σχ. 22).

Για να σχεδιάσουμε λοιπόν το προοπτικό τυχαίου σημείου A, σχεδιάζουμε πρώτα τα προοπτικά δύο ευθειών που περνούν από το A και η τομή τους μας δίνει το (A).

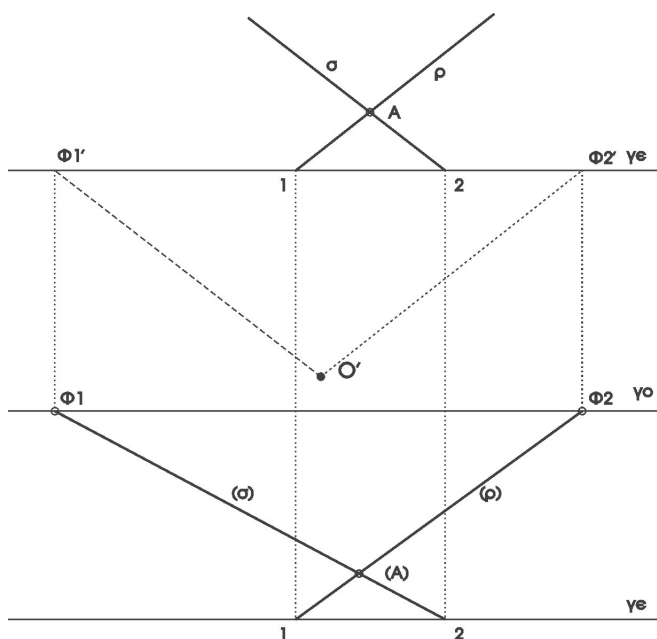
Οπτικές ακτίνες

Μια άλλη μέθοδος προσδιορισμού του προοπτικού του σημείου A είναι αυτή των **οπτικών ακτίνών** (σχ. 23).

Οπτικές ακτίνες είναι οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο οράσεως O και κάποιο σημείο A. Προβάλλουν δε τα σημεία του χώρου στον πίνακα Π.

Η οπτική ακτίνα OA και η προβολή της O'A στο e_1 , ορίζουν ένα κατακόρυφο επίπεδο OAO', το οποίο τέμνει τον πίνακα Π κατά την κατακόρυφη ευθεία $A_1(A)$, που διέρχεται από το προοπτικό του A, δηλαδή το (A) (σχ. 23). Παρατηρούμε ότι η προβολή O'A της οπτικής ακτίνας OA, τέμνει τη γραμμή του εδάφους σ' ένα σημείο A_1 . Η κάθετη από το A_1 στη γε περνάει από το προοπτικό (A) του A (σχ. 24).

Επισημαίνεται ότι η μέθοδος προσδιορισμού ενός σημείου μέσω οπτικής ακτίνας προαπαιτεί να έχει προσδιοριστεί η προοπτική εικόνα του *φορέα* του σημείου, δηλαδή η προοπτική εικόνα μιας ευθείας στην οποία ανήκει το ζητούμενο σημείο.



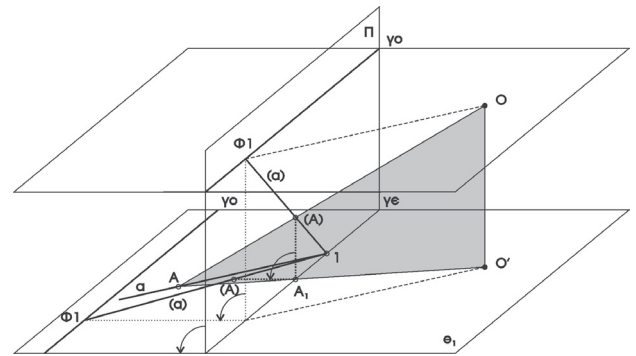
σχ. 22

Η μέθοδος αυτή σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του μετωπικού προοπτικού, που θα μελετήσουμε παρακάτω, αλλά και στις περιπτώσεις κατά τις οποίες κάποιο από τα σημεία φυγής βρίσκεται έξω από τη σχεδιαστική επιφάνεια.

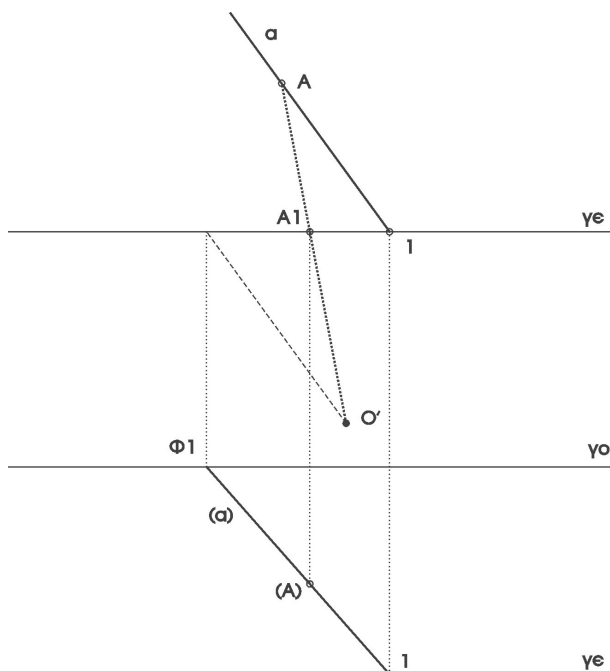
Προοπτικό τυχαίου σχήματος του επιπέδου

Σχεδιάζουμε στο ϵ_1 τυχαίο σχήμα π.χ. ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου ζητάμε την προοπτική εικόνα.

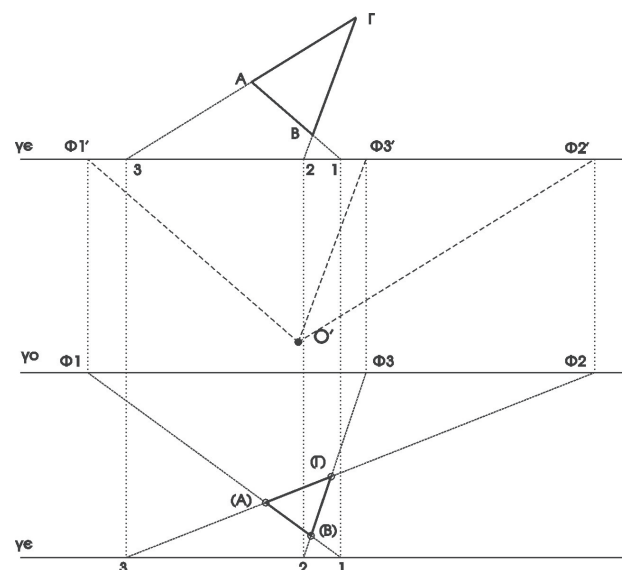
Προεκτείνουμε τις πλευρές του σχήματος $AB\Gamma$ μέχρι να συναντήσουν τη βάση του πίνακα ($\gamma\epsilon$) στα σημεία 1, 2, και 3, τα οποία σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπίπτουν με τις προοπτικές εικόνες τους. Από το O' φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου και προσδιορίζουμε τα σημεία $\Phi 1'$, $\Phi 2'$ και $\Phi 3'$ στη γραμμή του εδάφους. Κατόπιν ορίζουμε τα πραγματικά σημεία φυγής $\Phi 1$, $\Phi 2$ και $\Phi 3$ στη γραμμή του ορίζοντα. Βρίσκουμε τα προοπτικά των πλευρών του τριγώνου, ενώνοντας τα σημεία 1 και $\Phi 1$, 2 και $\Phi 2$ και 3 και $\Phi 3$. Το προοπτικό του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζεται από τις τομές των ευθειών αυτών (σχ. 25).



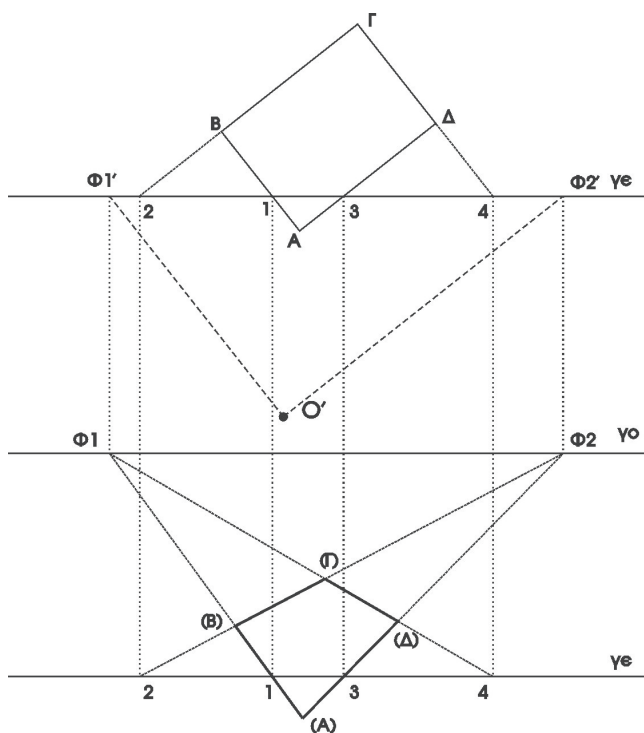
σχ. 23



σχ. 24



σχ. 25



σχ. 26

Προοπτικό παραλληλογράμμου

Προκειμένου να κατασκευαστεί το προοπτικό σχήμα παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, αρκεί να σχεδιάσουμε τα προοπτικά των τεσσάρων ευθειών των πλευρών του σχήματος.

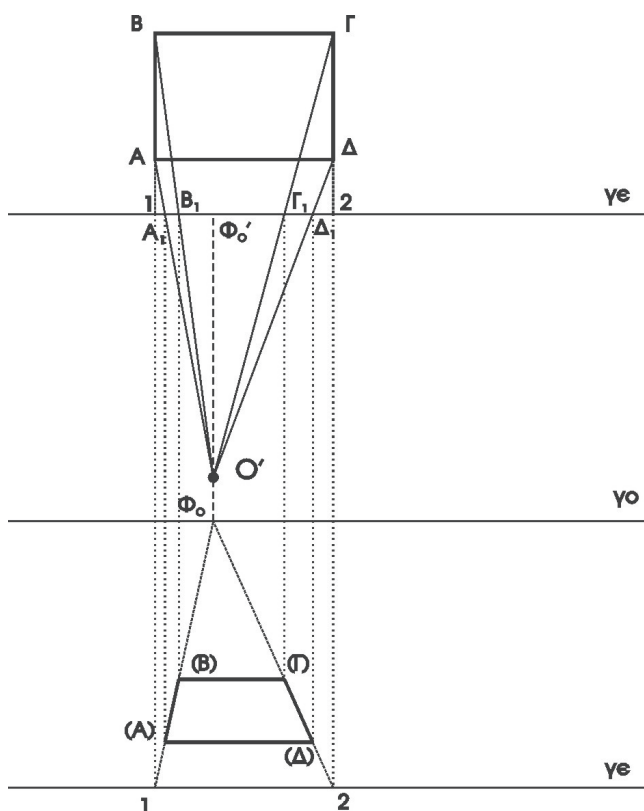
Σύμφωνα με τα παραπάνω, προεκτείνουμε όσες πλευρές του σχήματος δεν τέμνουν ήδη τη γραμμή εδάφους και ορίζουμε τα σημεία 1, 2, 3 και 4. Από το σημείο οράσεως O' φέρνουμε ευθείες παράλληλες στις πλευρές του παραλληλογράμμου και προσδιορίζουμε τα σημεία φυγής $\Phi 1$ και $\Phi 2$.

Προβάλλοντας τα σημεία 1 και 4 από το $\Phi 1$ και 2, 3 από το $\Phi 2$, προκύπτει το προοπτικό του σχήματος $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 26).

