ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σύστημα Προβολής

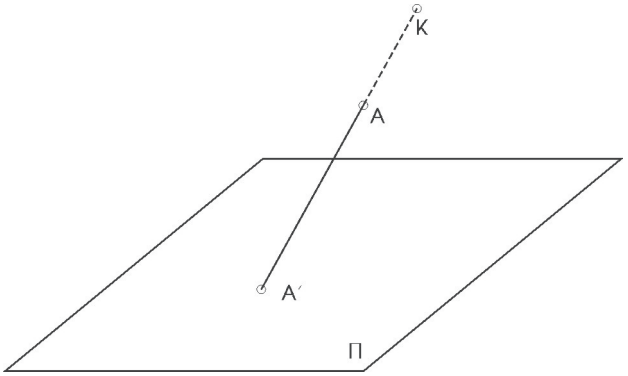
«Σύστημα προβολής», είναι ένα σύστημα απεικόνισης που μας επιτρέπει τη σχεδίαση επί χάρτου, δηλαδή σε δύο διαστάσεις μίας τρισδιάστατης κατασκευής.

Το σύστημα προβολής ορίζεται από το κέντρο προβολής (σημείο Κ) και ένα επίπεδο προβολής (επίπεδο Π). Τυχόν σημείο Α του χώρου *προβάλλεται* από το Κ στο Π και Α΄ είναι η προβολή του (σχ. 1)

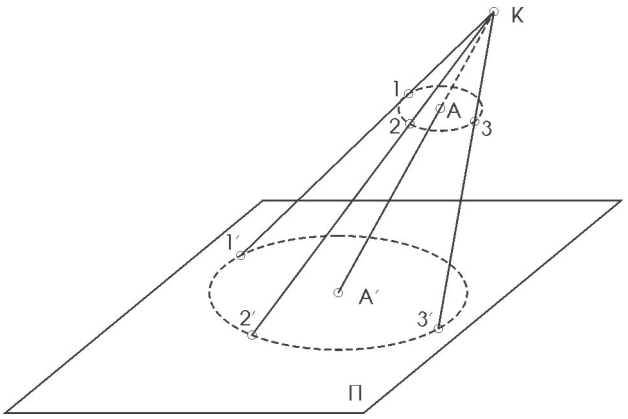
Παρατηρούνται οι παρακάτω περιπτώσεις:

Α΄ περίπτωση: το Κ είναι σημείο συγκεκριμένο, τότε ονομάζεται σημείο «καθ΄ υπόσταση» και η προβολή είναι **κεντρική** (ή **κωνική**) με κέντρο το Κ. Η **κεντρική προβολή** ενός αντικειμένου Α μας δίνει την προοπτική απεικόνισή του, Α΄ (σχ. 2). Το σύστημα της κεντρικής προβολής εφαρμόζεται στην προοπτική απεικόνιση των αντικειμένων.

Β΄ περίπτωση: το Κ δεν είναι σημείο συγκεκριμένο, θεωρούμε ότι βρίσκεται στο άπειρο, «κατ΄ εκδοχή σημείο», αλλά γνωρίζουμε την κατεύθυνση προβολής που σημειώνεται με Κ∞. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι έχουμε **παράλληλη** (ή **κυλινδρική** προβολή) (σχ. 3). Η παράλληλη προβολή ενός αντικειμένου μας δίνει την **παραστατική μέθοδο** απεικόνισης ή μέθοδο Monge (σχ. 4), καθώς και την **αξονομετρική μέθοδο** (σχ. 5). Η παραστατική και η αξονομετρική μέθοδος προβολής είναι αυτές που χρησιμοποιούνται κατ΄ εξοχήν στην αρχιτεκτονική, διότι τα σχέδια φέρουν τις πραγματικές διαστάσεις των αντικειμένων, που απεικονίζονται υπό κάποια κλίμακα. Κατ΄ επέκταση, μέσω των σχεδίων αυτών μπορούν να υλοποιηθούν τα πραγματικά αντικείμενα στο χώρο.



σχ. 1

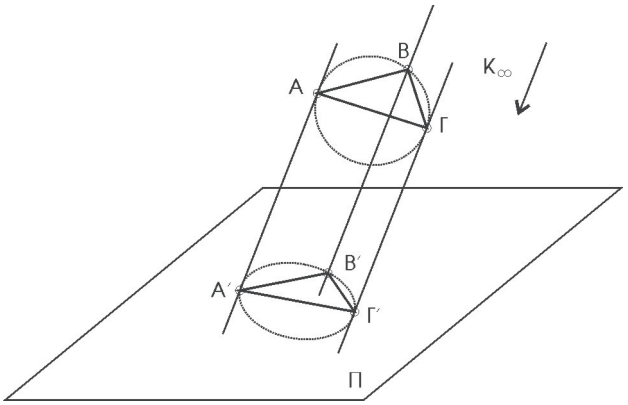


σχ. 2

Παράλληλη προβολή

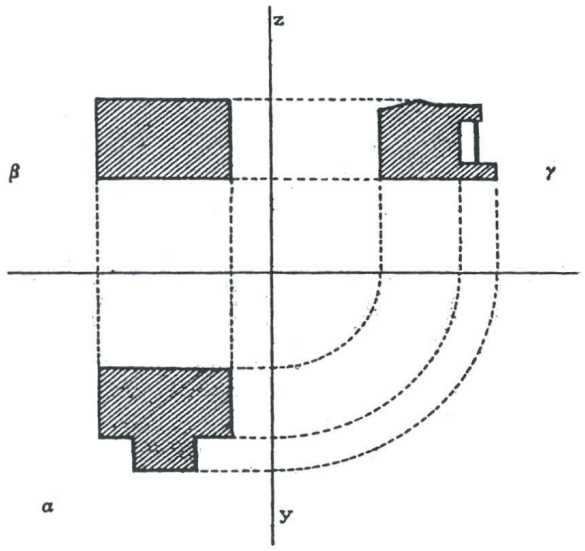
Απεικόνιση στο σύστημα δύο επιπέδων προβολής

Το σύστημα δύο επιπέδων προβολής αποτελείται από ένα οριζόντιο $Π_1$ και ένα κατακόρυφο επίπεδο $Π_2$. Σύμφωνα με τη μέθοδο που επινοήθηκε από τον G. Monge[1], στο σύστημα αυτό προβάλλεται κάθε σχήμα του χώρου, μέσω ορθών προβολών.

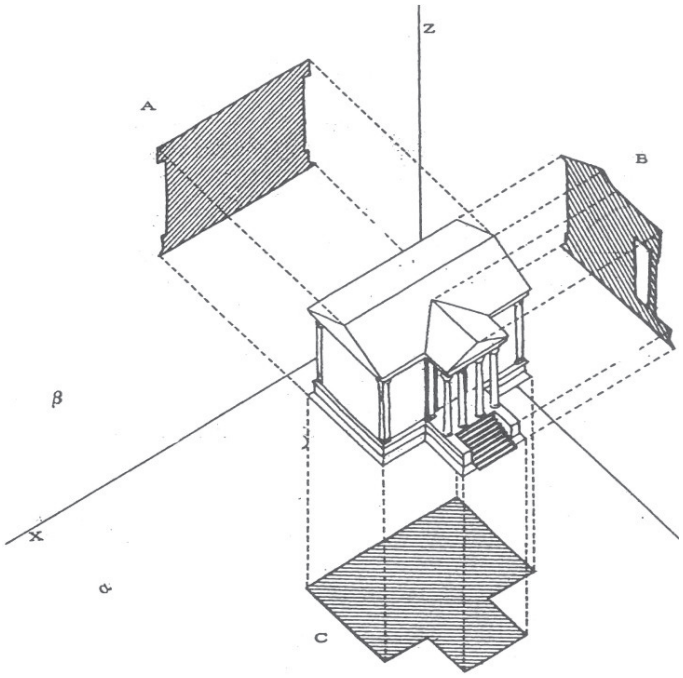


σχ. 3

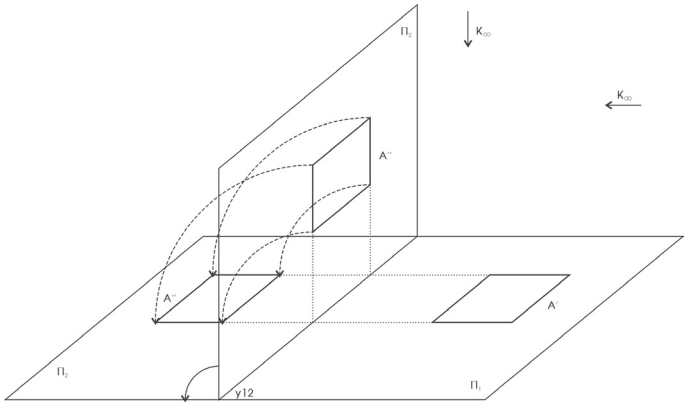
1. βλ. παράρτημα Γ



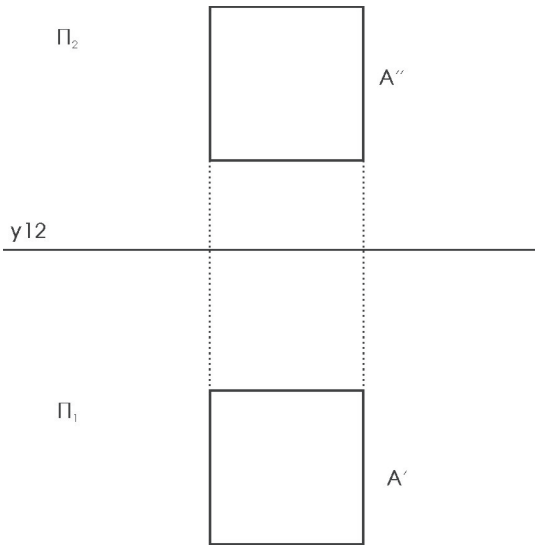
σχ. 4 Απεικόνιση αντικειμένου με τη μέθοδο των ορθών προβολών



σχ. 5 Αξονομετρική απεικόνιση



σχ. 6 Κατάκλιση του επιπέδου $Π_2$, ώστε να ταυτιστεί με το $Π_1$



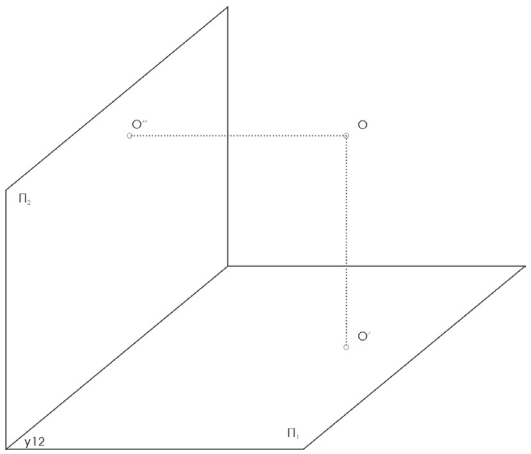
σχ. 7 Η εικόνα του συστήματος, μετά την κατάκλιση

Δηλαδή κάθε σχήμα του χώρου έχει μία ορθή προβολή στο $Π_1$ (1ο επίπεδο προβολής) που ονομάζεται 1η ή οριζόντια προβολή Α΄ και μία 2η ή κατακόρυφη προβολή Α΄΄ στο $Π_2$ (2ο επίπεδο προβολής) (σχ. 6).

Επειδή ενδιαφερόμαστε για την απεικόνιση ενός αντικειμένου σε μία επιφάνεια, π.χ. στο χαρτί σχεδίασης, στρέφουμε το επίπεδο $Π_2$, του ορθογωνίου συστήματος προβολής $Π_1$ και $Π_2$, μέχρι να συμπέσει με το $Π_1$ (σχ. 6,7). Με τον τρόπο αυτό, που ονομάζεται *κατάκλιση* του $Π_2$ στο $Π_1$, οι δύο προβολές μεταφέρονται σε ένα επίπεδο, που ταυτίζεται με το επίπεδο σχεδίασης (σχ. 7). Τον άξονα περιστροφής τον ονομάζουμε **άξονα y12**.

Απεικόνιση σημείου

Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε σημείο Ο του χώρου μπορεί να οριστεί μέσω της απεικόνισης της πρώτης Ο΄ και της δεύτερης Ο΄΄ προβολής του (σχ. 8,9). Δηλαδή υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του σημείου Ο στο χώρο και των δύο προβολών του. Αυτό σημαίνει ότι με τις δύο προβολές Ο΄ και Ο΄΄ μπορούμε να ορίσουμε το Ο. Από το σύνολο των προβολών των σημείων ενός αντικειμένου του χώρου προκύπτουν στα $Π_1$ και $Π_2$ οι δύο προβολές του. Η απεικόνιση ενός σημείου με τη μέθοδο Monge πραγματοποιείται μέσω των



σχ. 8 Ορισμός σημείου Ο του χώρου σε 3D

συντεταγμένων του στο προβολικό σύστημα των δύο επιπέδων $Π_1$ και $Π_2$.

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε πάνω στην τομή y 12 των επιπέδων προβολής $Π_1$ και $Π_2$ ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxyz τέτοιο, ώστε ο άξονας των x να βρίσκεται πάνω στο $Π_1$, ο άξονας των z να βρίσκεται πάνω στο $Π_2$ και ο άξονας των y να ταυτίζεται με τον y 12 (σχ. 10). Σε κάθε σημείο Μ του χώρου, που έχει προβολές τα Μ΄ και Μ΄΄ στο $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα, αντιστοιχεί μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) που αποτελούν τις συντεταγμένες του για το σύστημα των αξόνων Oxyz.

Το διάστημα Μ΄Μy, ορίζει τη θέση του Μ΄ πάνω στο $Π_1$ και ονομάζεται ***απόσταση***.

Το διάστημα Μ΄΄ΜΥ είναι το μέγεθος z, που ονομάζεται ***υψόμετρο***.

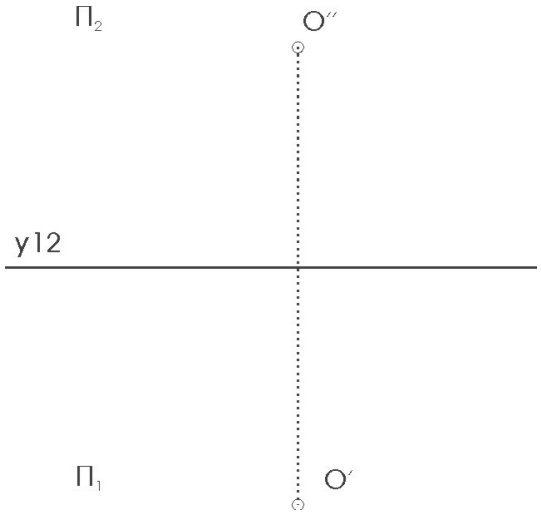
Το διάστημα ΟΜy από την αρχή των αξόνων Ο είναι η y απόσταση (σχ. 10).

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της κατάκλισης του $Π_2$ στο $Π_1$ έχουμε το σχήμα 11.

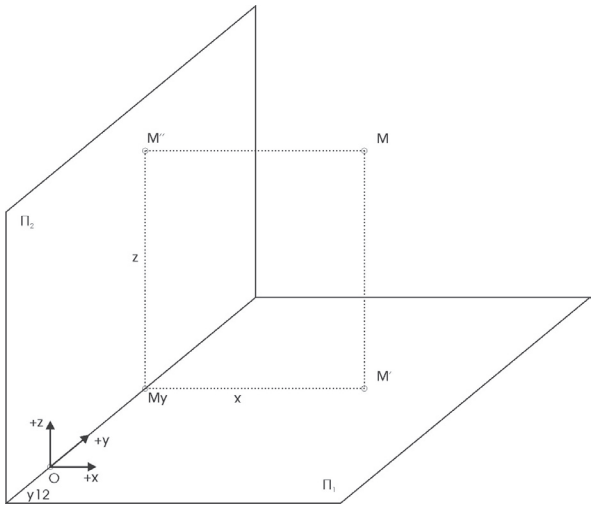
Οι συντεταγμένες κάθε προβαλλόμενου σημείου μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές, ανάλογα με τη θέση του σημείου στο χώρο ως προς τα επίπεδα προβολής. Θεωρούμε θετικά y τα ευρισκόμενα δεξιά του Ο, θετικά x τα κάτω από τον y 12 και θετικά z τα σημεία πάνω από τον y 12.

Παρατηρώντας τα επίπεδα $Π_1$ και $Π_2$, διαπιστώνουμε ότι χωρίζουν το χώρο σε τέσσερα μέρη (σχ. 12):

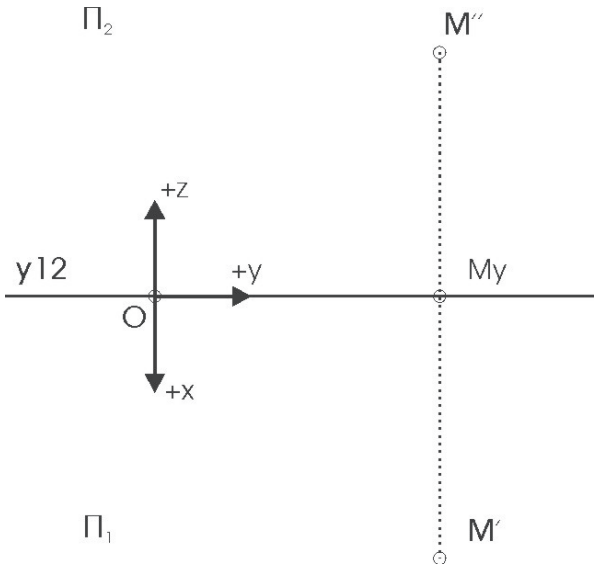
- Στον χώρο I, τυχόν σημείο Κ έχει την 1η προβολή του κάτω και τη 2η επάνω από τον άξονα y 12, x(+) και z(+).



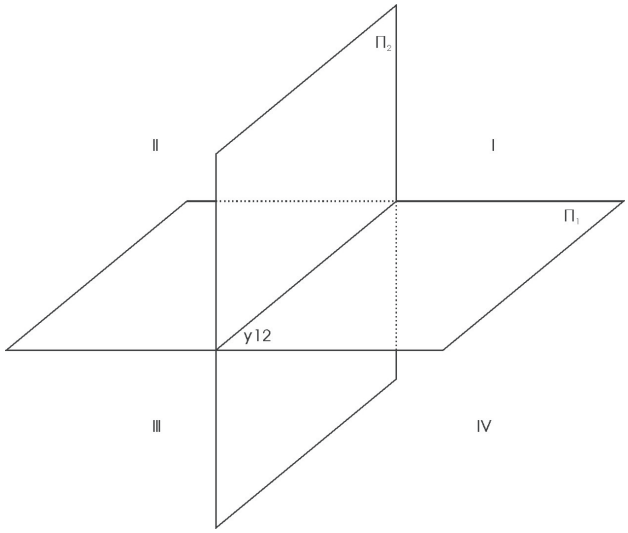
σχ. 9 Απεικόνιση σε 2D, μετά την κατάκλιση



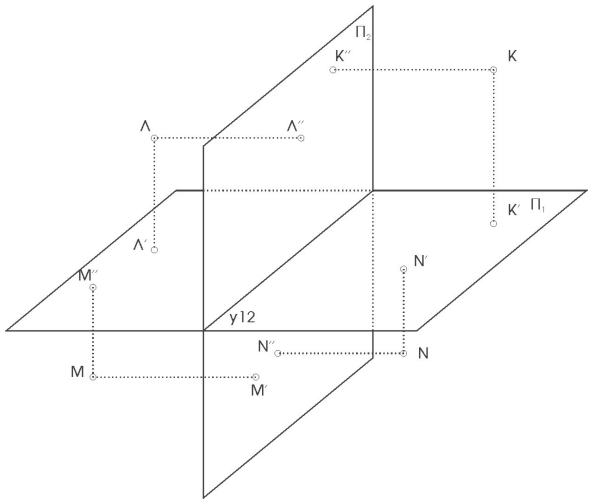
σχ. 10 Απεικόνιση σημείου με διάταξη των επιπέδων στο χώρο



σχ. 11 Απεικόνιση σημείου σε ένα επίπεδο (2D)



σχ. 12



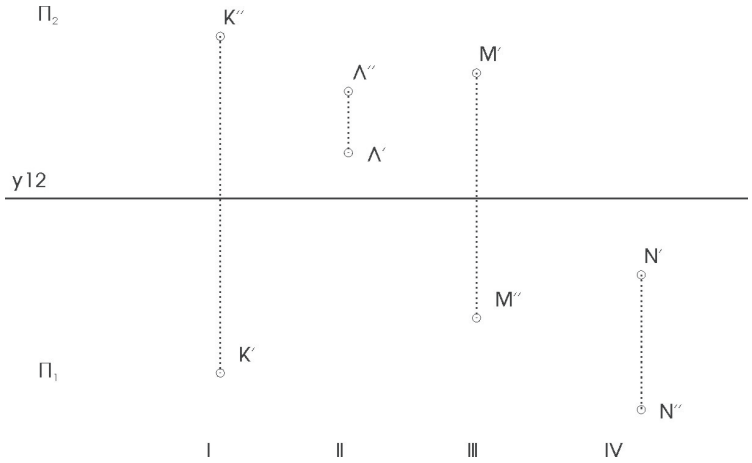
σχ. 13 Οι διαφορετικές προβολές σημείων στους τέσσερεις χώρους

- Στον χώρο II τυχόν σημείο Λ έχει τις 1η και 2η προβολές του επάνω από τον άξονα y12, x(-) και z(+).
- Στον χώρο III τυχόν σημείο M έχει την 1η προβολή του πάνω και τη 2η προβολή του κάτω από τον άξονα y12, x(-) και z(-).
- Στον χώρο IV τυχόν σημείο N έχει τις 1η και 2η προβολές του κάτω από τον άξονα y12, x(+) και z(-) (σχ. 13,14).

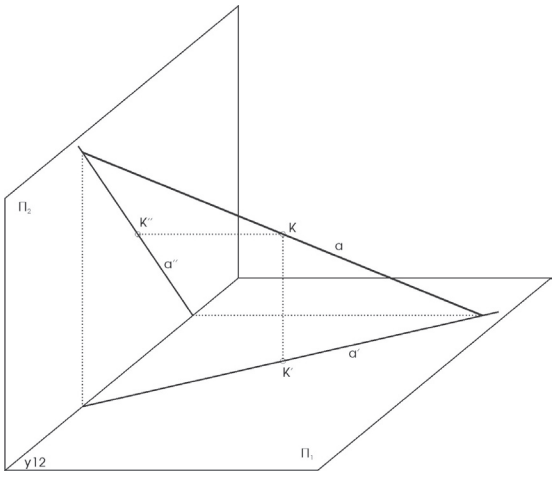
χώρος	x	z
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Απεικόνιση ευθείας

Επειδή, ως γνωστό, δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία, οι προβολές δύο σημείων A(A′,A″) και B(B′,B″) ευθείας α στα επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα, θα ορίζουν τις προβολές α′ και α″ της ευθείας. Κατ′ επέκταση μπορούμε να εκφράσουμε τη συνθήκη: ***Ένα σημείο K ανήκει σε μία ευθεία α όταν οι προβολές του K′ και K″ ανήκουν στις αντίστοιχες προβολές α′ και α″ της ευθείας*** (σχ. 15). Ή αντίστροφα, ***όταν οι προβολές K′ και K″ ενός σημείου K βρίσκονται πάνω στις αντίστοιχες προβολές α′ και α″ μίας ευθείας, το σημείο ανήκει στην ευθεία*** (σχ. 15).

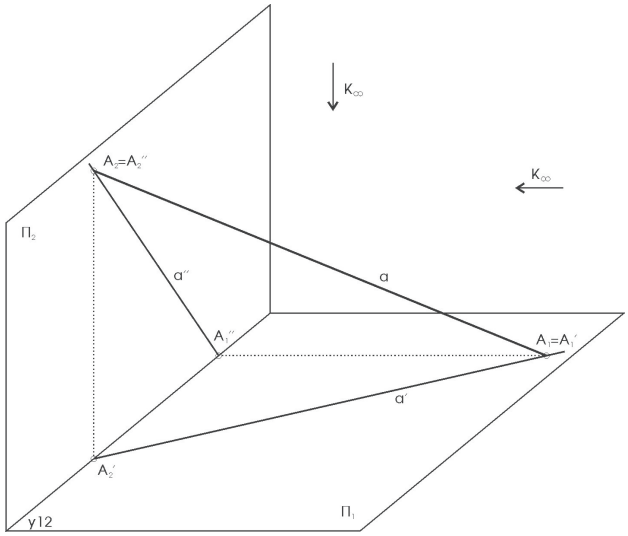


σχ. 14 Απεικόνιση τυχαίων σημείων στους τέσσερεις χώρους



σχ. 15

Τα σημεία τομής $A_1 \equiv A_1'$ και $A_2 \equiv A_2''$ ευθείας α(α΄,α΄΄) με τα επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα ονομάζονται **ίχνη ευθείας** (σχ. 16,17). Το σημείο τομής $A_1 \equiv A_1'$ της ευθείας α με το 1ο επίπεδο προβολής $Π_1$ ονομάζεται **1ο ίχνος ευθείας**. Το σημείο τομής $A_2 \equiv A_2''$ της ευθείας α με το 2ο επίπεδο προβολής $Π_2$ ονομάζεται **2ο ίχνος ευθείας**. Επειδή τα A_1 και A_2 είναι οι τομές της ευθείας με τα $Π_1$ και $Π_2$ είναι προφανές ότι $A_1 \equiv A_1'$ και $A_2 \equiv A_2''$.



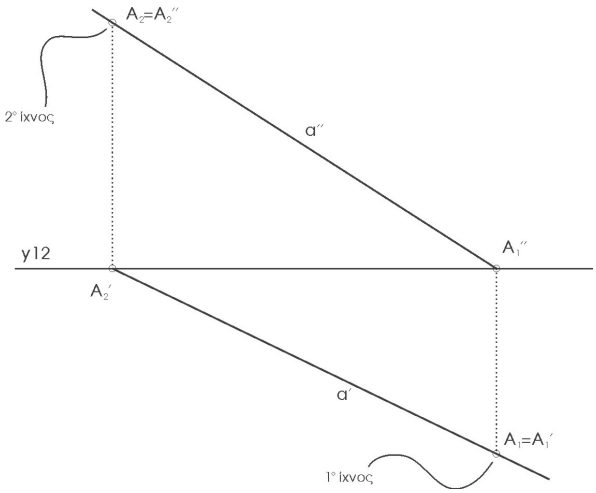
σχ.16

Επίπεδα συμμετρίας και συμπτώσεως

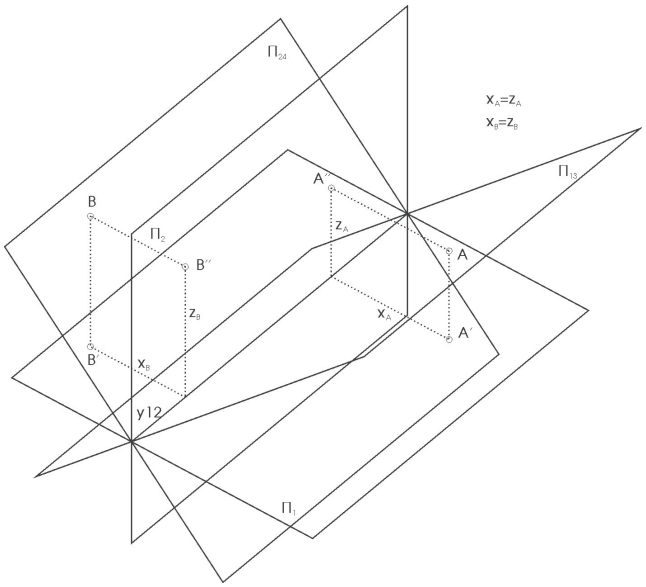
Το επίπεδο που διχοτομεί τους χώρους I και III και το επίπεδο που διχοτομεί τους χώρους II και IV και περιέχουν τον άξονα y12 έχουν χαρακτηριστικές ιδιότητες (σχ. 18).

Το πρώτο επίπεδο ονομάζεται **επίπεδο συμμετρίας $Π_{13}$**, διότι κάθε σημείο του επιπέδου έχει απόσταση ίση με το υψόμετρό του. Επιπροσθέτως οι προβολές κάθε σημείου του επιπέδου $Π_{13}$ απεικονίζονται σε θέση συμμετρική ως προς τον άξονα y12 (σχ. 19).