Προοπτικό παραλληλογράμμου - Μετωπικό προοπτικό

Είναι μια ειδική περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου, με το σχήμα μας να έχει πλευρές παράλληλες και κάθετες προς τον πίνακα (σχ. 27). Στην περίπτωση αυτή οι πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ έχουν σημείο φυγής το πρωτεύον σημείο Φ_o , ενώ οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ έχουν σημείο φυγής στο άπειρο. Το προοπτικό λέγεται *μετωπικό*.

Προεκτείνουμε τις AB και $\Gamma\Delta$ μέχρι να συναντήσουν τη $\gamma\epsilon$ στα σημεία 1 και 2 αντίστοιχα. Μπορούμε επομένως να προσδιορίσουμε τις προοπτικές εικόνες των AB και $\Gamma\Delta$, όμως δεν μπορούμε να ορίσουμε τα σημεία (Α), (Β), (Γ) και (Δ), παρά μόνο με τη μέθοδο των οπτικών ακτίνων.



σχ. 27

Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε προοπτικά ίσα μέρη

Το ευθύγραμμο τμήμα AB ζητούμε να χωριστεί σε 4 ίσα μέρη στην προοπτική του εικόνα (σχ. 28). Βρίσκουμε την προοπτική εικόνα του φορέα του AB και με οπτικές ακτίνες προσδιορίζουμε τα προοπτικά σημεία (Α) και (Β) των σημείων Α και Β. Από το σημείο (Α) σχεδιάζουμε οριζόντια ημιευθεία (Α) ϵ και ορίζουμε σ' εκείνη τα 4 ίσα μέρη. Χρησιμοποιούμε δηλαδή την εφαρμογή στην προοπτική του θεωρήματος του Θαλή¹, με τη διαφορά ότι αντί για παράλληλες ευθείες από

1. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 7

το σημείο (B) φέρνουμε *προοπτικά* παράλληλες ευθείες, δηλαδή συγκλίνουσες στο σημείο φυγής Φ2. Ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ2 τα υπόλοιπα τμήματα α της (A)ε και προσδιορίζουμε τα τμήματα $\bar{a}$, που είναι *προοπτικά* ίσα μεταξύ τους.

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε τμήματα ανάλογα, με δοθέντα λόγο.

Προοπτικά σχημάτων σε επίπεδα παράλληλα στο e_1

Προοπτικό οριζόντιας ευθείας

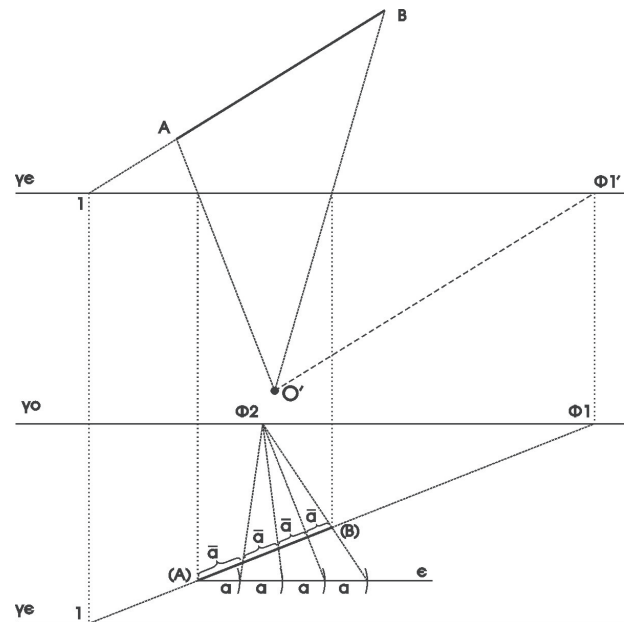
Μία οριζόντια ευθεία α, που δεν βρίσκεται στο επίπεδο e_1 έχει 1^η προβολή στο επίπεδο e_1 την ευθεία α'. Οι ευθείες α και α' είναι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες στο χώρο, επομένως έχουν κοινό σημείο φυγής Φ1 (σχ. 29). Η ευθεία α' τέμνει τη γε στο σημείο 1 και η ευθεία α τέμνει το επίπεδο του πίνακα στο σημείο M. Τα σημεία M και 1 βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη ευθεία και ορίζουν το υψόμετρο της ευθείας α από το επίπεδο του εδάφους e_1 . Κατακλίνοντας το επίπεδο Π στο e_1 , το υψόμετρο z_M θα παραμείνει ίσο με το πραγματικό υψόμετρο του σημείου M από το έδαφος.

Επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε την προοπτική εικόνα (α) της ευθείας α, ως εξής: από το σημείο 1, που είναι η τομή της προβολής α' της α με τη γραμμή του εδάφους γε, ορίζουμε κατακόρυφα το υψόμετρο z_M του σημείου M (σχ. 30) και ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ1. Η ευθεία Φ1M είναι η προοπτική εικόνα (α) της ευθείας α.

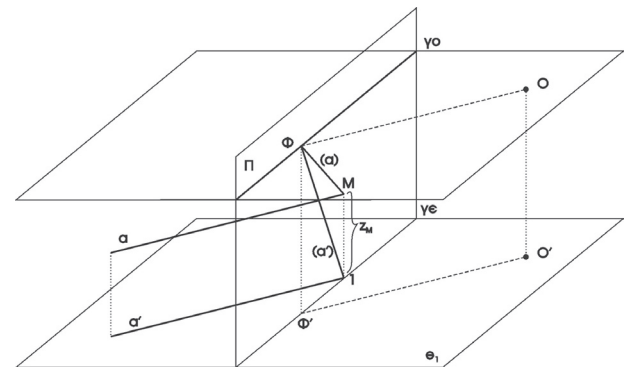
Προοπτικό ορθού πρίσματος

1. Το πρίσμα εδράζεται στο e_1

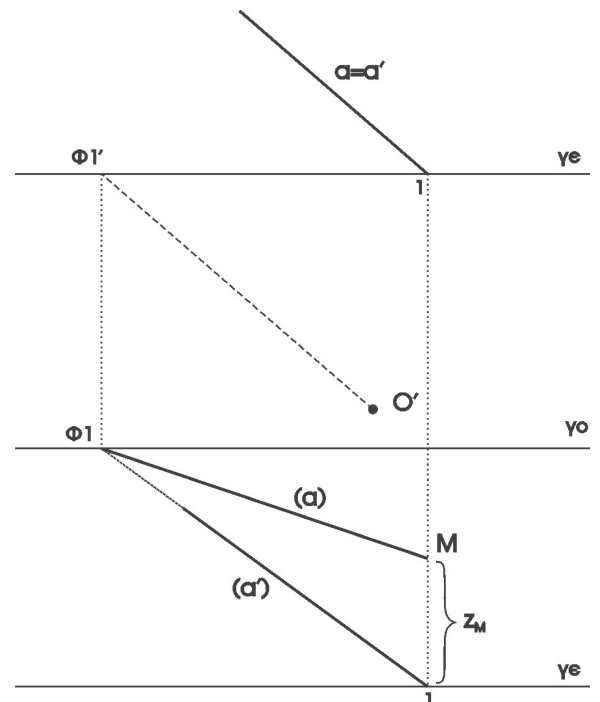
Αρχικά κατασκευάζουμε το προοπτικό της κάτω βάσης του πρίσματος, ενώνοντας τα σημεία 1 και 3 με το Φ2 και τα 2 και 4 με το Φ1 (σχ. 31). Φέρνουμε κάθετες ευθείες από καθένα από τα σημεία της κάτω βάσης του πρίσματος (A'), (B'), (Γ') και (Δ'). Από οποιοδήποτε από τα 1, 2, 3 ή 4, έστω το 4, φέρνουμε ευθεία κάθετη στη γε και ορίζουμε το σημείο 5, που



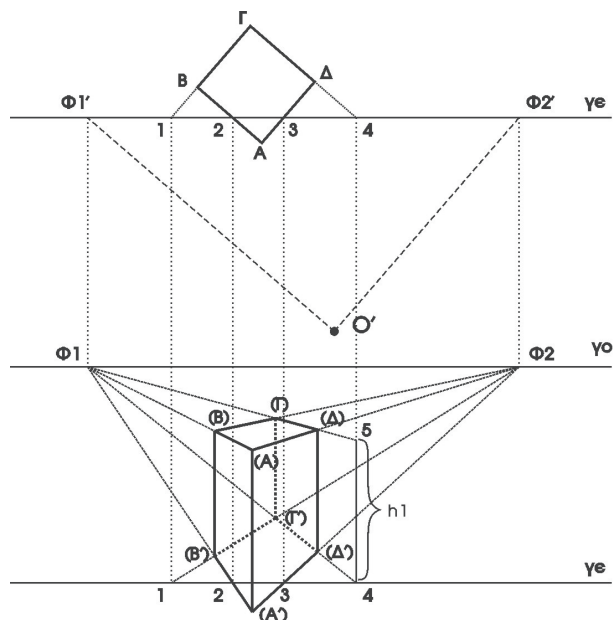
σχ. 28



σχ. 29



σχ. 30



σχ. 31

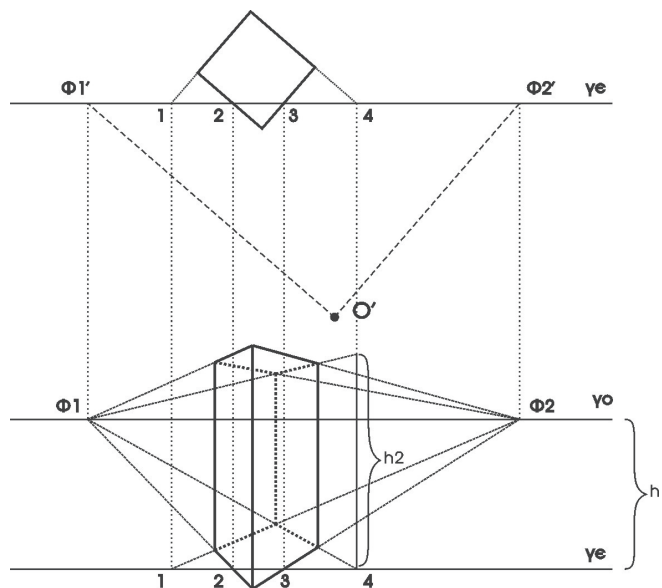
απεικονίζει το ύψος h_1 του πρίσματος. Ενώνουμε το σημείο 5 με το Φ_1 . Στην τομή της κάθετης από το (Δ') και της $5\Phi_1$ είναι το σημείο (Δ) , το προοπτικό του σημείου Δ της άνω βάσης του πρίσματος. Στην τομή της $\Phi_1(\Delta)$ με την κάθετη από το (Γ') βρίσκεται το σημείο (Γ) . Φέρνουμε τη $\Phi_2(\Gamma)$ και στην τομή της με την κάθετη από το (B') βρίσκεται το σημείο (B) κ.ο.κ.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στο πρίσμα του σχήματος 31 το ύψος του πρίσματος h_1 είναι μικρότερο από το ύψος του οριζοντα h και ως εκ τούτου ο παρατηρητής βλέπει την άνω βάση του πρίσματος, την έδρα $(A)(B)(\Gamma)(\Delta)$. Αντίθετα, στο σχήμα 32 το ύψος h του οριζοντα είναι μικρότερο από το ύψος h_2 του πρίσματος και ο παρατηρητής δεν βλέπει την άνω βάση του πρίσματος.