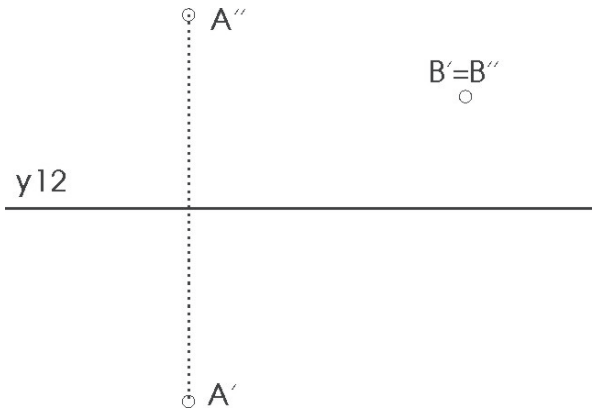
Το δεύτερο επίπεδο ονομάζεται **επίπεδο συμπτώσεως $Π_{24}$**. Και εδώ κάθε σημείο του επιπέδου $Π_{24}$ έχει απόσταση ίση με το υψόμετρό του, όμως οι δύο προβολές κάθε σημείου συμπίπτουν (μετά την κατάκλιση του $Π_2$ στο $Π_1$)(σχ. 19).



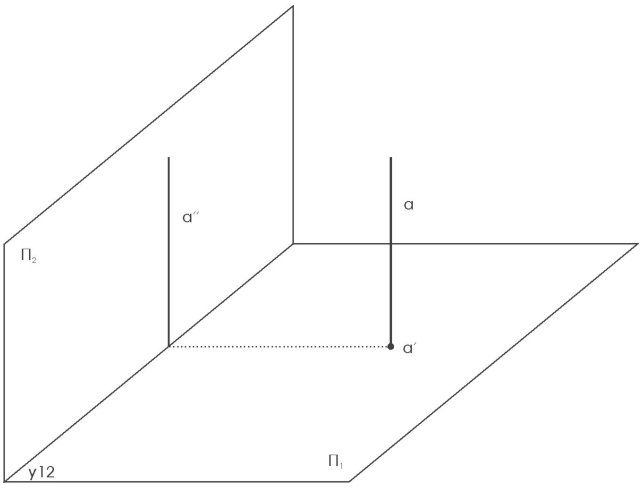
σχ.17



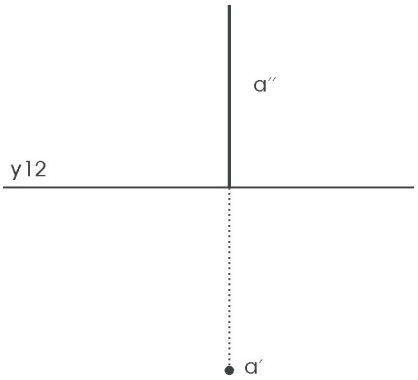
σχ. 18



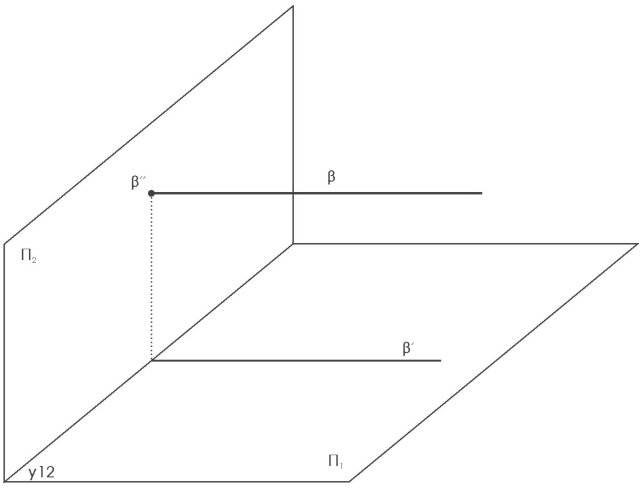
σχ. 19



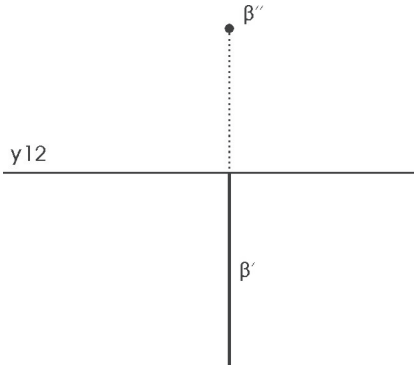
σχ. 20



σχ. 21



σχ. 22



σχ.23

Χαρακτηριστικές θέσεις ευθειών

Οι ευθείες που τέμνουν κάθετα ή παράλληλα τα επίπεδα προβολής $Π_1$, $Π_2$ ή ανήκουν στα επίπεδα συμμετρίας ή συμπτώσεως, έχουν χαρακτηριστικές ιδιότητες

Οι χαρακτηριστικές ευθείες είναι:

κατακόρυφες ευθείες

οριζόντιες ευθείες

παράλληλες ευθείες

εγκάρσιες ευθείες

ευθείες επιπέδων συμμετρίας

Κατακόρυφες ευθείες

Είναι οι κάθετες στο $Π_1$ ευθείες (σχ. 20,21). Η κάθετη α προβάλλεται στο $Π_1$ σαν σημείο. Η $2^η$ προβολή της στο $Π_2$ είναι η ευθεία α΄΄, κάθετη στον y 12.

Πρόσθιες ευθείες

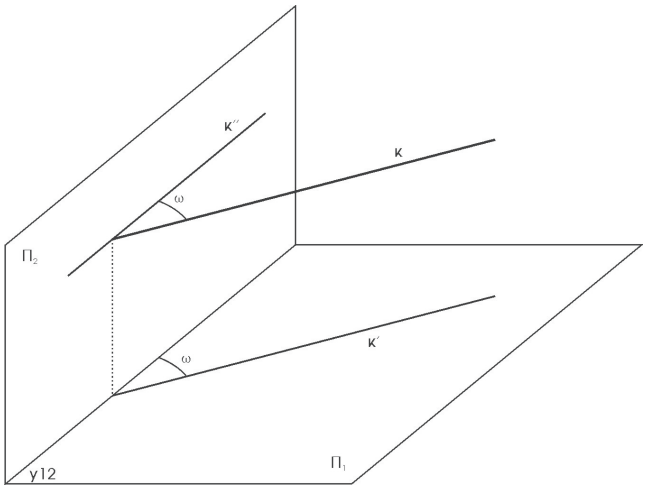
Ονομάζονται οι κάθετες ευθείες στο $Π_2$ (σχ. 22,23). Η $1^η$ προβολή στο $Π_1$ είναι η ευθεία β΄ και η $2^η$ προβολή είναι το σημείο β΄΄.

Οριζόντιες ευθείες

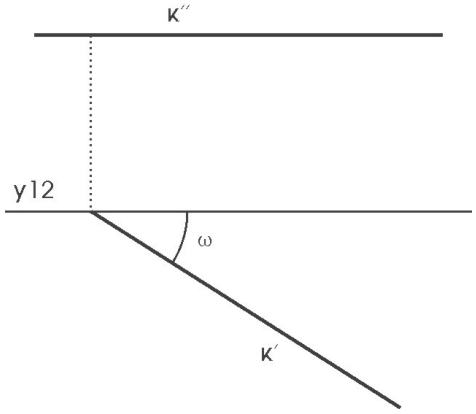
Καλούνται οι ευθείες παράλληλες με το $Π_1$. Η προβολή κ΄ της κ στο $Π_1$ είναι προφανώς παράλληλη με την κ, ενώ η προβολή κ΄΄ στο $Π_2$ είναι παράλληλη με τον άξονα y 12 (σχ. 24,25). Η γωνία ω που σχηματίζεται από την $1^η$ προβολή κ΄ και τον άξονα y 12 μας δίνει τη γωνία κλίσης της κ με το $Π_2$. Τυχόν μεγέθη επί της κ είναι ίσα με τα πραγματικά στην $1^η$ προβολή.

Μετωπικές ευθείες

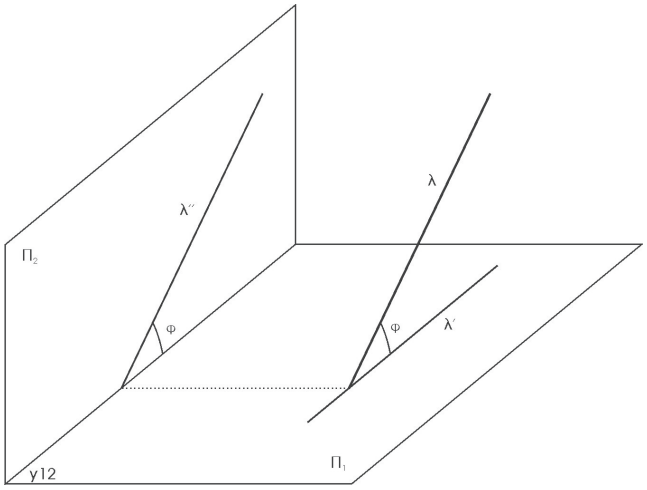
Λέγονται οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το $Π_2$ (σχ.26,27). Σύμφωνα με το σχήμα, η $1^η$ προβολή λ΄ της ευθείας λ είναι παράλληλη με τον άξονα y 12. Η γωνία φ που σχηματίζει η λ΄΄ με τον y 12 μας δίνει την κλίση της λ με το $Π_1$. Τυχόν μεγέθη επί της λ είναι ίσα με τα πραγματικά στη $2^η$ προβολή.



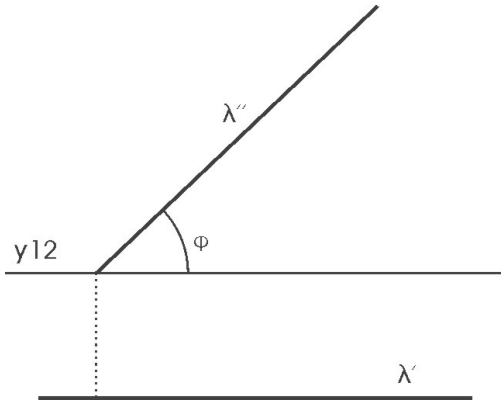
σχ. 24



σχ. 25



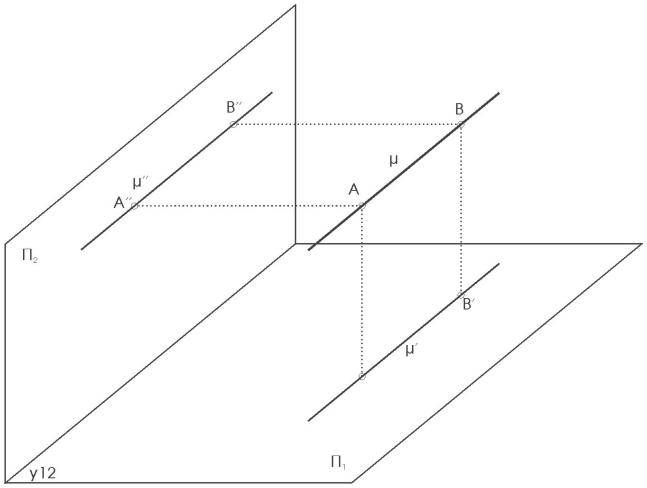
σχ. 26



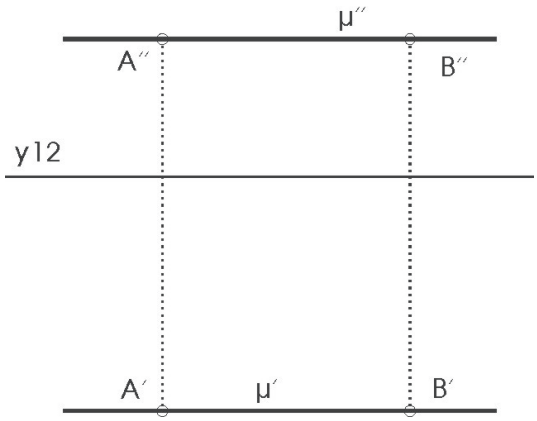
σχ. 27

Ευθείες παράλληλες στον άξονα y 12

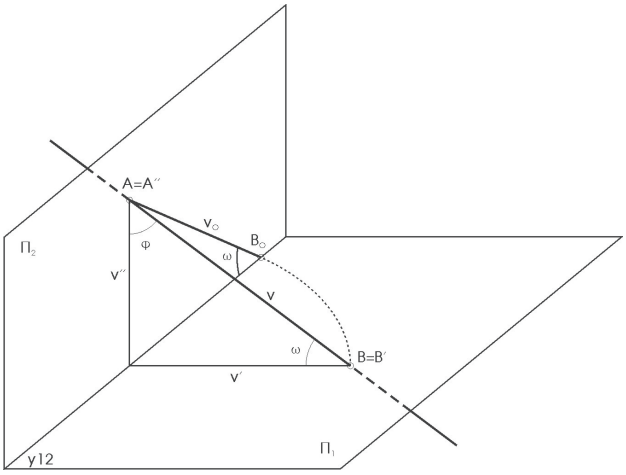
Σύμφωνα με το σχήμα 28, κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα y 12 έχει και τις δύο προβολές της μ΄ και μ΄΄ παράλληλες στον άξονα αυτό. Τυχόν μεγέθη επί της μ είναι ίσα με τις προβολές τους επί των μ΄ και μ΄΄ (σχ. 28,29).