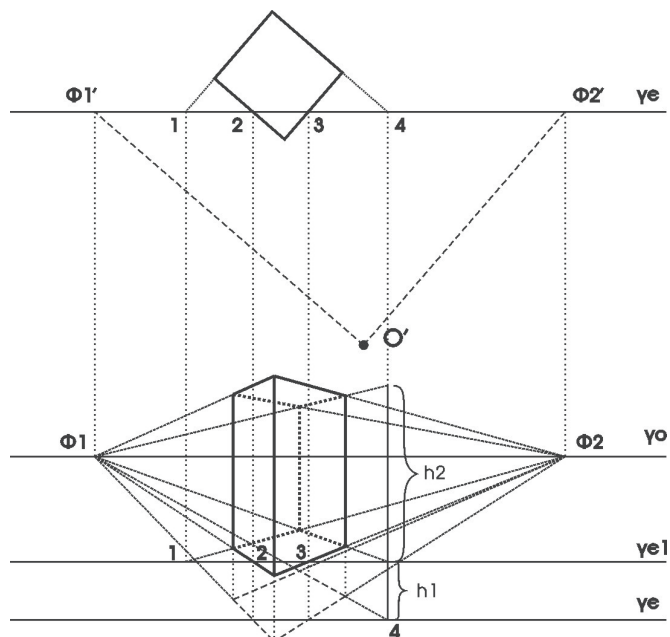
2 Το πρίσμα δεν εδράζεται στο θ_1

Στην περίπτωση αυτή το πρίσμα δεν εδράζεται στο επίπεδο θ_1 του εδάφους, αλλά απέχει απ' αυτό υψόμετρο h_1 κι έχει ύψος h_2 (σχ. 33).

Μπορούμε να εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζοντας το ύψος h_1 σε κάθε κάθετη από τα σημεία 1, 2, 3 και 4, όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πρίσμα εδράζεται σε ένα νέο έδαφος, που βρίσκεται σε υψόμετρο h_1 πάνω από το αρχικό. Έτσι η γ_e μετατοπίζεται κατά h_1 , στη γ_{e1} . Από εδώ και πέρα εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, προσδιορίζοντας τα σημεία 1, 2, 3 και 4, για να κατασκευάσουμε την κάτω βάση του πρίσματος, στη γ_{e1} , αντί της γ_e .



σχ. 32



σχ. 33



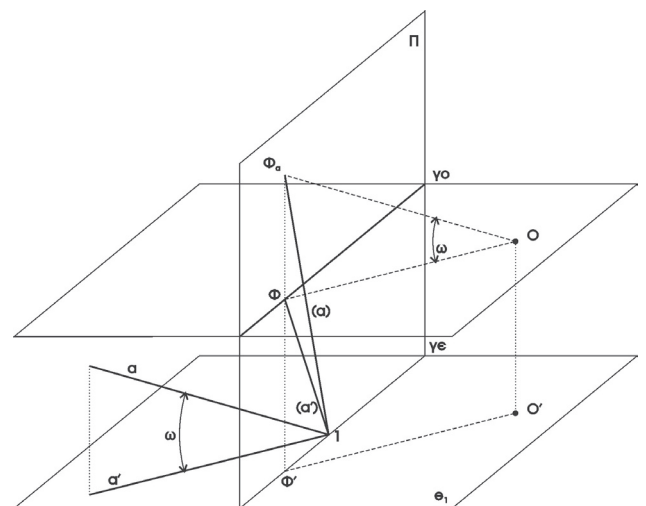
εικ. 34

Προοπτικό τυχαίας ευθείας

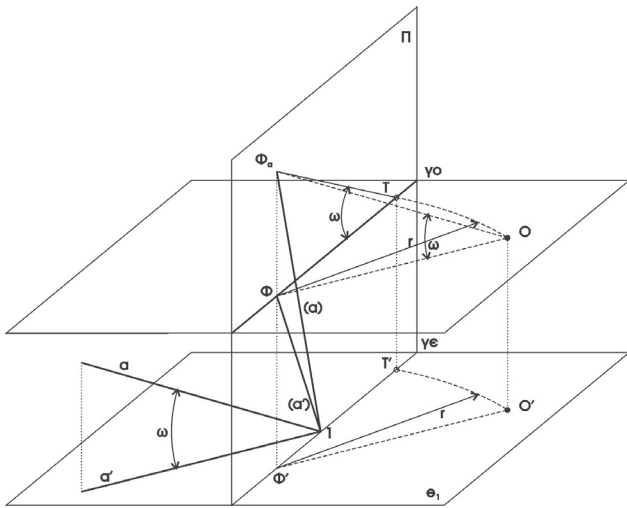
Όπως γνωρίζουμε ήδη, όλες οι οριζόντιες ευθείες έχουν σημεία φυγής πάνω στη γραμμή του ορίζοντα. Οι ευθείες που σχηματίζουν κάποια γωνία ω με το επίπεδο του εδάφους e_1 έχουν σημεία φυγής πάνω στο επίπεδο Π του πίνακα, αλλά όχι πάνω στον ορίζοντα. Σε οποιαδήποτε περίπτωση ισχύει η συνθήκη που ισχύει και για τις οριζόντιες ευθείες, ότι δηλαδή **οι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες του χώρου έχουν κοινό σημείο φυγής**

Η τυχαία ευθεία a έχει προβολή την a' στο επίπεδο e_1 και έστω ότι τέμνει το επίπεδο του πίνακα στο σημείο 1^2 (σχ. 35), όπως και η προβολή της a' . Η ευθεία a σχηματίζει με το e_1 (επομένως και με την a') γωνία ω , που αναπαριστά την κλίση της ευθείας a ως προς το επίπεδο e_1 . Για να προσδιορίσουμε το επ' άπειρον σημείο της a' , το σημείο φυγής της a' , φέρουμε από το O ευθεία παράλληλη στην a' , που τέμνει τον πίνακα στο σημείο Φ . Όμοια, για να βρούμε το σημείο φυγής της a , φέρουμε από το O ευθεία παράλληλη στην a , που τέμνει τον πίνακα στο σημείο $\Phi_{\alpha'}$. Η

2. Επειδή όλες οι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες έχουν κοινό σημείο φυγής, για τον προσδιορισμό του χρησιμοποιούμε μία από το σύνολο ευθειών, με ιδιότητα να τέμνει τον πίνακα σε σημείο 1 της βάσης του



σχ. 35

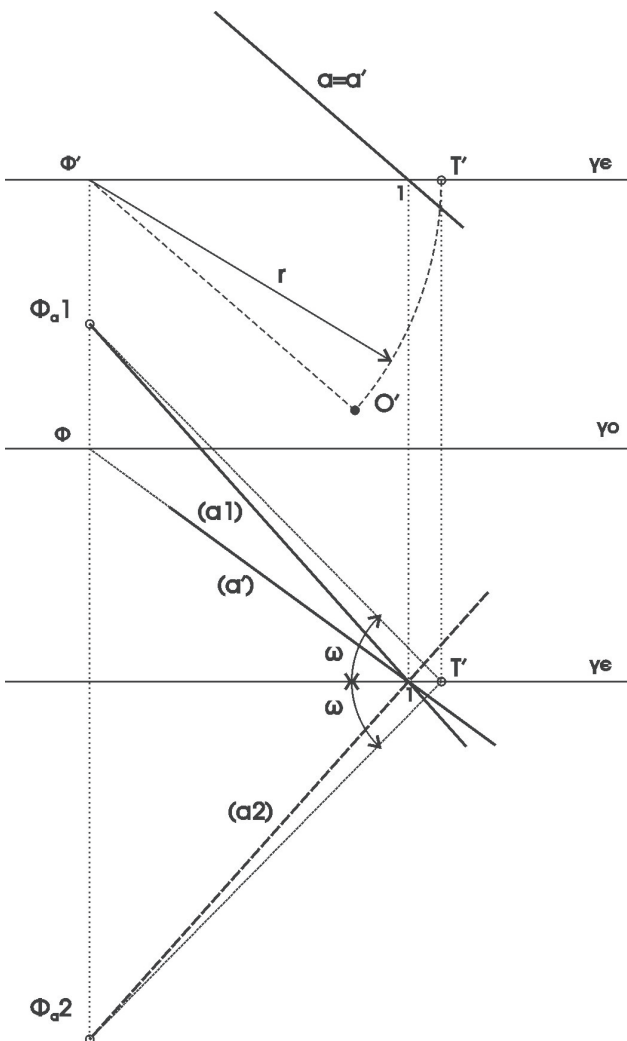


σχ. 36

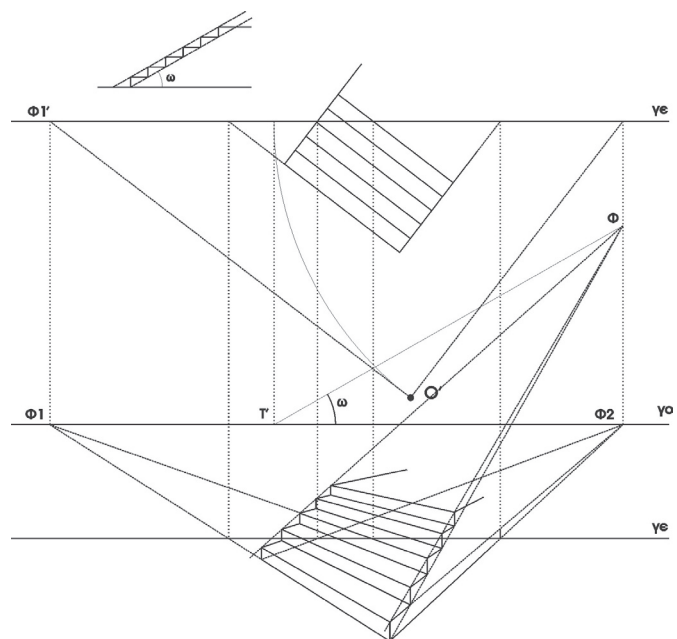
γωνία $\Phi_0 O \Phi$ είναι ίση με τη γωνία ω , λόγω των παραλλήλων φορέων τους. Το σημείο Φ_0 είναι το σημείο φυγής της α , η δε προοπτική εικόνα (α) της α είναι η ευθεία $\Phi_0 1$.

Η γωνία ω βρίσκεται στο χώρο και δεν μπορούμε στις δύο διαστάσεις μιας σχεδιαστικής επιφάνειας να προσδιορίσουμε το σημείο φυγής της α . Πρέπει επομένως να την μεταφέρουμε σε κάποιο από τα επίπεδα e_1 ή Π . Μεταφέρουμε τη γωνία $\Phi_0 O \Phi$ στον πίνακα Π (σχ. 36), γράφοντας τόξο κύκλου με κέντρο το σημείο Φ και ακτίνα $r = \Phi O$. Το σημείο O μεταφέρεται στο σημείο T . Η γωνία ω βρίσκεται τώρα στο επίπεδο Π και είναι η $\Phi_0 T \Phi$. Προβάλλουμε το τόξο (Φ, r) και το σημείο T στο επίπεδο e_1 , στα (Φ', r) και T' .

Μετά την κατάκλιση του Π στο e_1 και την παράλληλη μετατόπιση, έχουμε την εικόνα του σχήματος 37. Έχοντας την ευθεία α μέσω της προβολής της α' , βρίσκουμε το σημείο φυγής Φ της α' και την προβολή του Φ' . Με κέντρο Φ' και ακτίνα $r = \Phi' O'$ γράφουμε τόξο κύκλου, που τέμνει τη ye στο σημείο T' . Μεταφέρουμε το T' στη δεύτερη ye και σχηματίζουμε εκεί τη γνωστή γωνία ω . Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο γωνίες ω συμμετρικές, με άξονα συμμετρίας την ye . Ο φορέας της άνω γωνίας ω τέμνει την κατακόρυφη από το σημείο φυγής Φ στο σημείο φυγής $\Phi_0 1$ της $\alpha 1$. Η κάτω γωνία ω δίνει το σημείο φυγής $\Phi_0 2$ της $\alpha 2$, η οποία είναι στο χώρο συμμετρική της $\alpha 1$ ως προς το επίπεδο e_1 .



σχ. 37



σχ. 38

Θεωρήσαμε αρχικά ότι η κεκλιμένη ευθεία α έχει σημείο τομής με τον πίνακα Π ακριβώς πάνω στην $\gamma\epsilon$. Μια οποιαδήποτε ευθεία β , παράλληλη της α , θα έχει το ίδιο σημείο φυγής με την α , οπότε για τον προσδιορισμό του σημείου φυγής της β μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ευθεία α .

Ο προσδιορισμός των σημείων φυγής κεκλιμένων ευθειών εφαρμόζεται όταν το αντικείμενο που θέλουμε ν' απεικονίσουμε προοπτικά, περιλαμβάνει στέγες, ράμπες, όπως επίσης σκάλες με πολλά σκαλοπάτια, όπου είναι χρήσιμος ο προσδιορισμός του σημείου φυγής των ευθειών που ενώνουν τα άνω και κάτω σημεία των υψών (ριχτιών) των σκαλοπατιών (σχ. 38). Μια ακόμη εφαρμογή είναι σε θέματα σκιαγραφίας σε προοπτικές απεικονίσεις³.

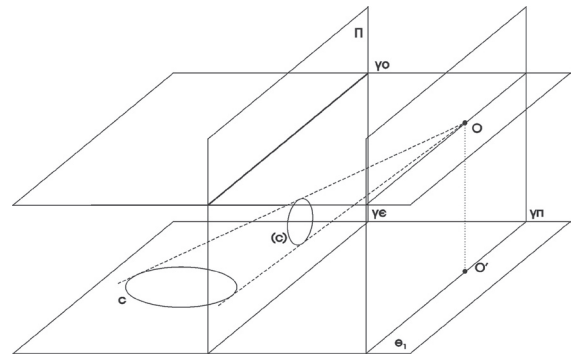
Προοπτικό κύκλου

Η προοπτική εικόνα ενός κύκλου είναι γενικά έλλειψη, αλλά αυτό εξαρτάται από τη θέση του παρατηρητή και του πίνακα.

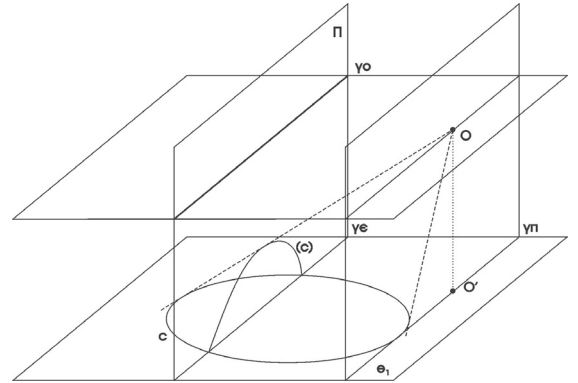
Ορίζουμε ένα επίπεδο παράλληλο στον πίνακα, που να περνά από το σημείο οράσεως. Η τομή του με το επίπεδο του εδάφους είναι η ευθεία $\gamma\pi$ (σχ. 39). Εάν η ευθεία $\gamma\pi$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο, η προοπτική εικόνα του είναι έλλειψη. Εάν η ευθεία $\gamma\pi$ έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο (σχ. 40), είναι δηλαδή εφαπτόμενη στον κύκλο, τότε η προοπτική εικόνα του κύκλου είναι τμήμα παραβολής. Τέλος, αν η ευθεία $\gamma\pi$ τέμνει τον κύκλο σε πάνω από ένα σημεία (σχ. 41), τότε η προοπτική εικόνα του κύκλου είναι τμήμα ενός σκέλους υπερβολής.

1. Προοπτικό κύκλου του επιπέδου θ_1

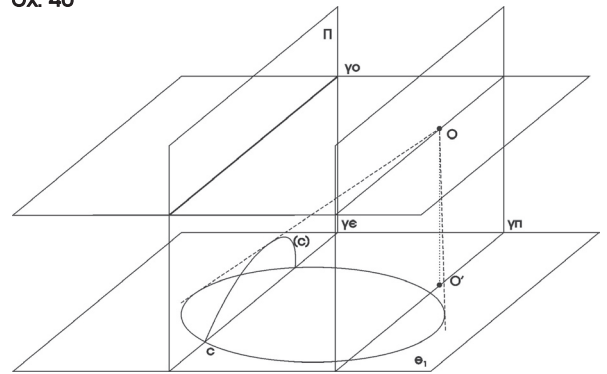
Είτε εργαζόμαστε σε μετωπικό προοπτικό, είτε σε προοπτικό δύο σημείων φυγής $\Phi 1$ και $\Phi 2$, κατασκευάζουμε το περιγεγραμμένο τετράγωνο του κύκλου $ΑΒΓΔ$, του οποίου προσδιορίζουμε την προοπτική εικόνα $(Α)(Β)(Γ)(Δ)$ (σχ. 42,43). Γράφουμε τις διαγωνίους $(Α)(Γ)$ και $(Β)(Δ)$. Από την τομή των διαγωνίων ενώνουμε με τα σημεία φυγής (στο μετωπικό προοπτικό ενώνουμε με το Φ_0 και φέρνουμε τη δεύτερη ευθεία παράλληλη στην



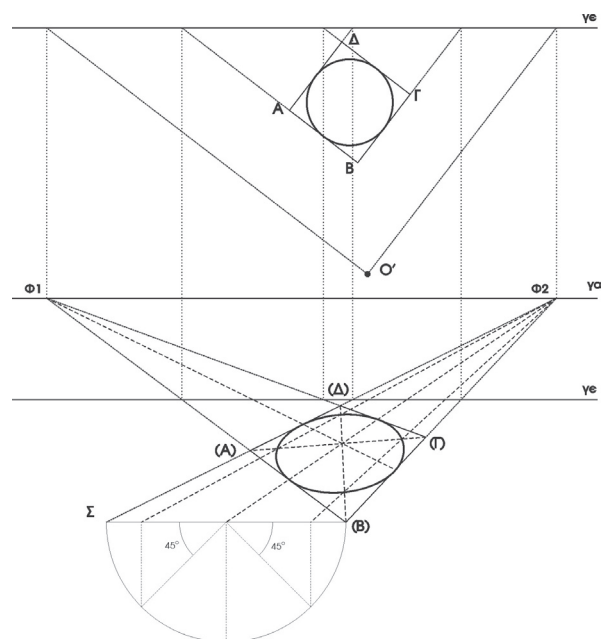
σχ. 39



σχ. 40

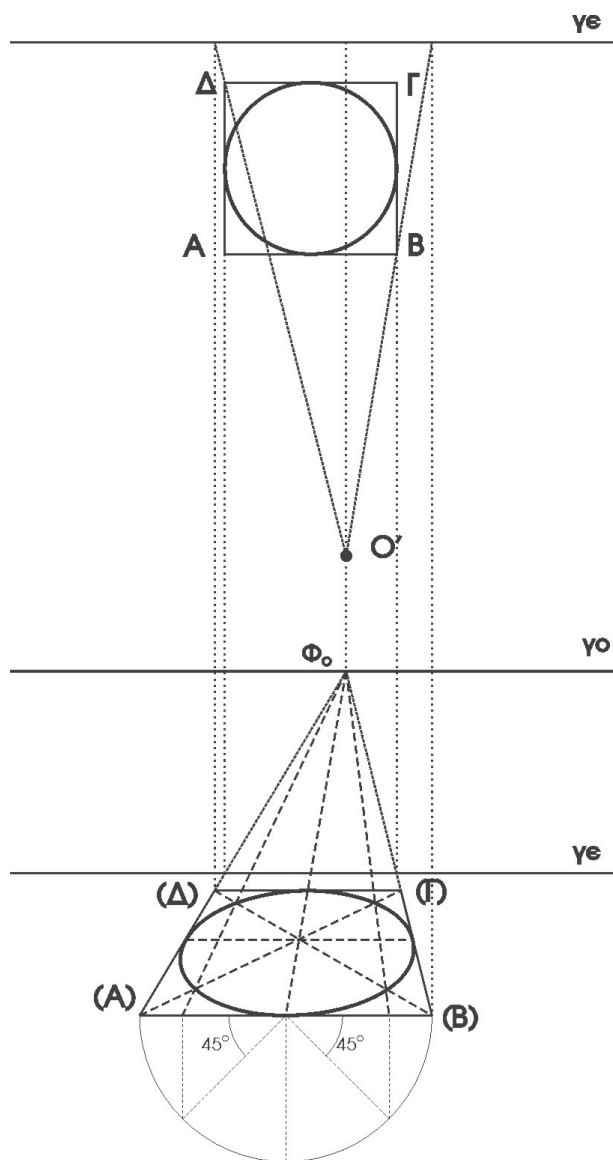


σχ. 41

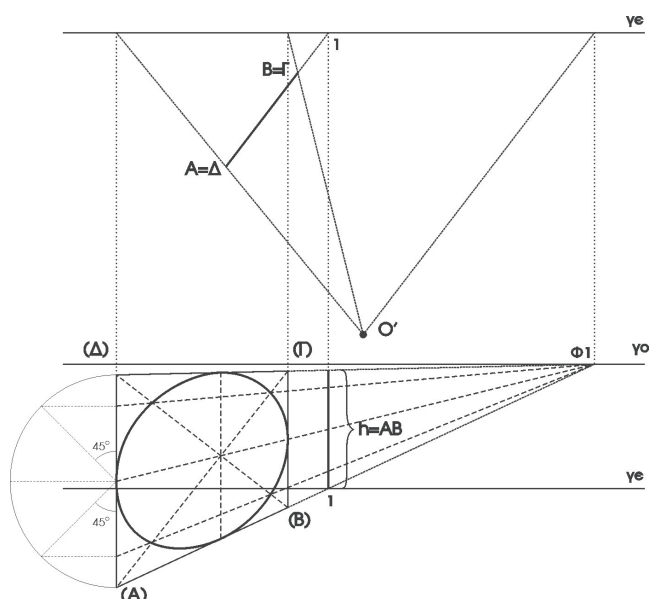


σχ. 42

3. βλ. Σκιαγραφία, Σκιαγραφία στην προοπτική



σχ. 43



σχ. 44

γε). Μ' αυτό τον τρόπο ορίζουμε τα σημεία επαφής της έλλειψης στις πλευρές του περιγεγραμμένου προοπτικού του τετραγώνου ABΓΔ. Τα τέσσερα αυτά σημεία επαφής δεν είναι γενικά αρκετά, ως εκ τούτου προσδιορίζουμε και τα σημεία τομής της έλλειψης με τις διαγωνίους (Α)(Γ) και (Β)(Δ):

- στο προοπτικό δύο σημείων, όπου η (Α)(Β) δεν είναι παράλληλη στη γε, κατασκευάζουμε από το (Β) ευθεία παράλληλη στη γε, μέχρι να τμήσει την προέκταση της (Α)(Δ) στο σημείο Σ (σχ. 42). Γράφουμε ημικύκλιο με κέντρο το μέσο του Σ(Β) και διάμετρο Σ(Β). Σχεδιάζουμε τις ακτίνες που σχηματίζουν γωνίες 45° με την Σ(Β) και φέρνουμε κάθετες στη γε ευθείες. Ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ₂.
- στο μετωπικό προοπτικό, όπου η (Α)(Β) είναι ευθεία παράλληλη στη γε, γράφουμε ημικύκλιο με κέντρο το μέσο της και διάμετρο το μήκος της (Α)(Β) (σχ. 43). Σχεδιάζουμε τις ακτίνες που σχηματίζουν γωνίες 45° με την (Α)(Β) και φέρνουμε κάθετες στη γε ευθείες. Ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ₀.