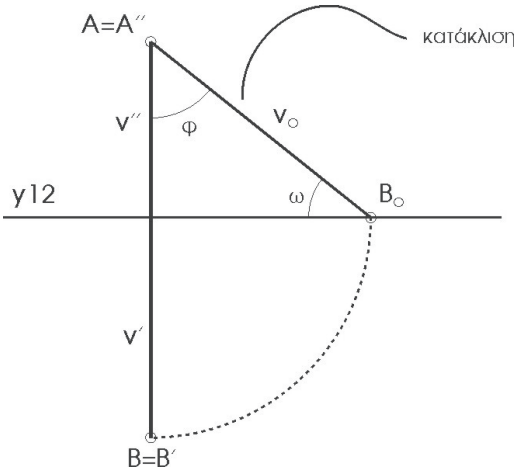
σχ. 28



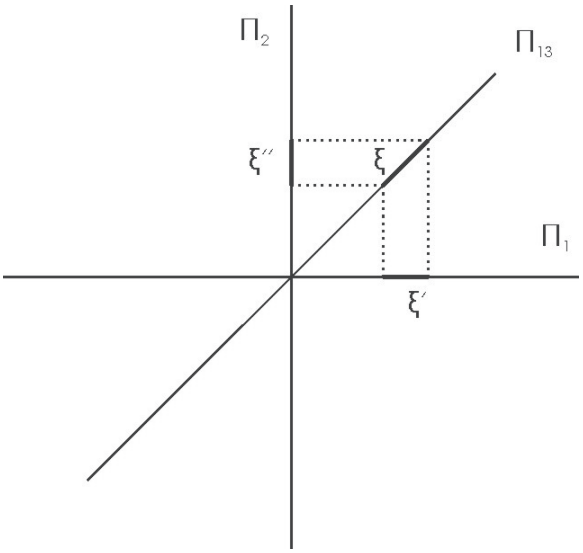
σχ. 29



σχ. 30



σχ. 31



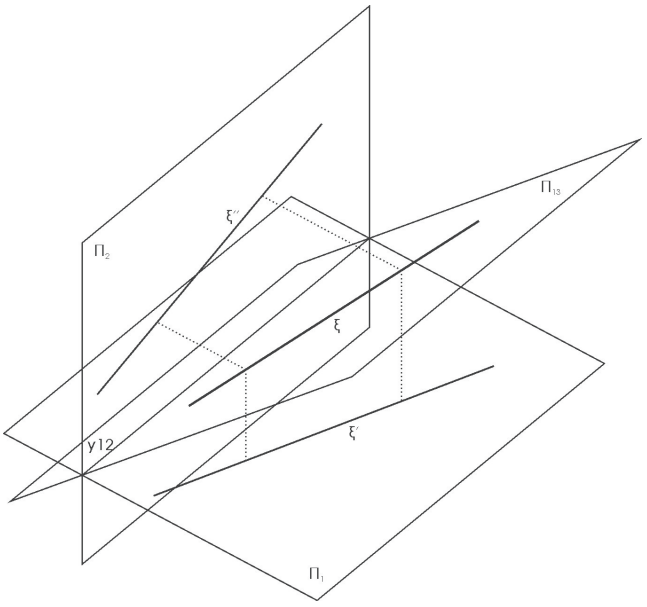
σχ. 33

Ευθείες εγκάρσιες στον άξονα y 12

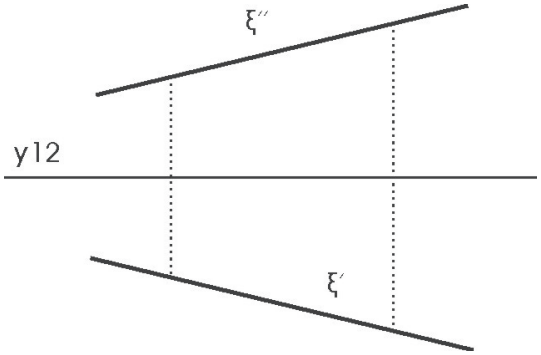
Σύμφωνα με το σχήμα είναι οι ασύμβατες με τον άξονα y 12 ευθείες (σχ. 30,31). Επειδή άπειρες ευθείες μπορεί να έχουν την ίδια προβολή, είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των προβολών δύο σημείων Α και Β της ν και η κατάκλιση της ευθείας (σχ. 30), προκειμένου να γίνει αντιληπτή η θέση της. Οι γωνίες ω και φ είναι οι γωνίες που σχηματίζει η ν με τα $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα.

Ευθείες που ανήκουν στο επίπεδο συμμετρίας $Π_{13}$

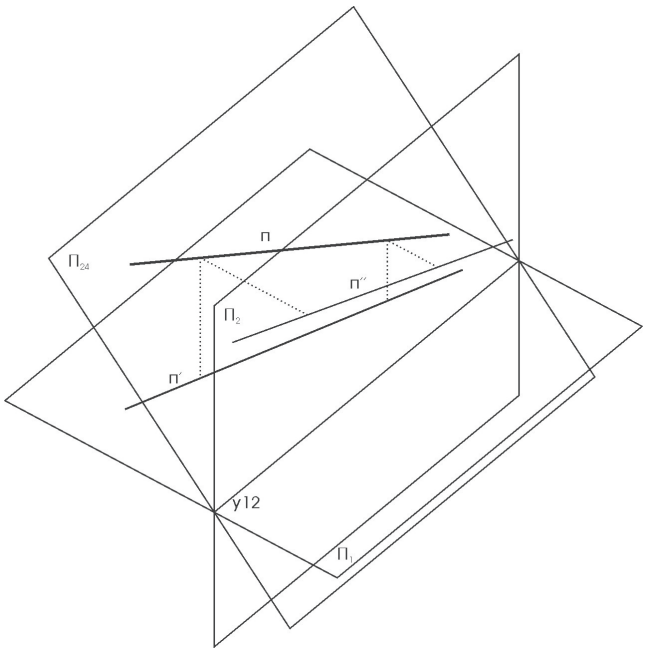
Θεωρούμε τυχαία ευθεία ξ που ανήκει στο επίπεδο συμμετρίας $Π_{13}$. Οι προβολές της ευθείας ξ στα $Π_1$ και $Π_2$ είναι οι ξ΄ και ξ΄΄ αντίστοιχα. Οι ευθείες αυτές έχουν προβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα y 12 (σχ. 32,33,34).



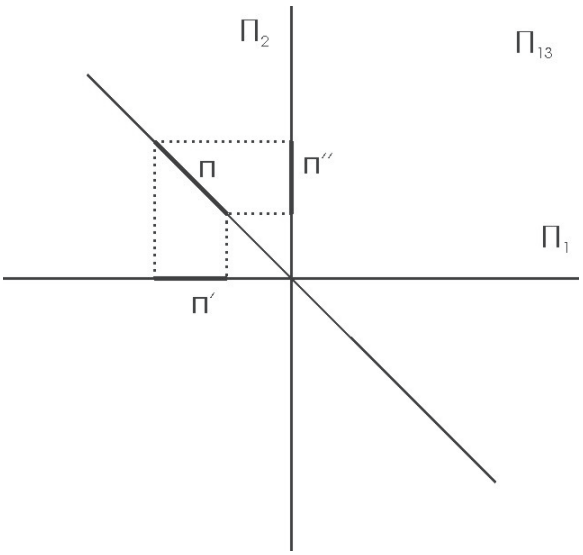
σχ. 32



σχ. 34



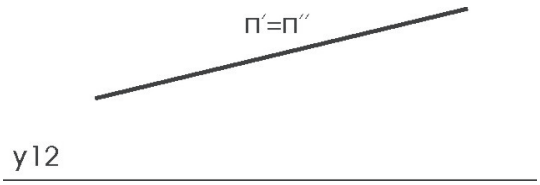
σχ.35



σχ. 36

Ευθείες που ανήκουν στο επίπεδο συμπτώσεως $Π_{24}$

Οι προβολές των ευθειών αυτών είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y12. Μετά την κατάκλιση του $Π_2$ στο $Π_1$ οι προβολές π΄ και π΄΄ ταυτίζονται (σχ. 35,36,37).



σχ. 37

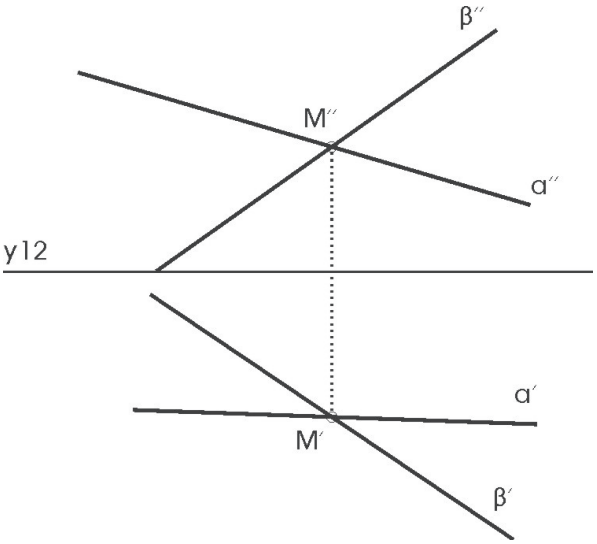
Σχετικές θέσεις ευθειών

Στη γεωμετρία δύο ευθείες του χώρου που δεν ταυτίζονται έχουν τρείς πιθανές σχετικές θέσεις: α) είναι τεμνόμενες σε ένα σημείο, β) είναι παράλληλες μεταξύ τους και γ) είναι ασύμβατες, δηλαδή έχουν διαφορετικές διευθύνσεις και κανένα σημείο τομής.

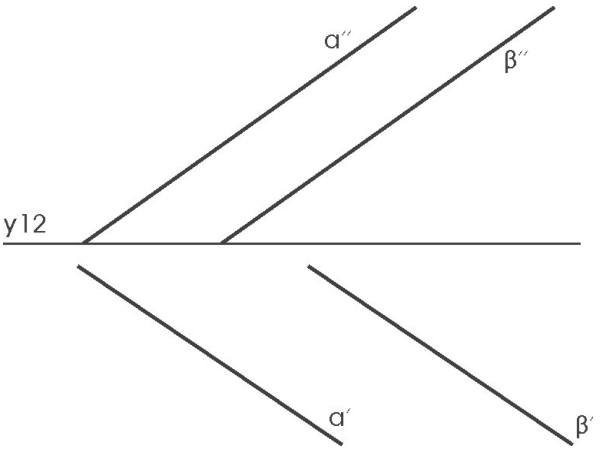
Τεμνόμενες ευθείες

Στην παραστατική γεωμετρία για να είναι δύο ευθείες (που δεν είναι εγκάρσιες) τεμνόμενες, πρέπει και αρκεί τα σημεία τομής των ομωνύμων προβολών τους να βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στον άξονα y12 (σχ. 38).

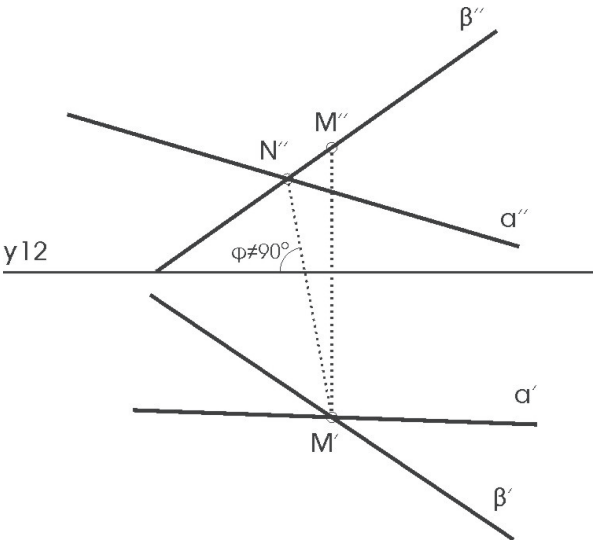
Εάν οι ευθείες βρίσκονται σε τέτοια θέση στο χώρο, ώστε στην 1η (έστω) προβολή τους να ταυτίζονται,



σχ. 38



σχ. 39



σχ. 40

το σημείο τομής τους M(M΄,M΄΄) ορίζεται από τη 2η προβολή των ευθειών.

Παράλληλες ευθείες

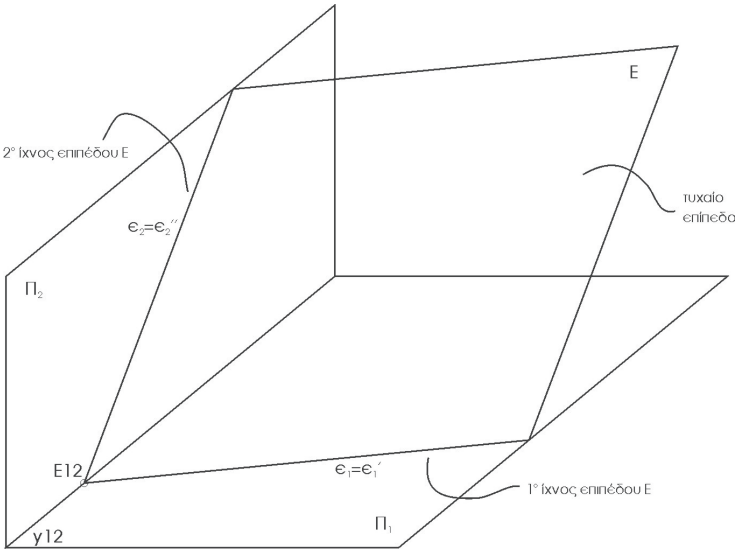
Για να είναι δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, πρέπει και αρκεί οι ομώνυμες προβολές τους να είναι παράλληλες (σχ. 39).

Ασύμβατες ευθείες

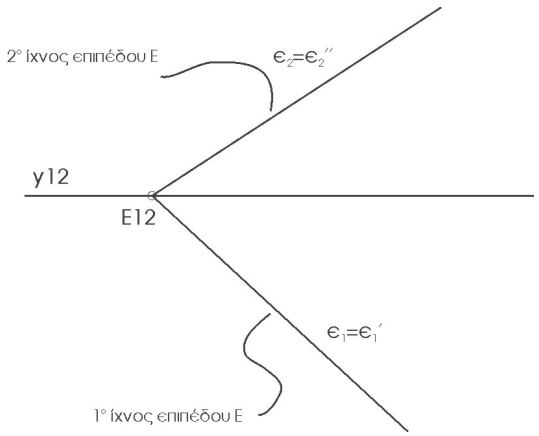
Αντίθετα με την πρόταση των τεμνομένων ευθειών, αν οι ομώνυμες προβολές δύο ευθειών τέμνονται σε σημεία που *δεν* βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στον y 12, τότε είναι ασύμβατες (σχ. 40).

Απεικόνιση επιπέδων στο προβολικό σύστημα

Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα επιπέδων $Π_1$ και $Π_2$, καθώς και τυχαίο επίπεδο Ε που τέμνει τα επίπεδα προβολής κατά τις ευθείες $ε_1'$ και $ε_2''$ (σχ. 41). Οι ευθείες αυτές ονομάζονται **ίχνη του επιπέδου Ε**. Η $ε_1 \equiv ε_1'$, τομή του Ε με το οριζόντιο επίπεδο $Π_1$, είναι το 1ο ίχνος του επιπέδου. Η $ε_2 \equiv ε_2''$, τομή του Ε με το κατακόρυφο επίπεδο $Π_2$, είναι το 2ο ίχνος του επιπέδου. Μετά την κατάκλιση του $Π_2$ στο $Π_1$ το επίπεδο Ε απεικονίζεται από τα δύο ίχνη του $ε_1'$ και $ε_2''$ στα $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα, σύμφωνα με το σχήμα 42.