Γνωρίζοντας πλέον 8 σημεία (και στις δύο περιπτώσεις) της έλλειψης, η κατασκευή της γίνεται σχετικά εύκολα με γραφικό τρόπο.

2 Προοπτικό κατακόρυφου κύκλου

Η προβολή του κύκλου και του περιγεγραμμένου σ' αυτόν τετραγώνου έχουν προβολή στο ϵ_1 ένα ευθύγραμμο τμήμα, όπου τα σημεία Α, Δ και Β, Γ ταυτίζονται (σχ. 44). Κατασκευάζουμε την προοπτική εικόνα (Α)(Β) της κάτω πλευράς ΑΒ του περιγεγραμμένου τετραγώνου και στο σημείο 1 υψώνουμε κατά $h=AB$. Προσδιορίζουμε και τα σημεία (Γ) και (Δ), χαράσσουμε τις διαγωνίους (Α)(Γ) και (Β)(Δ) και χρησιμοποιούμε την πλευρά (Α)(Δ) ακριβώς όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα για να προσδιορίσουμε τα 8 σημεία από τα οποία διέρχεται η έλλειψη, η προοπτική εικόνα του κατακόρυφου κύκλου.

Στην ειδική περίπτωση που ο κύκλος βρίσκεται σε μετωπικό επίπεδο, η προοπτική του εικόνα είναι κύκλος.

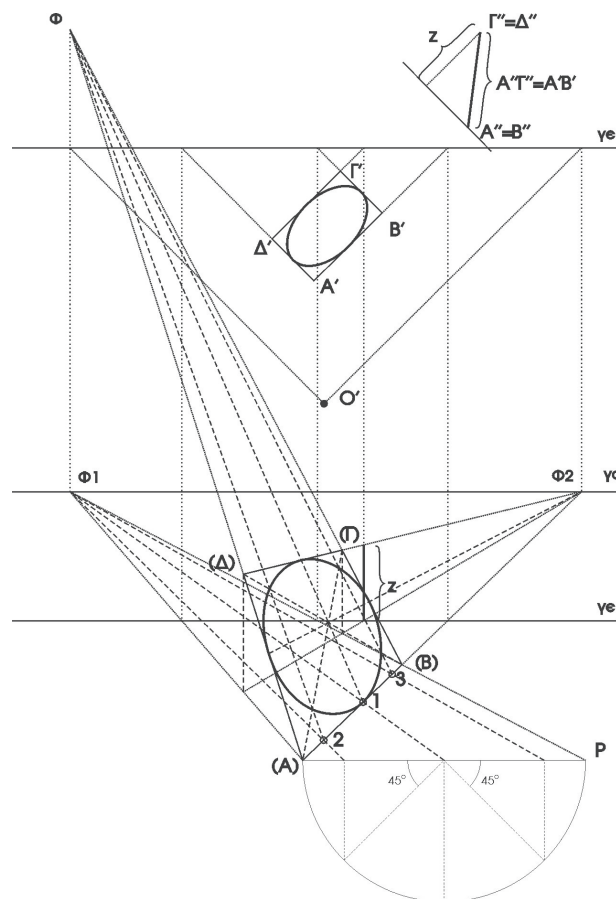
3. Προοπτικό κύκλου σε τυχαίο επίπεδο

Σ' αυτή την περίπτωση το περιγεγραμμένο του κύκλου τετράγωνο προβάλλεται στο επίπεδο e_1 στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $A'B'\Gamma'\Delta'$ (σχ. 45). Κατασκευάζουμε την προοπτική εικόνα του $AB\Gamma\Delta$ και προεκτείνουμε τις κεκλιμένες πλευρές $(A)(\Delta)$ και $(B)(\Gamma)$ μέχρι να τμήσουν την κατακόρυφη από το $\Phi 1$, προσδιορίζοντας έτσι το σημείο φυγής τους Φ . Γράφουμε τις διαγωνίους $(A)(\Gamma)$ και $(B)(\Delta)$ και ενώνουμε την τομή τους με τα Φ και $\Phi 2$.

Από το σημείο (A) φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη y_e μέχρι να τμήσει την προέκταση της $\Phi 1(B)$ στο σημείο P και κατασκευάζουμε ημικύκλιο με κέντρο το μέσο του $(A)P$ και διάμετρο $(A)P$.

Παρατηρούμε ότι η ευθεία που ενώνει το μέσο της $(A)P$ με το $\Phi 1$ διέρχεται από το σημείο 1, το οποίο είναι το σημείο της $(A)(B)$ όπου καταλήγει η προοπτική εικόνα της διαμέτρου του κύκλου από το Φ .

Σχεδιάζουμε τις ακτίνες που σχηματίζουν γωνίες 45° με την $(A)P$ και φέρνουμε κάθετες στην $(A)P$ ευθείες. Ενώνουμε με το σημείο φυγής $\Phi 1$ και προσδιορίζουμε τα σημεία 2 και 3, τα οποία ενώνουμε με το Φ . Ορίζουμε μ' αυτό τον τρόπο τα 8 βασικά σημεία της έλλειψης και τη σχεδιάζουμε γραφικά.



σχ. 45

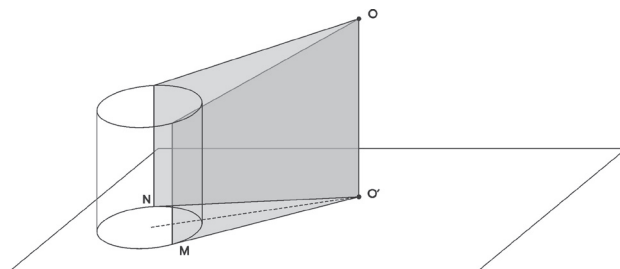
Προοπτικά στερεών σχημάτων

Από τα βασικά στερεά σχήματα, αυτά που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και κάποιες ιδιαιτερότητες στην κατασκευή της προοπτικής εικόνας τους είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα.

Προοπτικό κυλίνδρου

1. Κατακόρυφος κύλινδρος

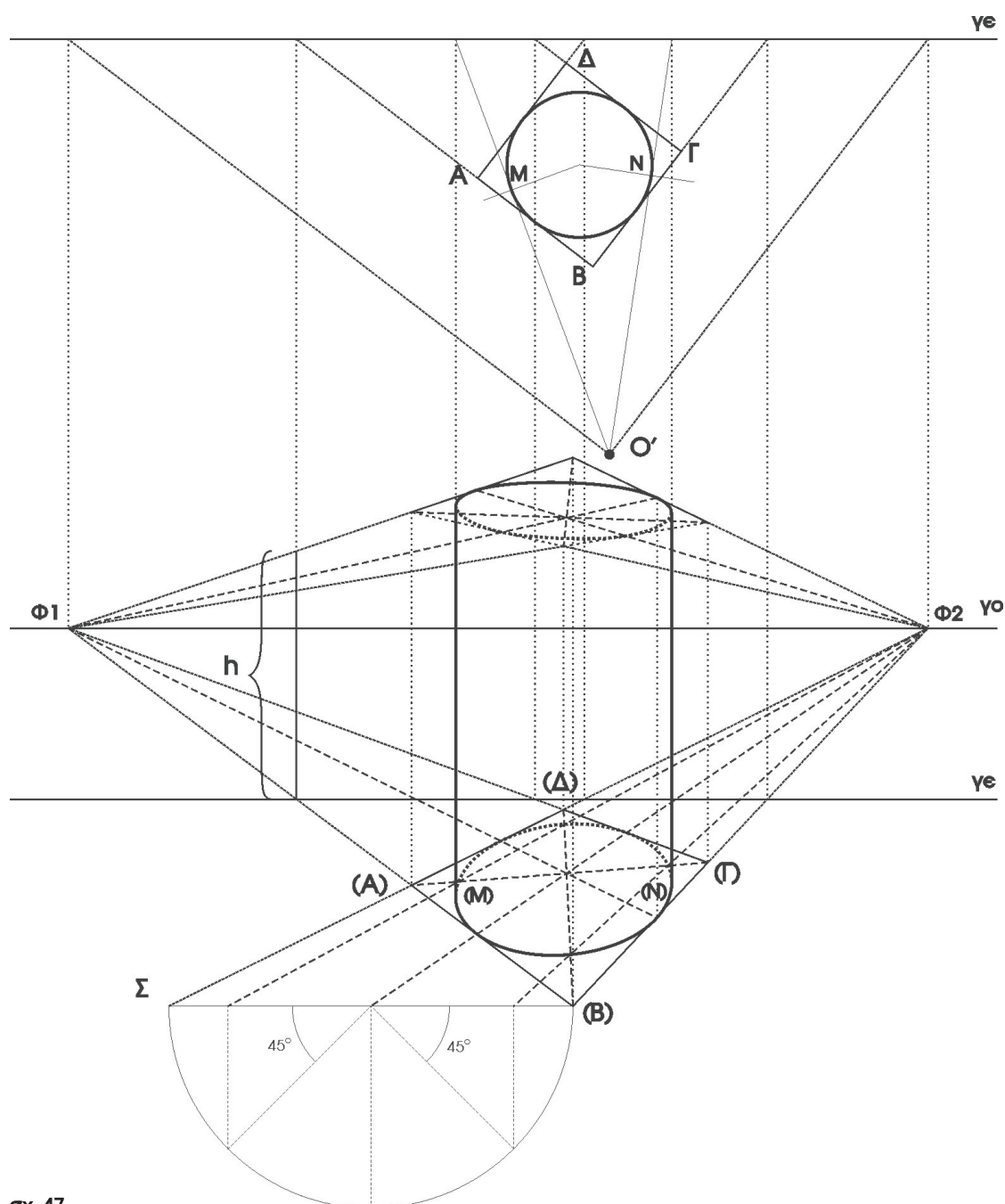
Η προοπτική εικόνα ορθού κατακόρυφου κυλίνδρου κατασκευάζεται ξεκινώντας από την κατασκευή των προοπτικών της κάτω και άνω βάσης του, που είναι κύκλοι σε παράλληλα οριζόντια επίπεδα. Κατασκευάζουμε το προοπτικό της κάτω βάσης, όπως είδαμε παραπάνω, προσδιορίζουμε το



σχ. 46

προοπτικό του περιγεγραμμένου τετραγώνου της άνω βάσης και μεταφέρουμε κατακόρυφα τα 8 σημεία ορισμού της έλλειψης της κάτω βάσης στους αντίστοιχους φορείς της άνω βάσης.

Οι ακραίες γενέτειρες ορίζονται από τα κατακόρυφα επίπεδα που εφάπτονται στις βάσεις του κυλίνδρου (σχ. 46). Για να προσδιορίσουμε τα σημεία επαφής Μ και Ν, φέρνουμε από το Ο' (σχ. 47) τις εφαπτόμενες στην προβολή των βάσεων του κυλίνδρου⁴, οι οποίες είναι ταυτόχρονα οι οπτικές ακτίνες των σημείων επαφής Μ και Ν.



σχ. 47

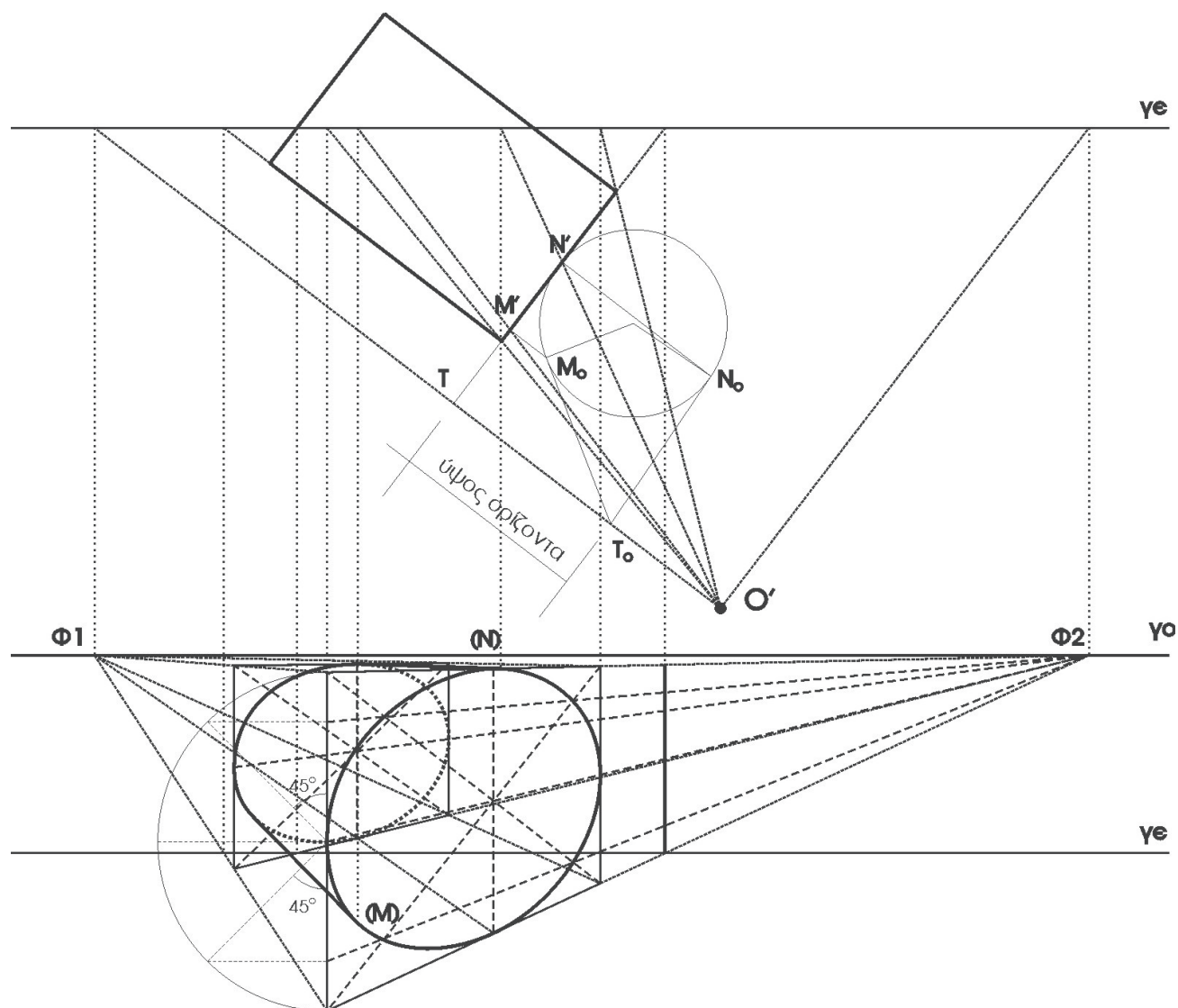
4. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 5

σx. 48

2 Οριζόντιος κύλινδρος

Ο οριζόντιος ορθός κύλινδρος εδράζεται στο επίπεδο e_1 και για να βρούμε την προοπτική του εικόνα κατασκευάζουμε κατ' αρχήν τις προοπτικές εικόνες των βάσεων του, που είναι κύκλοι σε δύο κατακόρυφα επίπεδα.

Οι ακραίες γενέτιρες ορίζονται από τα δύο κεκλιμένα επίπεδα, που φαίνονται στο σχήμα 48 και περνούν από το σημείο οράσεως.



σx. 49

5. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 24

Αρκεί επομένως να προσδιορίσουμε τα σημεία Μ και Ν στη μία από τις δύο βάσεις του κυλίνδρου, για να ορίσουμε τις ακραίες γενέτειρες συγκλίνουσες προς το σημείο φυγής Φ 1 (σχ. 49). Όπως φαίνεται στο σχήμα 48, το σημείο Τ είναι η προβολή του σημείου οράσεως Ο στο επίπεδο Π, το οποίο είναι το επίπεδο της μίας βάσης του κυλίνδρου. Το σημείο Τ απέχει από τη βάση του πίνακα απόσταση ίση με την ΟΟ', δηλαδή ίση με το ύψος της γραμμής του ορίζοντα από τη γραμμή εδάφους.

Έχοντας την προβολή του κυλίνδρου στο e_1 (σχ. 49), προεκτείνουμε τη μία από τις δύο ευθείες της βάσης του κυλίνδρου και κάνουμε κατάκλιση του επιπέδου Π στο επίπεδο e_1 . Ορίζουμε την απόσταση $ΤΤ_0$ ίση με το ύψος του ορίζοντα. Από το σημείο $Τ_0$ φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου⁶ και προσδιορίζουμε τα $Μ_0$ και $Ν_0$, τα οποία προβάλλουμε (ανακλίνουμε) στην προβολή της βάσης και ορίζουμε τα Μ' και Ν'. Φέρνουμε τέλος τις οπτικές ακτίνες προς τα Μ' και Ν' για να ορίσουμε τις προοπτικές εικόνες (Μ) και (Ν) των Μ και Ν (σχ. 49).

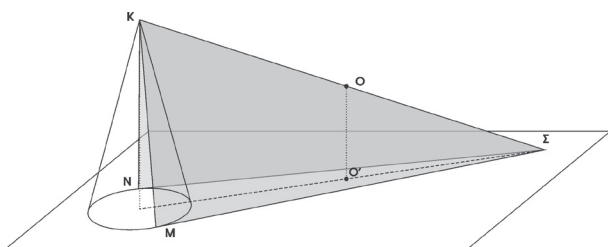
Και σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να βρούμε τις εφαπτόμενες στις ελλείψεις των βάσεων του κυλίνδρου μέσω της ευθείας Pascal⁷, θεωρώντας ότι φέρνουμε ευθείες εφαπτόμενες σε ελλείψεις από το σημείο Φ 1.

Προοπτικό κώνου

Η προοπτική εικόνα ενός κώνου προκύπτει από την προοπτική εικόνα της καμπύλης της βάσης του, όταν αυτή ενωθεί με το προοπτικό της κορυφής του. Όταν η βάση του κώνου είναι κύκλος του e_1 , εργαζόμαστε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, για να προσδιορίσουμε το προοπτικό της καμπύλης της βάσης του.

Το τμήμα του κώνου που ο παρατηρητής «βλέπει» (σχ. 50) ορίζεται από τα κεκλιμένα εφαπτόμενα επίπεδα προς τη βάση του κώνου, τα οποία περνούν από το σημείο οράσεως Ο. Τα σημεία Μ και Ν είναι τα σημεία των εφαπτομένων της βάσης του κώνου από το σημείο Σ, που ορίζεται σαν το ίχνος της ΚΟ στο επίπεδο της βάσης του κώνου.

Σύμφωνα με τα μέχρι τώρα γνωστά, κατασκευάζουμε το προοπτικό της βάσης του

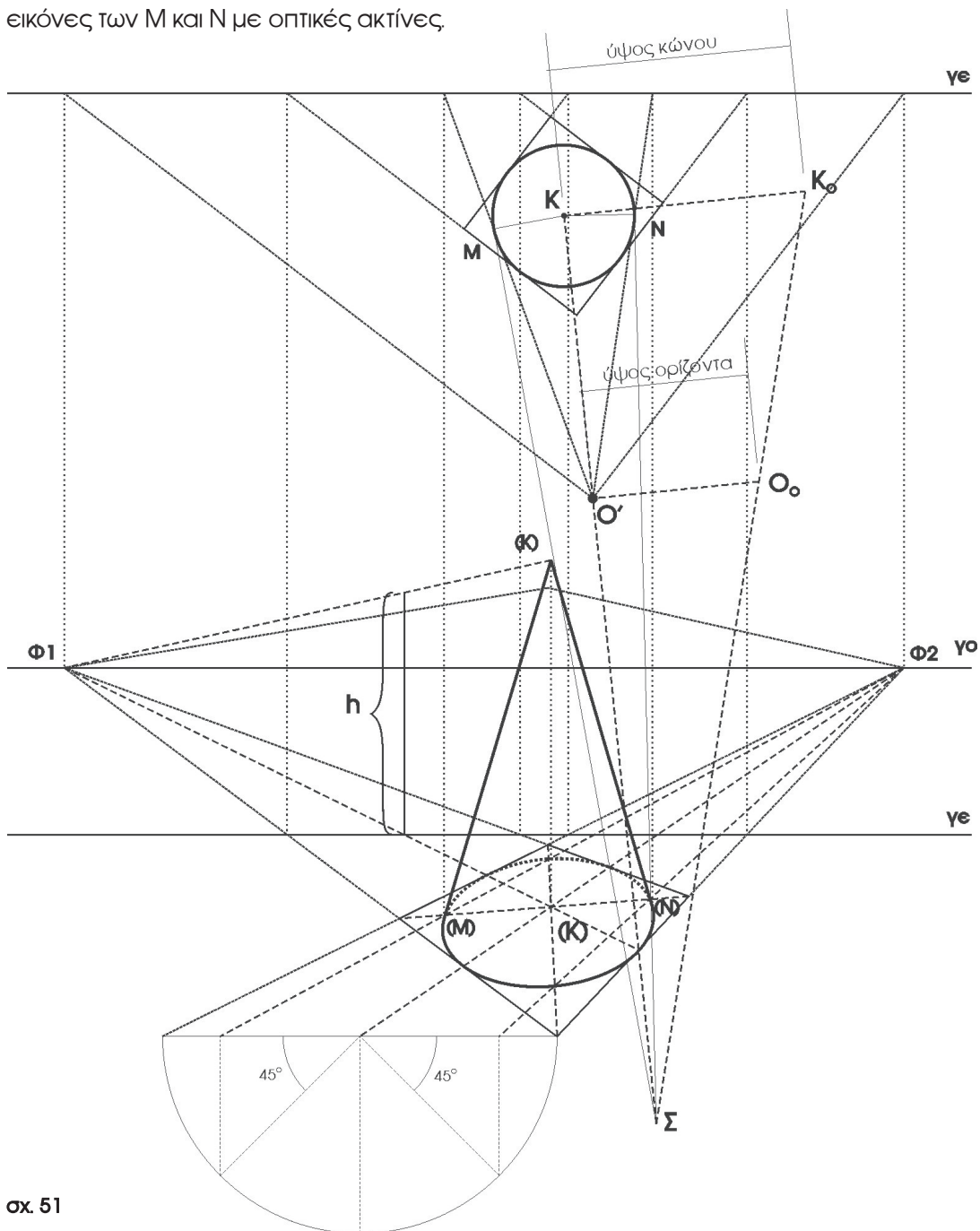


σχ. 50

6. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 5

7. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 23

κώνου και της κορυφής του (σχ. 51). Ενώνουμε τα σημεία O' και K στην προβολή του κώνου και από το σημείο K φέρνουμε ευθεία κάθετη στην KO' . Στην ευθεία αυτή υπολογίζουμε το ύψος του κώνου και ορίζουμε το σημείο K_o . Από το σημείο O' φέρνουμε ευθεία κάθετη στην KO' , υπολογίζουμε το ύψος του σημείου O (δηλαδή το ύψος του ορίζοντα) και ορίζουμε το σημείο O_o . Ενώνουμε τα K_o και O_o και προεκτείνουμε μέχρι η ευθεία να τμηθεί με την KO' στο σημείο Σ . Από το Σ φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο της βάσης του κώνου⁸ και ορίζουμε τα σημεία επαφής M και N . Βρίσκουμε τις προοπτικές εικόνες των M και N με οπτικές ακτίνες.