σχ. 41



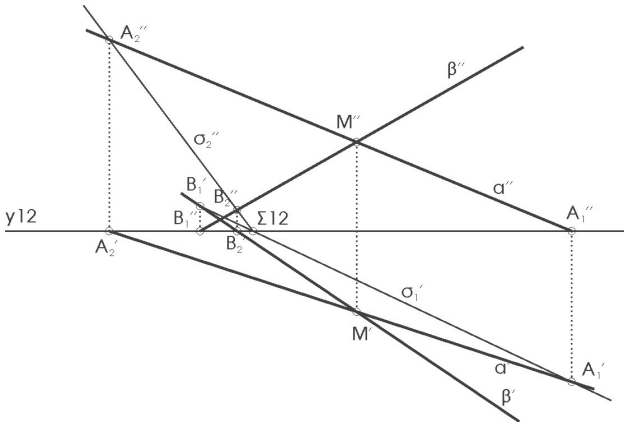
σχ. 42

Ορισμός επιπέδου

Ένα τυχαίο επίπεδο στη παραστατική γεωμετρία ορίζεται μέσω των ιχνών του, δηλαδή των ευθειών που δημιουργούνται από την τομή του τυχαίου επιπέδου με τα επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$. Όπως είναι γνωστό από την ευκλείδεια γεωμετρία, δύο ευθείες τεμνόμενες ή παράλληλες ορίζουν ένα και μόνο ένα επίπεδο.

Ορισμός επιπέδου μέσω τεμνομένων ευθειών

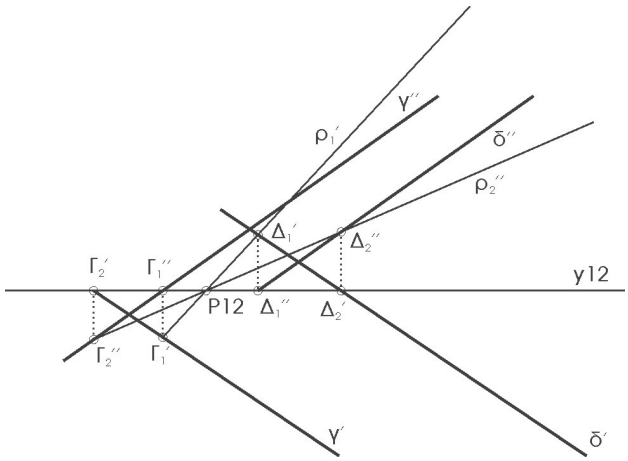
Οι ευθείες α(α΄,α΄΄) και β(β΄,β΄΄) του σχήματος 43 είναι τεμνόμενες και άρα ορίζουν επίπεδο Σ, του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε τα ίχνη. Βρίσκουμε τα ίχνη των ευθειών α και β. Τα ίχνη του επιπέδου ορίζονται από τα ομώνυμα ίχνη των ευθειών. Σημειώνεται ότι τα ίχνη $σ_1΄$ και $σ_2΄΄$ του επιπέδου τέμνονται **σε σημείο Σ12 του άξονα y12**.



σχ. 43

Ορισμός επιπέδου μέσω παράλληλων ευθειών

Το επίπεδο Ρ($ρ_1΄$,$ρ_2΄΄$) που ορίζουν οι παράλληλες ευθείες γ(γ΄,γ΄΄) και δ(δ΄,δ΄΄) έχει ίχνη που προσδιορίζονται μέσω των ιχνών των ευθειών γ και δ, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα (σχ. 44).

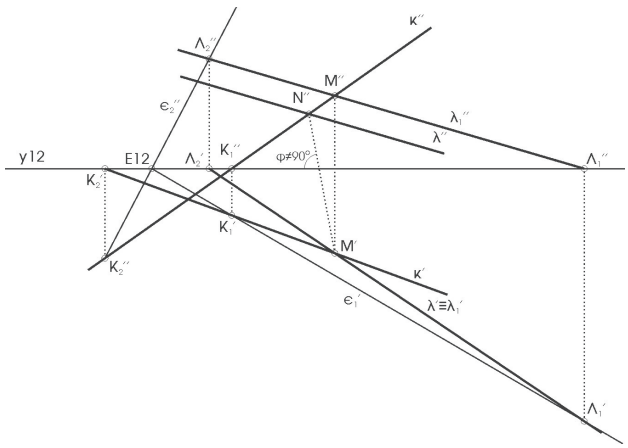


σχ. 44

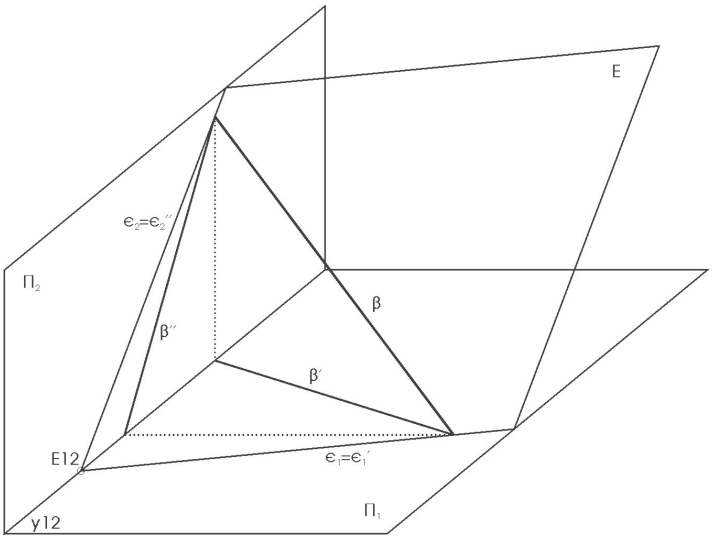
Ασύμβατες ευθείες

Δύο ασύμβατες ευθείες δεν ορίζουν επίπεδο, θα δούμε όμως πώς μπορούμε να παραστήσουμε επίπεδο που περιέχει τη μία από τις δύο ευθείες και είναι παράλληλο στη δεύτερη.

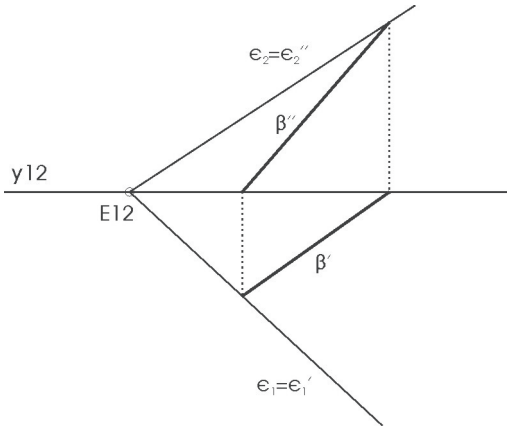
Οι ευθείες κ(κ΄,κ΄΄) και λ(λ΄,λ΄΄) είναι ασύμβατες (σχ. 45), διότι τα σημεία τομής Μ΄ και Ν΄΄ δεν βρίσκονται σε ευθεία κάθετη στον y 12. Για να κατασκευάσουμε επίπεδο Ε($ε_1΄$,$ε_2΄΄$) που να περιέχει την κ και να είναι παράλληλο στη λ, χρησιμοποιούμε ως βοηθητική ευθεία τη $λ_1$($λ_1΄$,$λ_1΄΄$) παράλληλη στη λ και τεμνόμενη με την κ στο σημείο Μ(Μ΄,Μ΄΄). Κατόπιν βρίσκουμε τα ίχνη του επιπέδου Ε, όπως ορίζονται από τα ίχνη των ευθειών κ και $λ_1$.



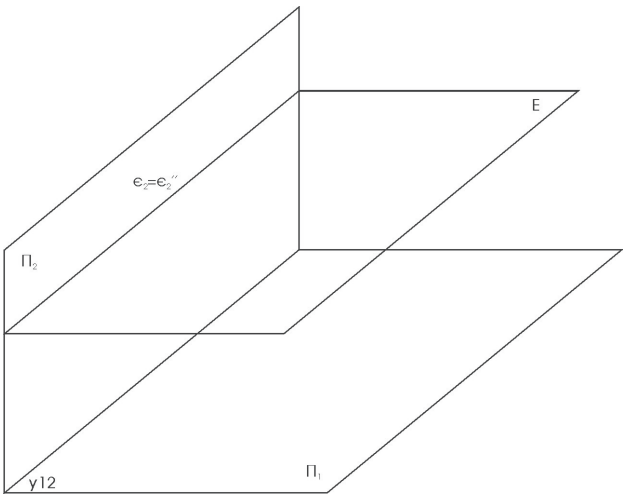
σχ.45



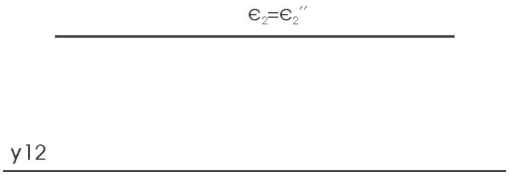
σχ. 46



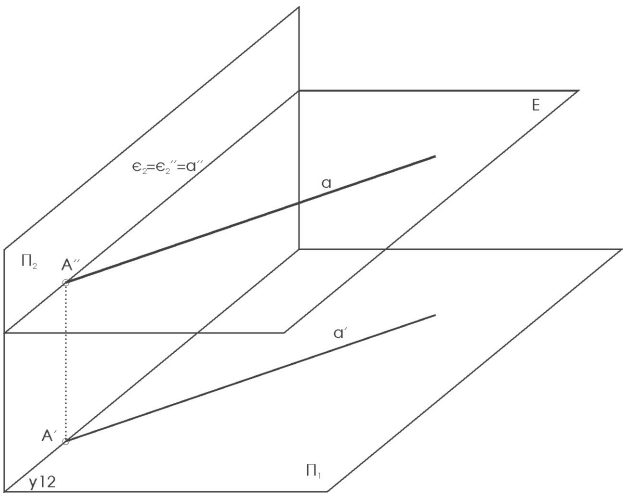
σχ.47



σχ. 48



σχ. 49



σχ. 50

Απεικόνιση τυχαίας ευθείας, που ανήκει σε τυχαίο επίπεδο

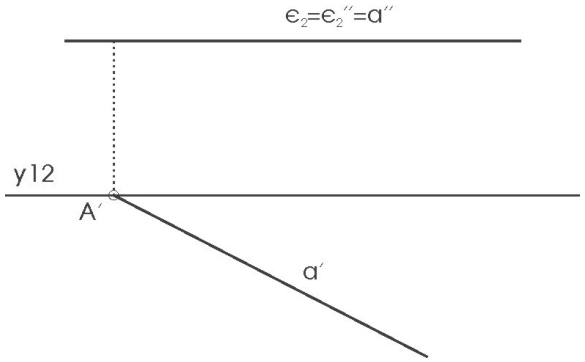
Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα δύο επιπέδων Π_1 και Π_2, τυχαίο επίπεδο Ε και τυχαία ευθεία β που ανήκει στο Ε. Τα ϵ_1' και ϵ_2'' είναι τα 1ο και 2ο ίχνη του επιπέδου στα Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Τα β' και β'' είναι οι προβολές της ευθείας β στα Π_1 και Π_2 αντίστοιχα (σχ. 46,47).

Παρατηρούμε ότι τα ίχνη της ευθείας τέμνουν τα ίχνη του επιπέδου. Κατ' επέκταση συμπεραίνουμε ότι ***μια τυχαία ευθεία β ανήκει σ' ένα τυχαίο επίπεδο Ε όταν τα ίχνη της ευθείας στο προβολικό σύστημα τέμνουν τα αντίστοιχα ίχνη του επιπέδου***.

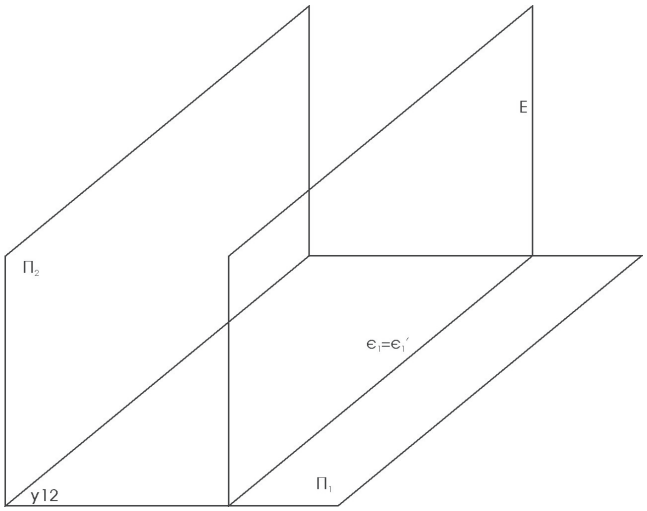
Χαρακτηριστικές θέσεις επιπέδων

Οριζόντιο επίπεδο

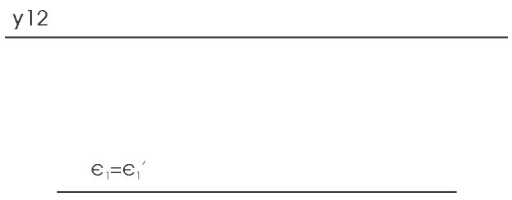
Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα επιπέδων Π_1 και Π_2 και επίπεδο Ε παράλληλο προς το οριζόντιο επίπεδο Π_1 (σχ. 48). Παρατηρούμε ότι το οριζόντιο



σχ. 51

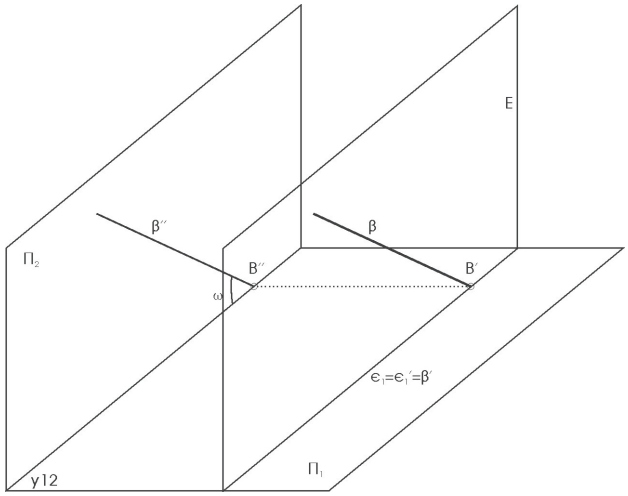


σχ. 52



σχ. 53

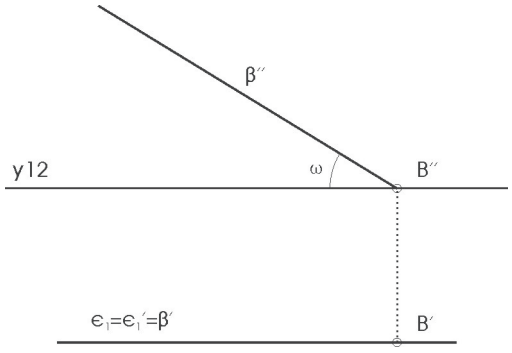
επίπεδο Ε τέμνει το $Π_2$ κατά το ίχνος $ε_2=ε_2''$, που είναι παράλληλο προς τον άξονα y12 και αποτελεί το 2ο ίχνος του επιπέδου (σχ. 49). Τυχούσα ευθεία α που ανήκει στο Ε προβάλλεται στο $Π_1$ διατηρώντας την κλίση της, ενώ η προβολή της στο $Π_2$ ταυτίζεται με το 2ο ίχνος του επιπέδου Ε. Επειδή οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες με το $Π_1$ δεν έχουν 1ο ίχνος, αλλά στην 1η προβολή ένα ευθύγραμμο τμήμα προβάλλεται ίσο με το πραγματικό (σχ. 50,51).