σχ. 51

8. βλ. παράρτημα Α, παρ. 5

Κι εδώ μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ακραίες γενέτειρες του κώνου με την ευθεία Pascal⁹, ως ευθείες εφαπτόμενες στην έλλειψη από το σημείο (Κ) της κορυφής του κώνου.

Προοπτικό σφαίρας

Η προοπτική εικόνα μιας σφαίρας είναι γενικά έλλειψη, όμως αυτό εξαρτάται από τη θέση του παρατηρητή και του πίνακα, όπως και στην περίπτωση του προοπτικού κύκλου.

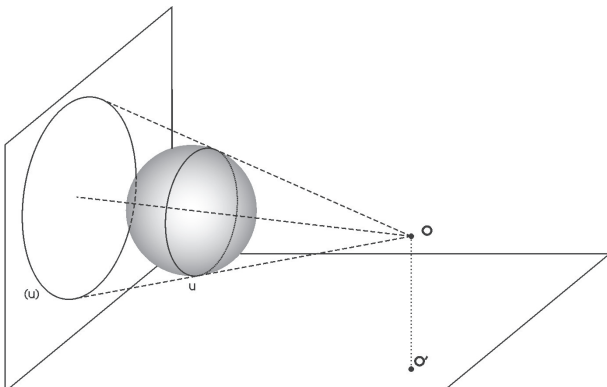
Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να απεικονίσουμε προοπτικά μια σφαίρα. Είναι όλοι προσεγγιστικοί και αποσκοπούν στην κατασκευή της καμπύλης u , που είναι η αλληλοτομία της σφαίρας και του οπτικού κώνου (σχ. 52).

Σύμφωνα με τη μέθοδο που συνήθως χρησιμοποιούμε για την κατασκευή της προοπτικής εικόνας μιας σφαίρας, αρκεί να κατασκευάσουμε τις προοπτικές εικόνες των κύκλων $c_1, c_2, c_3, \dots$ που προκύπτουν από την τομή της σφαίρας με διάφορα (σε τυχαίες θέσεις) μετωπικά ή οριζόντια επίπεδα και να κατασκευάσουμε την *περιβάλλουσα* καμπύλη, δηλαδή την έλλειψη που εφάπτεται στις $(c_1), (c_2), (c_3), \dots$

Μεταξύ της επιλογής οριζοντίων ή μετωπικών επιπέδων τομής της σφαίρας, εδώ θα προτιμήσουμε να μελετήσουμε τα μετωπικά επίπεδα, διότι αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στον υπολογισμό της σκιάς της σφαίρας¹⁰.

Κατ' αρχήν προσδιορίζουμε την προοπτική εικόνα (s) του οριζώντιου κύκλου s της σφαίρας, χρησιμοποιώντας το περιγεγραμμένο τετράγωνο που είναι παράλληλο στη γε (σχ. 53).

Κάθετα στη διάμετρο MN ορίζουμε διάφορα τυχαία μετωπικά επίπεδα, τα οποία τέμνουν τη σφαίρα στους κύκλους c, c_1, c_2 . Οι μετωπικοί κύκλοι που δημιουργούνται, έχουν τα κέντρα τους K, K_1, K_2 στη διάμετρο MN και εφάπτονται στον οριζόντιο κύκλο s στα A, A_1, A_2 . Με οπτικές ακτίνες βρίσκουμε τα προοπτικά σημεία $(K), (K_1), (K_2)$ των κέντρων στη $(M)(N)$ και χαράσσουμε τις οριζόντιες ευθείες – διαμέτρους των c, c_1, c_2 . Οι κύκλοι c, c_1, c_2 απεικονίζονται προοπτικά στους κύκλους $(c), (c_1), (c_2)$.



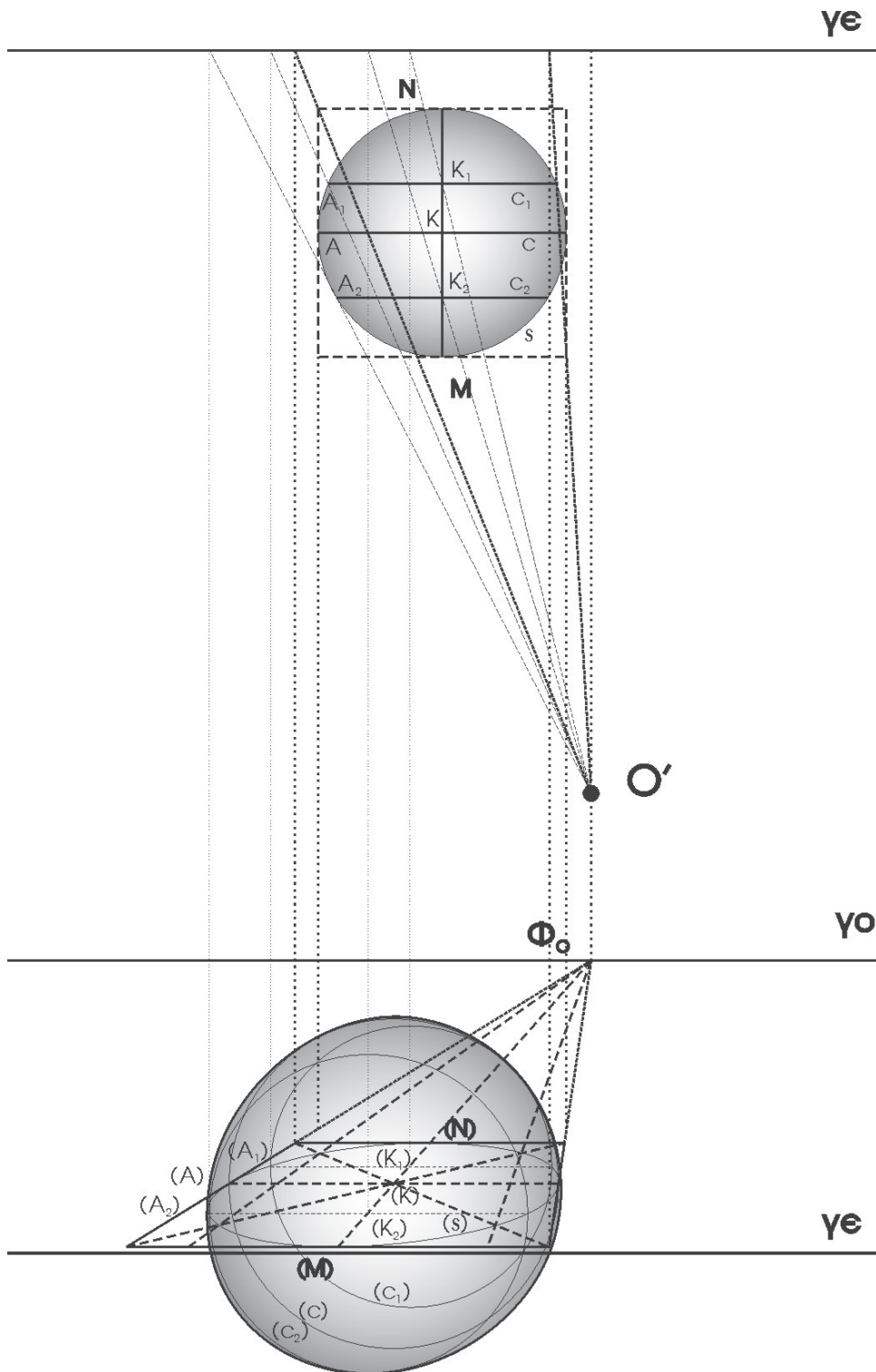
σχ. 52

9. βλ. παράρτημα Α, παρ. 23

10. βλ. Σκιαγραφία, σκιαγραφία στην προοπτική, Σκιά σφαίρας

Η περιβάλλουσα είναι η καμπύλη που εφάπτεται στους κύκλους (c) , (c_1) , (c_2) και προσδιορίζεται κατά προσέγγιση.

Άλλος τρόπος προσδιορισμού του προοπτικού σφαίρας είναι μέσω του θεωρήματος του Dandelin¹¹.



σx. 53

11. βλ παράρτημα Β

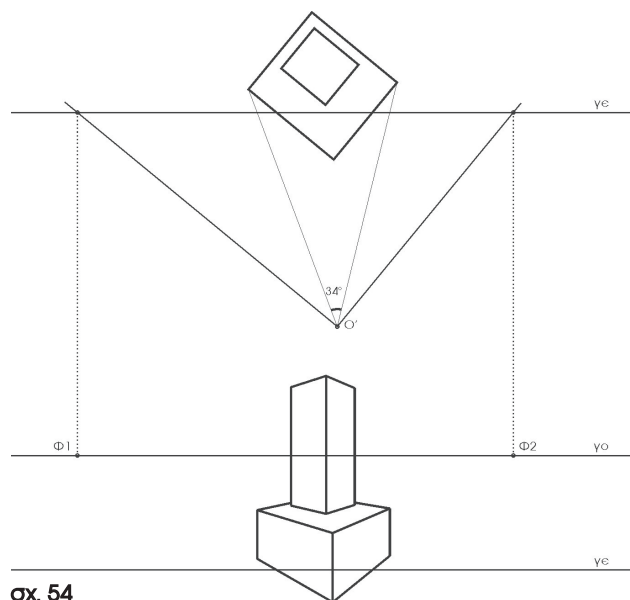
Σχετικές θέσεις παρατηρητή, αντικειμένου, πίνακα και ορίζοντα

Το οπτικό εύρος του ανθρώπινου ματιού έχει υπολογιστεί περίπου στις 93° . Για το λόγο της σχεδιαστικής απλούστευσης, θεωρούμε το οπτικό εύρος στις 90° . Μέσα σ' αυτή τη γωνία των 90° πρέπει να βρίσκεται το αντικείμενο, του οποίου την προοπτική εικόνα ζητούμε να σχεδιάσουμε. Φροντίζουμε όμως να μην χρησιμοποιούμε ολόκληρο αυτό το εύρος, αλλά μόνο τις *κεντρικές* 30° - 45° (σχ. 54). Στην αντίθετη περίπτωση η προοπτική εικόνα του αντικειμένου παρουσιάζει έντονη παραμόρφωση (σχ. 55).

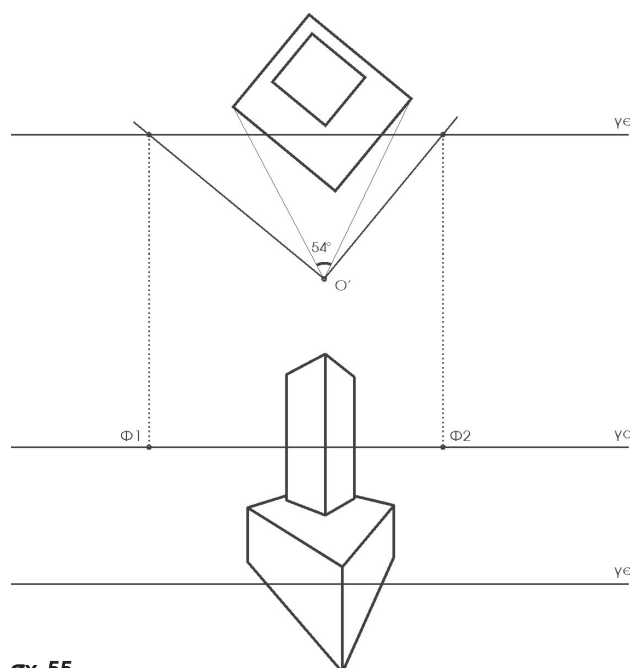
Παρατηρούμε ότι αν σχεδιάσουμε τις οπτικές ακτίνες που περνούν από τα άκρα του αντικειμένου, σχηματίζεται πάνω στον πίνακα το μέγιστο πλάτος α της προοπτικής εικόνας (σχ. 56). Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε ευθύς εξ αρχής να γνωρίζουμε το μέγεθος της προοπτικής εικόνας, τουλάχιστον κατά το πλάτος.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν ο πίνακας τέμνει το αντικείμενο και αφήνεται κάτω από τον πίνακα μέγεθος β , κατά την παράλληλη μετατόπιση, αφήνοντας χώρο περίπου ίσο με β από την άκρη της σχεδιαστικής επιφάνειας, το προοπτικό δεν κινδυνεύει να βρεθεί εκτός της σχεδιαστικής επιφάνειας (σχ. 56).

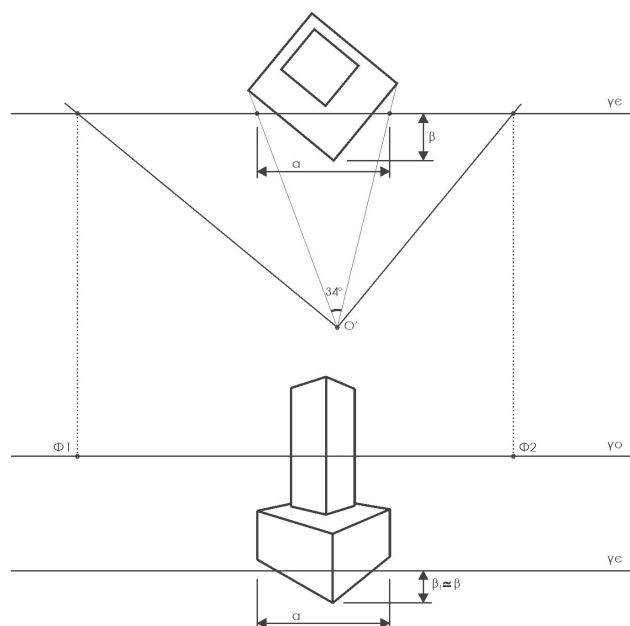
Η θέση του πίνακα, δηλαδή της γραμμής του εδάφους γε, μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα



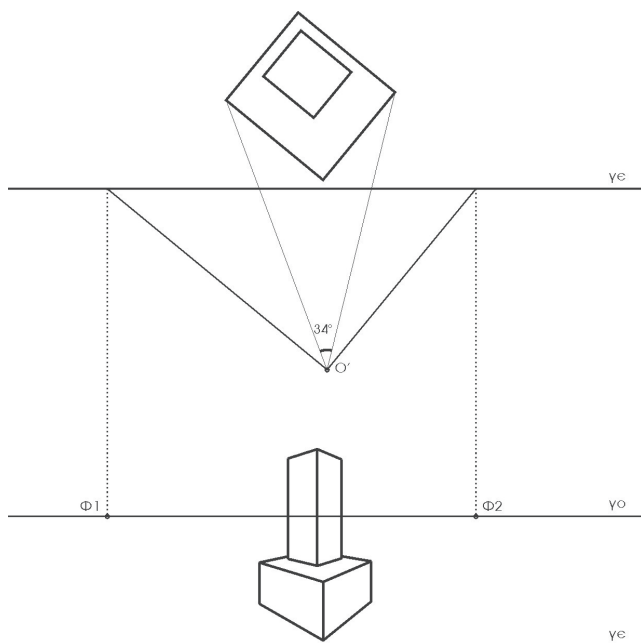
σχ. 54



σχ. 55



σχ. 56



σχ. 57

στον παρατηρητή και το αντικείμενο, πίσω από το αντικείμενο, ή να τέμνει το αντικείμενο. Η θέση του πίνακα έχει να κάνει κυρίως με το μέγεθος της προοπτικής εικόνας. Όσο πιο κοντά βρίσκεται ο πίνακας στον παρατηρητή, τόσο το προοπτικό μικραίνει, ενώ όσο ο πίνακας απομακρύνεται από τον παρατηρητή, η προοπτική εικόνα μεγαλώνει (σχ. 54,57).

Ανακλάσεις στο προοπτικό

Ανάκλαση ονομάζουμε τον αντικατοπτρισμό ενός αντικειμένου σε ανακλαστική επιφάνεια.

Το θέμα των αντικατοπτρισμών παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να «δούμε» τις πλευρές των αντικειμένων που στην πραγματικότητα δεν βλέπουμε (εικ. 58) και ταυτόχρονα ολοκληρώνουν τις προοπτικές εικόνες.

Η θεμελιώδης πρόταση της θεωρίας των επιπέδων κατόπτρων αναφέρει ότι **η γωνία προσπτώσεως μιας φωτεινής ή οπτικής ακτίνας στην κατοπτρική επιφάνεια είναι ίση με τη γωνία ανακλάσεώς της** (σχ. 59). Η ανάκλαση γίνεται σε επίπεδο κάθετο στο επίπεδο της κατοπτρικής επιφάνειας και περιέχει τη φωτεινή ή οπτική ακτίνα. Για το λόγο αυτό κάθε αντικείμενο και η ανάκλασή του σε επίπεδο κάτοπτρο είναι σχήματα συμμετρικά ως προς την κατοπτρική επιφάνεια. Η γωνία προσπτώσεως ω είναι η γωνία που σχηματίζει η φωτεινή/οπτική ακτίνα με την κατακόρυφη της κατοπτρικής επιφάνειας στο σημείο πρόσπτωσης.

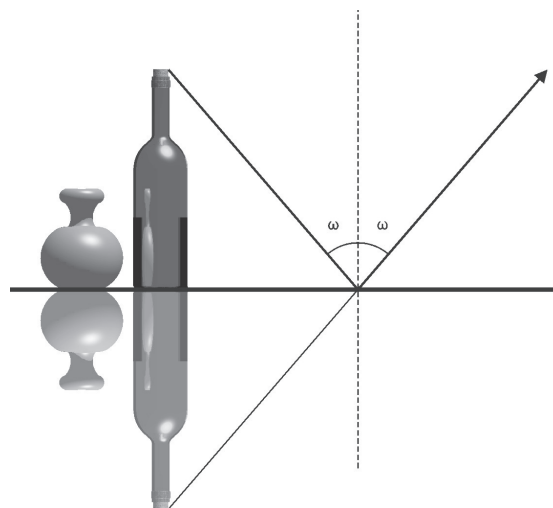
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις θέσης κατοπτρικών επιφανειών:



εικ. 60



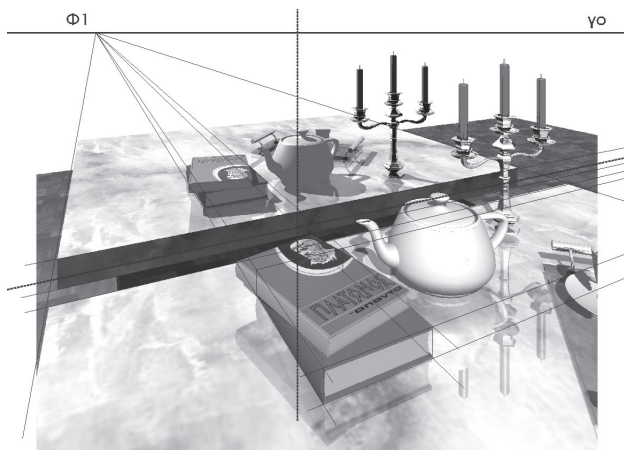
εικ. 58 Salvador Dalí, *Ατελείωτη στερεοσκοπική εικόνα*, 1973



σχ. 59



εικ. 61



σχ. 62

1. **Κατακόρυφη κατοπτρική επιφάνεια**, π.χ. ένας καθρέφτης (εικ. 58)
2. **Οριζόντια κατοπτρική επιφάνεια**, π.χ. επιφάνεια του νερού (εικ. 60), γυαλισμένη επιφάνεια (εικ. 61).

1. *Ανάκλαση σε κατακόρυφη επιφάνεια*

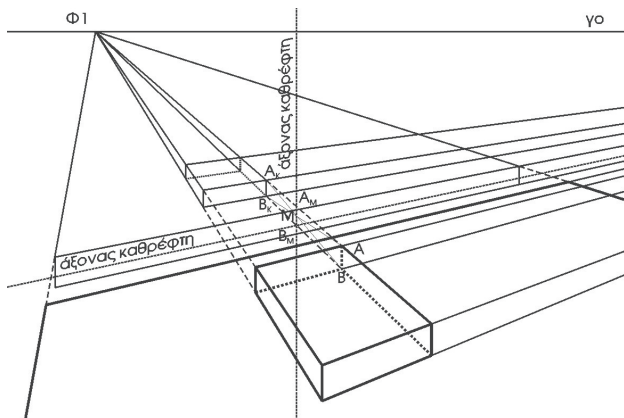
Όταν η ανακλαστική επιφάνεια είναι κατακόρυφη το πραγματικό αντικείμενο και ο αντικατοπτρισμός του έχουν στην προοπτική εικόνα προοπτικά ίσες διαστάσεις. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι ο αντικατοπτρισμός του αντικειμένου φαίνεται μικρότερος από το ίδιο το αντικείμενο, εφ' όσον βρίσκεται μακρύτερα από τον παρατηρητή (σχ. 62).

Κατασκευάζουμε το προοπτικό του παραλληλεπιπέδου του βιβλίου και στον οριζόντιο άξονα του καθρέφτη και στο υψόμετρο της κάτω βάσης του, ορίζουμε το σημείο B_M στην τομή του άξονα με την $B\Phi 1$ (σχ. 63). Ορίζουμε το σημείο A_M στην τομή της $A\Phi 1$ με τον κάθετο άξονα του καθρέφτη, που περνά από το B_M . Το σημείο M είναι το προοπτικό μέσο της $A_M B_M$. Φέρνουμε την AM , προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την $B\Phi 1$ και ορίζουμε το σημείο B_K . Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε το A_K στην τομή των BM και $A\Phi 1$. Το τετράπλευρο $ABA_K B_K$ είναι προοπτικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, επομένως η $A_K B_K$ είναι ο προοπτικός αντικατοπτρισμός της AB .

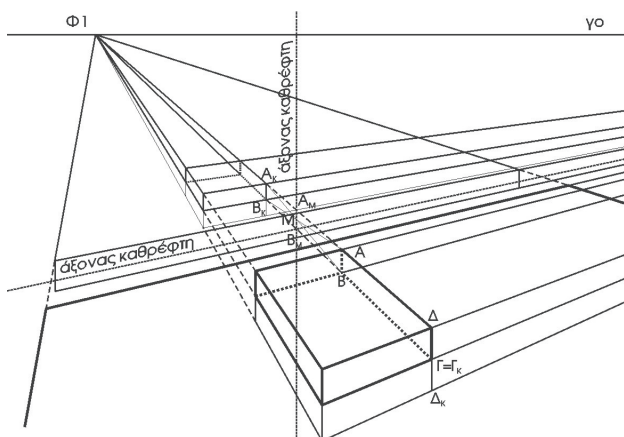
Αυτή η μέθοδος δίνει τους αντικατοπτρισμούς των αντικειμένων απ' ευθείας στην προοπτική εικόνα. Μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε τον αντικατοπτρισμό ενός αντικειμένου στην πρώτη προβολή του (κάτοψη) και να το απεικονίσουμε προοπτικά σαν να ήταν ξεχωριστό αντικείμενο.

2. *Ανάκλαση σε οριζόντια επιφάνεια*

Θεωρούμε ότι η οριζόντια επιφάνεια έδρασης του βιβλίου του προηγούμενου παραδείγματος είναι κι αυτή ανακλαστική (σχ. 62). Για να προσδιορίσουμε την αντικατοπτρική εικόνα του σημείου Δ (σχ. 64), κατασκευάζουμε την $\Gamma\Delta_K$ στην προέκταση της $\Gamma\Delta$ και ίση με την $\Gamma\Delta$.



σχ. 63



σχ. 64