σχ. 54

Μετωπικό επίπεδο

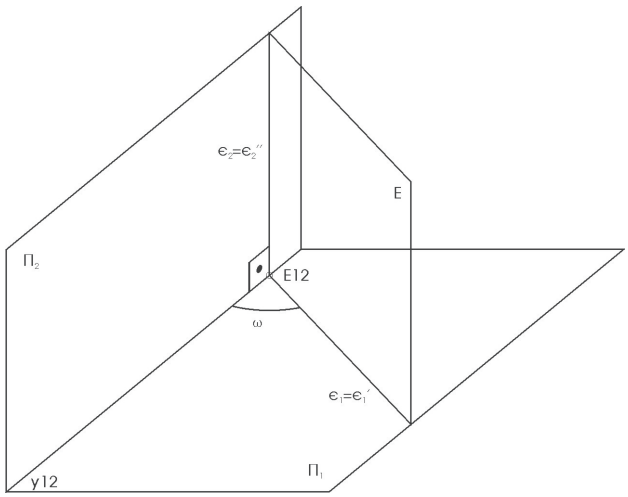
Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα επιπέδων $Π_1$ και $Π_2$ και τυχαίο επίπεδο Ε παράλληλο προς το κατακόρυφο επίπεδο $Π_2$ (σχ. 52,53). Παρατηρούμε ότι το κατακόρυφο επίπεδο Ε τέμνει το $Π_1$ κατά μία ευθεία $ε_1=ε_1'$, παράλληλη προς τον άξονα y12, που αποτελεί το 1ο ίχνος του κατακορύφου επιπέδου, ενώ στο επίπεδο $Π_2$ δεν υπάρχει ίχνος. Η τυχαία ευθεία β που ανήκει στο επίπεδο Ε, προβάλλεται στο $Π_1$ κατά μία ευθεία β=β΄, που ταυτίζεται με το 1ο ίχνος του επιπέδου. Η προβολή ευθυγράμμου τμήματος επί της ευθείας β στο $Π_2$ αποτελεί πραγματικό μέγεθος. Μετά την κατάκλιση (σχ. 54,55) η γωνία ω υποδεικνύει την κλίση της ευθείας ως προς το $Π_1$.



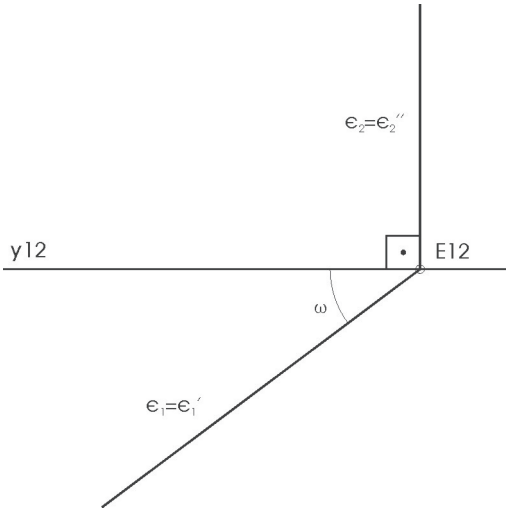
σχ. 55

Κατακόρυφο επίπεδο

Λαμβάνουμε το προβολικό σύστημα των επιπέδων $Π_1$ και $Π_2$, καθώς επίσης και τυχαίο επίπεδο Ε που είναι:



σχ. 56



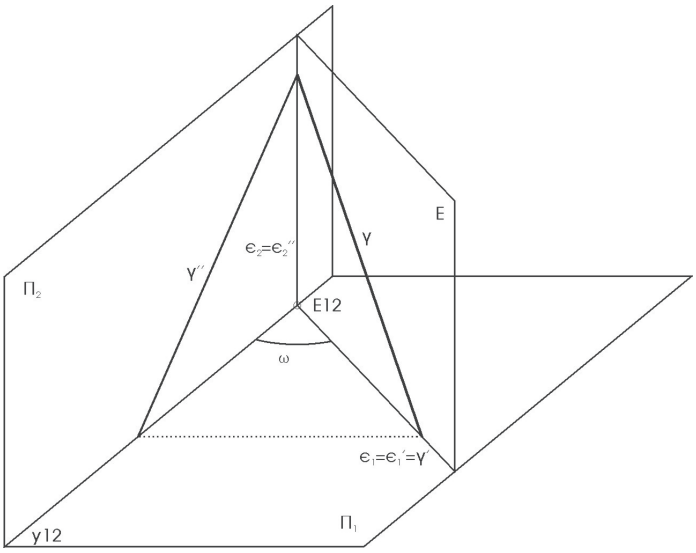
σχ. 57

α) κάθετο προς το οριζόντιο επίπεδο $Π_1$ και

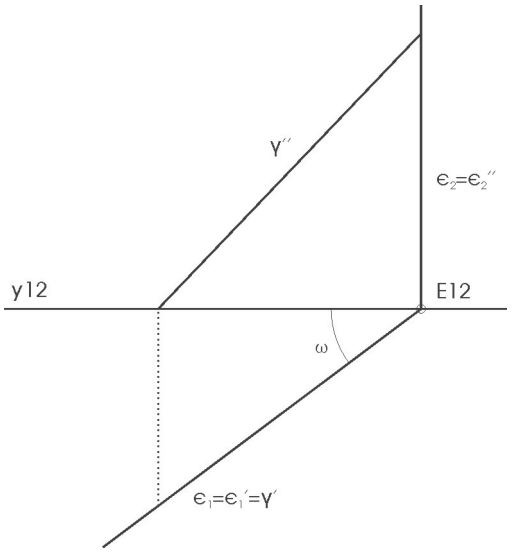
β) σχηματίζει γωνία ω με το $Π_2$.

Παρατηρούμε ότι το επίπεδο Ε τέμνει το $Π_1$ κατά μία ευθεία $ε_1=ε_1΄$ που είναι το 1ο ίχνος του επιπέδου και σχηματίζει με τον άξονα y12 γωνία ω. Επίσης τέμνει το $Π_2$ κατά την ευθεία $ε_2=ε_2΄΄$ κάθετη στον y12 (σχ. 56). Μετά την κατάκλιση του $Π_2$ στο $Π_1$ έχουμε το σχήμα 57, σύμφωνα με το οποίο η ένδειξη της γωνίας ω είναι απαραίτητη για την απεικόνιση του Ε.

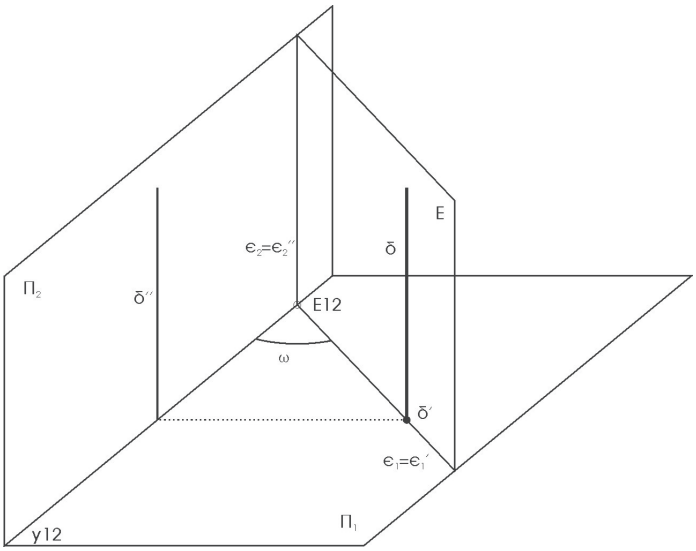
Τυχούσα ευθεία γ που ανήκει στο επίπεδο Ε προβάλλεται στο $Π_1$ πάνω στο 1ο ίχνος $ε_1=ε_1΄$ του επιπέδου Ε, ενώ στο $Π_2$ προβάλλεται κατά τη γ΄΄ (σχ. 58). Μετά την κατάκλιση (σχ. 59) το 1ο ίχνος του Ε στο $Π_1$ εμπεριέχει την 1η προβολή της γ και τέμνει



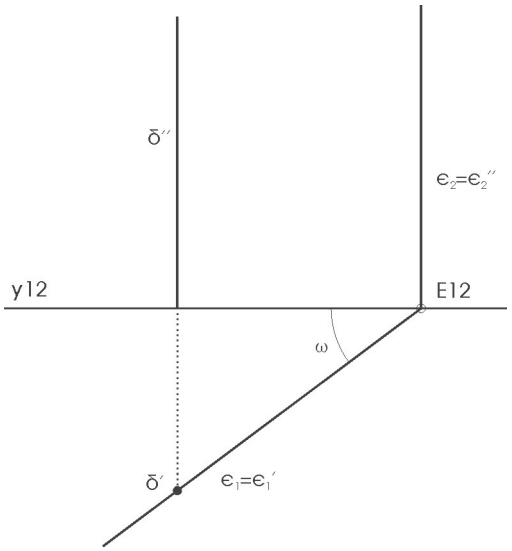
σχ. 58



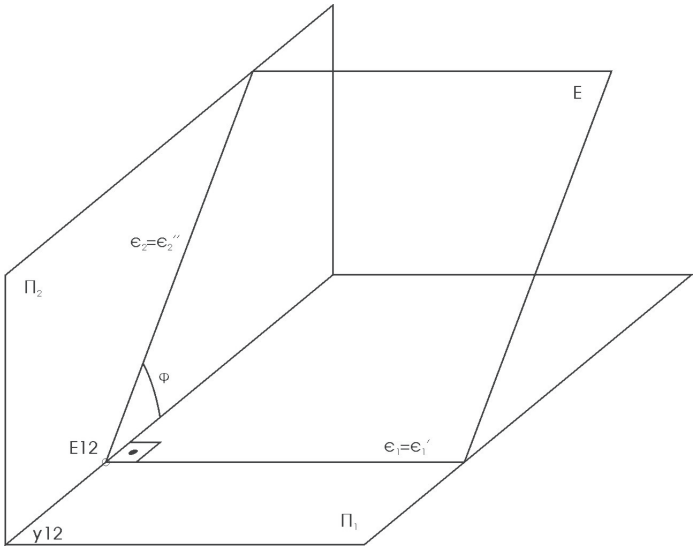
σχ. 59



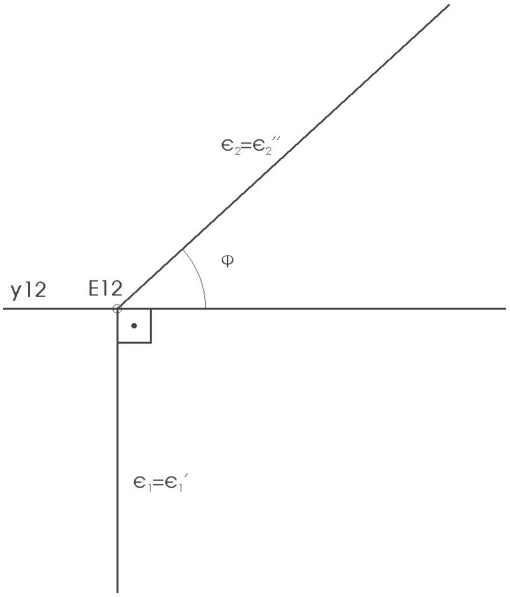
σχ. 60



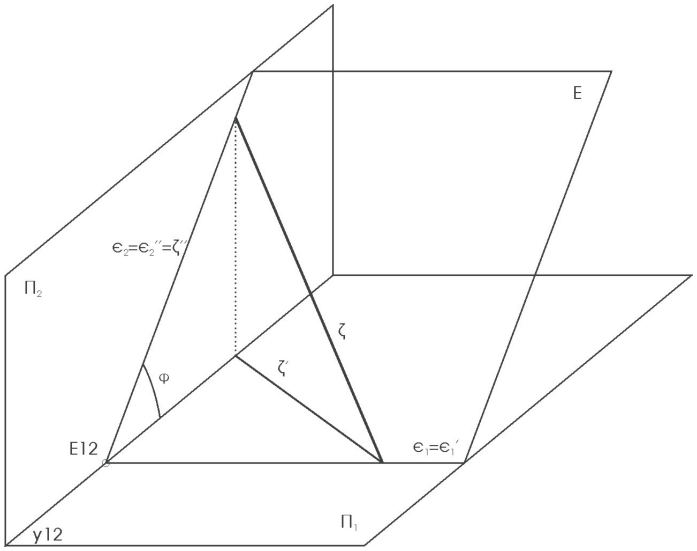
σχ. 61



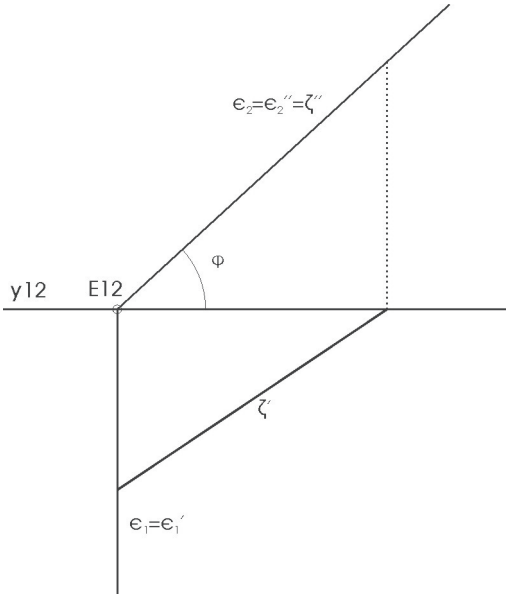
σχ. 62



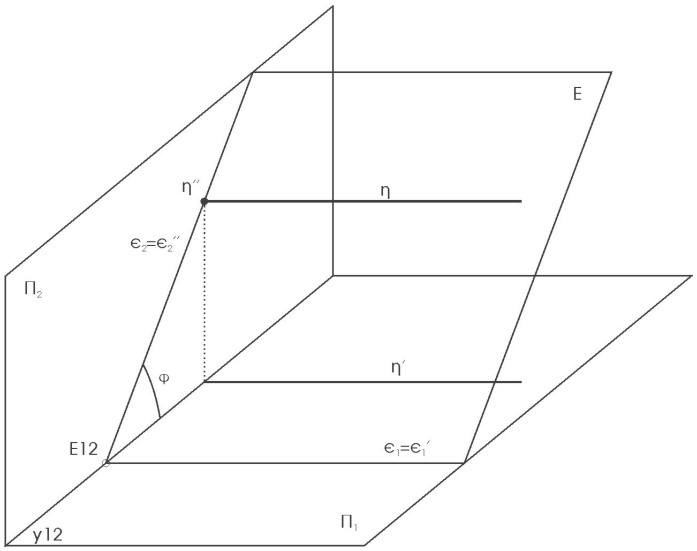
σχ. 63



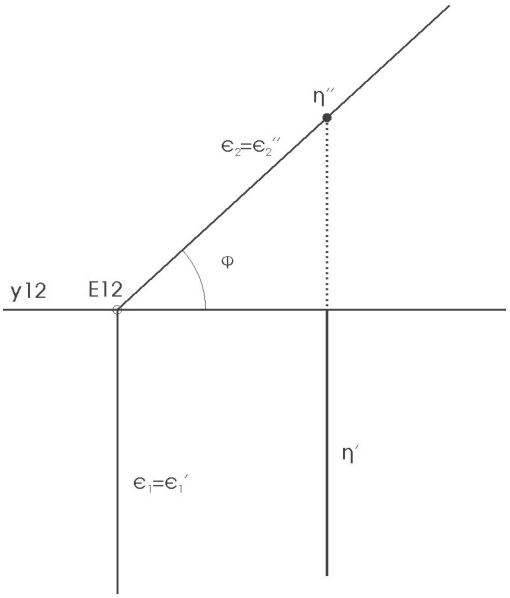
σχ. 64



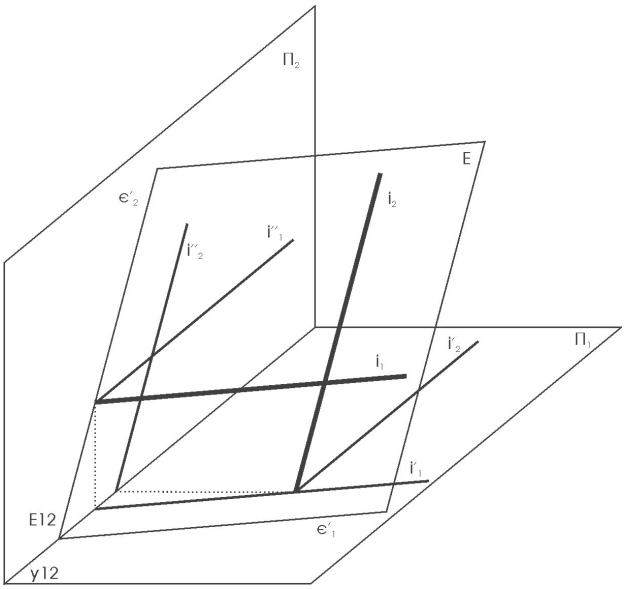
σχ. 65



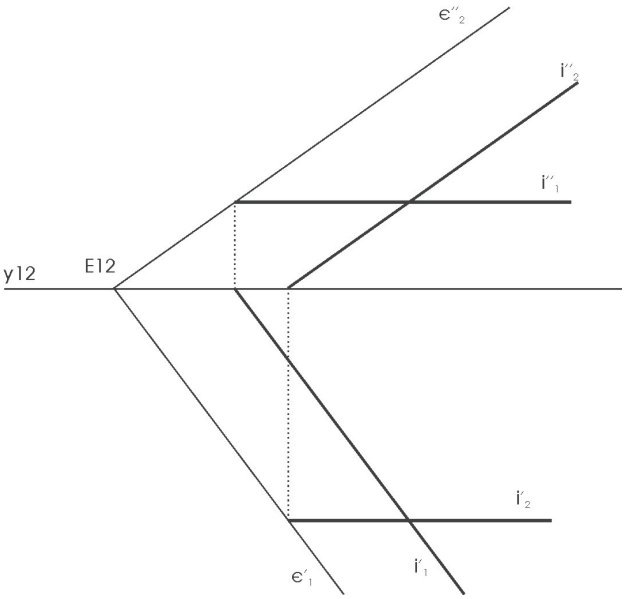
σχ. 66



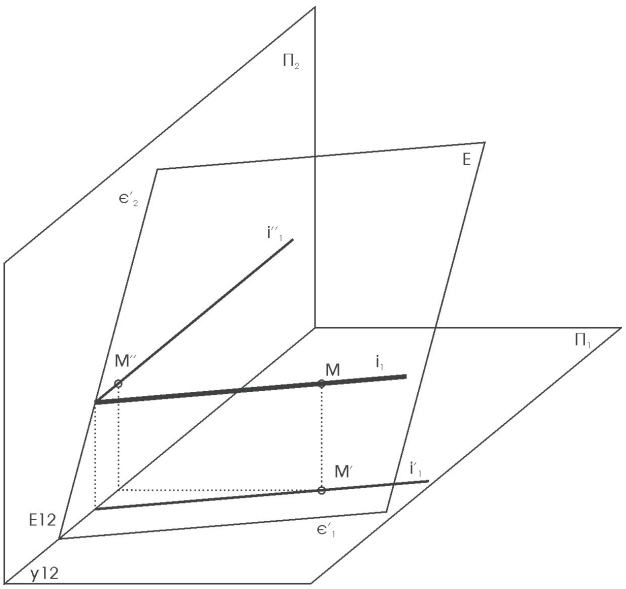
σχ. 67



σχ. 68



σχ. 69



σχ. 70

τον άξονα y12 κατά γωνία ω. Το 2ο ίχνος του Ε στο $Π_2$ είναι κάθετο στον άξονα y12 και η ευθεία γ προβάλλεται στη γ΄΄.

Αν τυχούσα ευθεία δ(δ΄,δ΄΄) του επιπέδου Ε είναι κάθετη στο $Π_1$, τότε αυτή προβάλλεται κατά ευθύγραμμο τμήμα δ΄΄ παράλληλο προς το 2ο ίχνος του Ε (σχ. 60,61).

Πρόσθιο επίπεδο

Λαμβάνουμε το προβολικό σύστημα επιπέδων $Π_1$, $Π_2$ καθώς επίσης και τυχαίο επίπεδο Ε το οποίο είναι:

α) κάθετο προς το κατακόρυφο επίπεδο $Π_2$

β) σχηματίζει γωνία φ με το $Π_1$

Παρατηρούμε ότι η 2η προβολή του Ε στο $Π_2$ είναι η ευθεία $ε_2=ε_2''$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα y12 γωνία φ (σχ. 62,63). Η 1η προβολή του Ε στο $Π_1$ είναι η ευθεία $ε_1=ε_1'$, κάθετη στον άξονα y12. Η προβολή στο $Π_2$ τυχαίας ευθείας ζ(ζ΄,ζ΄΄) που ανήκει στο πρόσθιο επίπεδο Ε, ταυτίζεται με το 2ο ίχνος του επιπέδου $ε_2=ε_2''$ (σχ. 64,65).

Αν τυχούσα ευθεία η(η΄,η΄΄) που ανήκει στο Ε είναι ταυτόχρονα και κάθετη στο $Π_2$, προβάλλεται στο $Π_1$ κατά ευθύγραμμο τμήμα η΄, παράλληλο με το 1ο ίχνος $ε_1'$ του Ε, ενώ στο $Π_2$ προβάλλεται σαν σημείο επάνω στο 2ο ίχνος του Ε (σχ. 66,67).

Ιχνοπαράλληλες επιπέδου

Στο σύστημα των επιπέδων $Π_1$ και $Π_2$, θεωρούμε το τυχαίο επίπεδο Ε με ίχνη $ε_1'$ και $ε_2''$ (σχ. 68).

Η ευθεία i_1 **ορίζεται** οριζόντια, δηλαδή παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο προβολής $Π_1$ και ανήκει στο επίπεδο Ε. Η πρώτη προβολή i_1' της ευθείας i_1 είναι παράλληλη στο πρώτο ίχνος του επιπέδου Ε $ε_1'$, ενώ η δεύτερη προβολή i_1'' της ευθείας i_1 είναι οριζόντια, δηλαδή παράλληλη στον άξονα y12 (σχ. 69).

Ανάλογα, η ευθεία i_2 **ορίζεται** μετωπική, δηλαδή παράλληλη στο κατακόρυφο επίπεδο $Π_2$ και ανήκει στο επίπεδο Ε. Η πρώτη προβολή i_2' της ευθείας i_2 είναι παράλληλη στον άξονα y12 και η δεύτερη

προβολή της i_2'' είναι παράλληλη στο δεύτερο ίχνος ϵ_2'' του επιπέδου Ε.

Οι ευθείες i_1 και i_2 ονομάζονται αντίστοιχα 1η και 2η ιχνοπαράλληλη του επιπέδου Ε, εξ αιτίας ακριβώς της ιδιότητάς τους να έχουν προβολές παράλληλες με τα ίχνη του επιπέδου στο οποίο ανήκουν.

Εύρεση 2ης προβολής σημείου Μ του επιπέδου Ε

Θεωρούμε στο σύστημα προβολής κατά Monge το τυχαίο επίπεδο Ε, με ίχνη ϵ_1' και ϵ_2''. Το σημείο Μ ανήκει στο επίπεδο Ε και γνωρίζουμε έστω την πρώτη προβολή του Μ′ (σχ. 70).

Με τη χρήση των ιχνοπαραλλήλων μπορούμε να ορίσουμε το σημείο Μ στο χώρο, δηλαδή να βρούμε και τη 2η προβολή του.

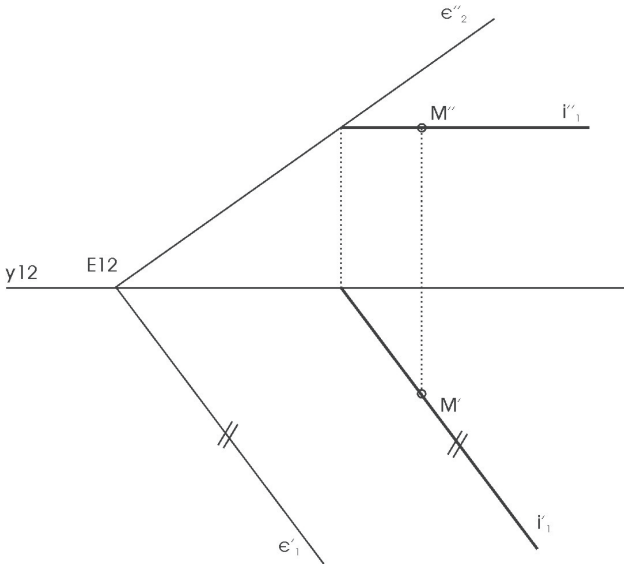
Γνωρίζουμε ότι η 2η προβολή Μ′′ του σημείου Μ βρίσκεται σε κάποιο σημείο της κατακορύφου που διέρχεται από το Μ′. Από το Μ′ φέρνουμε ευθεία i_1' παράλληλη στο πρώτο ίχνος ϵ_1' του επιπέδου Ε (σχ. 71). Από το σημείο όπου η i_1' τέμνει τον άξονα y12 φέρνουμε ευθεία κάθετη στον y12, μέχρι να συναντήσει το δεύτερο ίχνος ϵ_2'' του επιπέδου Ε και από εκεί ευθεία i_2'' παράλληλη με τον άξονα y12. Η τομή της i_2'' με την κατακόρυφη από το Μ′ ορίζουν τη 2η προβολή Μ′′ του σημείου Μ.

Εύρεση των ιχνών επιπέδου του οποίου γνωρίζουμε τις ιχνοπαράλληλες

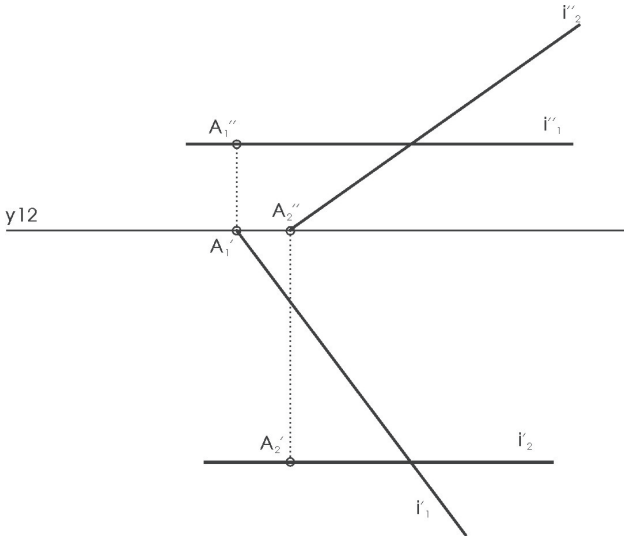
Λαμβάνουμε το σύστημα προβολής κατά Monge, όπου γνωρίζουμε ότι οι προβολές i_1', i_1'' και i_2', i_2'' είναι οι ιχνοπαράλληλες επιπέδου Ε, του οποίου ζητούμε τα ίχνη (σχ. 72). Από το ίχνος A_2'' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη i_2'' (σχ. 73), η οποία συναντά τον άξονα y12 στο σημείο Ε12. Όμοια, από το ίχνος A_1' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη i_1', η οποία τέμνει τον άξονα y12 στο ίδιο σημείο Ε12. Έτσι ορίζονται τα ίχνη ϵ_1' και ϵ_2'' του επιπέδου Ε.

Τομή επιπέδων

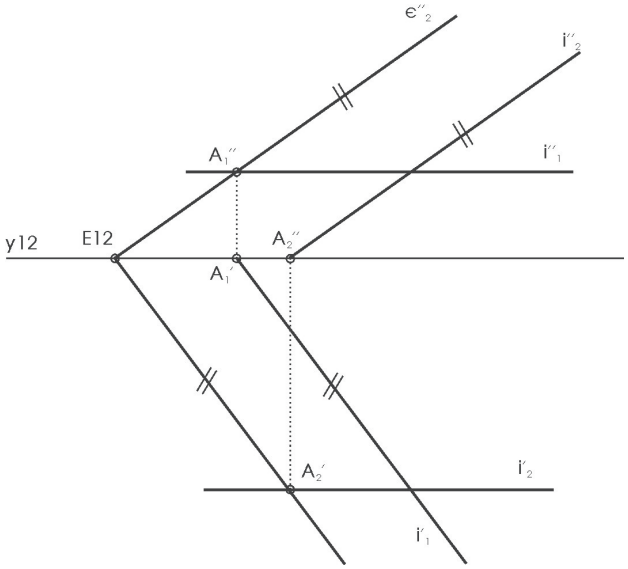
Όπως είναι γνωστό, η τομή δύο επιπέδων είναι ευθεία. Στην παραστατική γεωμετρία πρέπει να



σχ. 71



σχ. 72

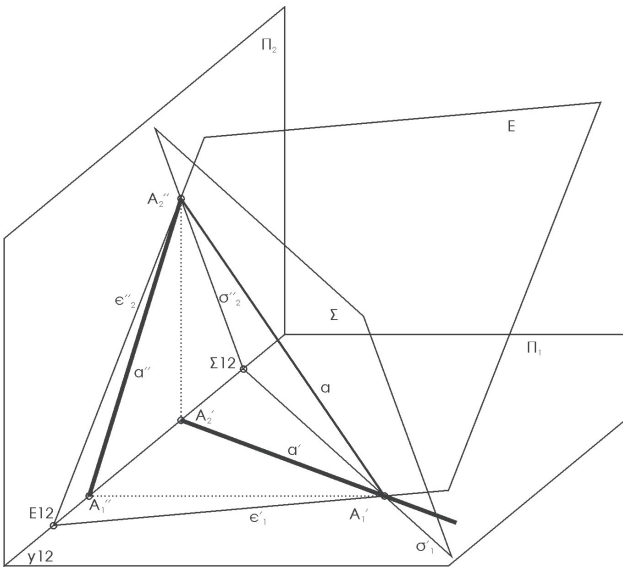


σχ. 73

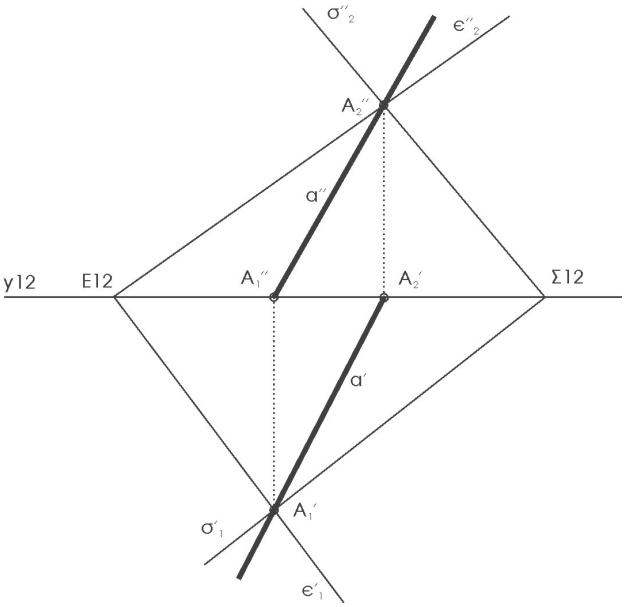
ορίσουμε την ευθεία τομής α των δύο επιπέδων Ε και Σ μέσω των δύο προβολών της α΄ και α΄΄ (σχ. 74).

Εφ΄ όσον η ευθεία α είναι η τομή των επιπέδων Ε και Σ, ανήκει και στα δύο επίπεδα Ε και Σ. Τα δε ίχνη A_1 και A_2 της ευθείας α θα πρέπει να βρίσκονται πάνω στα ίχνη των επιπέδων Ε και Σ. Επομένως η 1η προβολή A_1' του πρώτου ίχνους της α βρίσκεται στην τομή των πρώτων ιχνών των δύο επιπέδων ϵ_1' και σ_1' και η 2η προβολή A_1'', πάνω στον άξονα y12 (σχ. 75). Όμοια, η 2η προβολή A_2'' του δευτέρου ίχνους της α, βρίσκεται στην τομή των δευτέρων ιχνών ϵ_2'' και σ_2'' των Ε και Σ και η 1η προβολή A_2', επίσης πάνω στον άξονα y12. Ενώνοντας το σημείο A_1' με το A_2' και το σημείο A_1'' με το A_2'' βρίσκουμε αντίστοιχα την 1η και 2η προβολή α΄ και α΄΄ της ευθείας τομής των Ε και Σ.

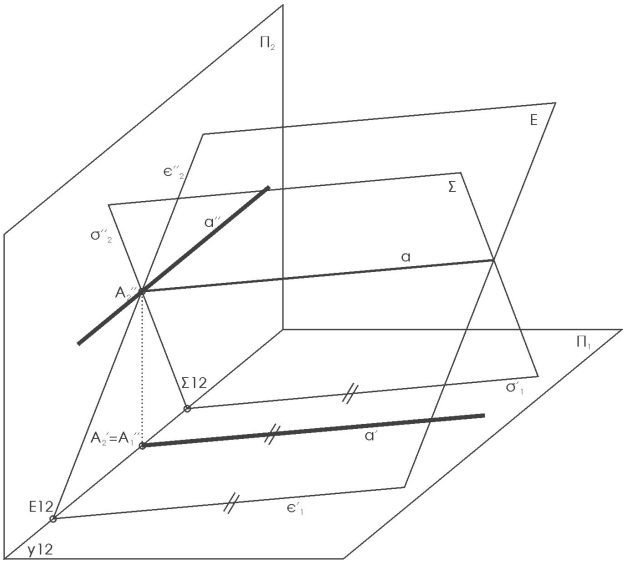
Μια ειδική περίπτωση συναντάμε όταν συμβαίνει τα δύο επίπεδα Ε και Σ να έχουν παράλληλα πρώτα ίχνη ϵ_1' και σ_1' (σχ. 76). Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, όπως και στη γενική περίπτωση, με τη διαφορά ότι η τομή των πρώτων ιχνών των επιπέδων Ε και Σ βρίσκεται στο άπειρο. Επομένως ολόκληρη η πρώτη προβολή α΄ της ευθείας τομής α των δύο επιπέδων Ε και Σ είναι παράλληλη με τα πρώτα ίχνη των επιπέδων (σχ. 77). Εφ΄ όσον το πρώτο ίχνος της α βρίσκεται στο άπειρο, συνεπάγεται ότι και οι δύο προβολές του θα βρίσκονται στο άπειρο (άρα και το σημείο A_2''). Συμπεραίνουμε επομένως ότι η δεύτερη



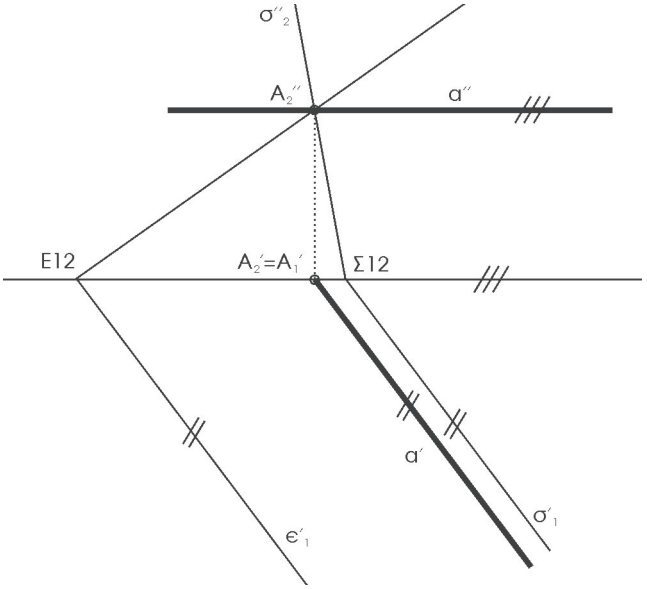
σχ. 74



σχ. 75



σχ. 76



σχ. 77

προβολή α΄΄ είναι παράλληλη στον άξονα y12. Από τις προβολές α΄ και α΄΄ καταλαβαίνουμε ότι η ευθεία α είναι οριζόντια ευθεία.

Τομή ευθείας και επιπέδου

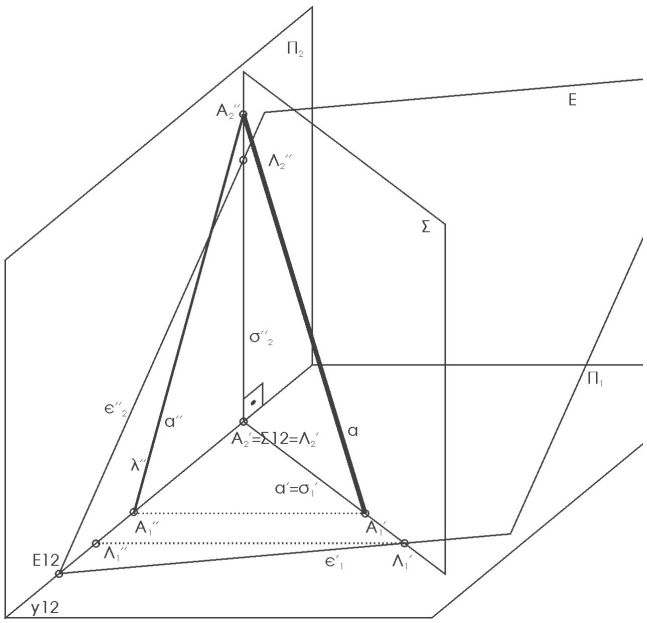
Η σχετική θέση μιας ευθείας κι ενός επιπέδου παρουσιάζει τρεις περιπτώσεις:

- Η ευθεία ανήκει εξ ολοκλήρου στο επίπεδο (άπειρα σημεία τομής)
- Η ευθεία είναι παράλληλη με το επίπεδο (η τομή της ευθείας και του επιπέδου είναι στο άπειρο)
- Η ευθεία τέμνει το επίπεδο και το σημείο τομής είναι μοναδικό

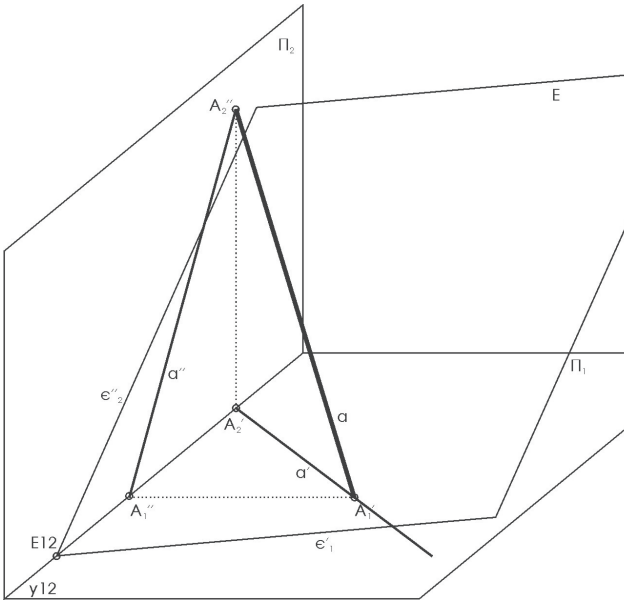
Λαμβάνουμε τα επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$, το τυχαίο επίπεδο Ε, με ίχνη $ε_1'$ και $ε_2''$ και την ευθεία α, με προβολές α΄ και α΄΄ (σχ. 78) και ζητούμε το σημείο τομής Τ της ευθείας α με το επίπεδο Ε.

Στο σχήμα 79 παριστάνονται το επίπεδο Ε μέσω των ιχνών του $ε_1'$ και $ε_2''$, οι προβολές α΄ και α΄΄ της ευθείας α και οι προβολές του πρώτου και δευτέρου ίχνους της α.

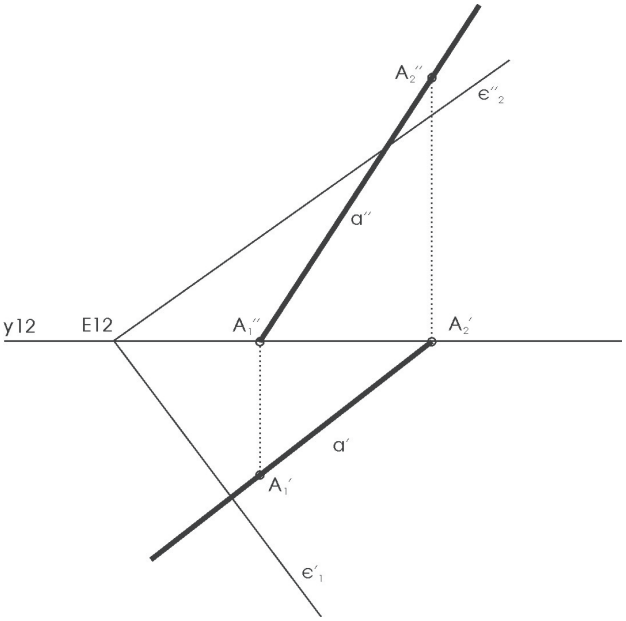
Θεωρούμε ένα βοηθητικό κατακόρυφο επίπεδο Σ τέτοιο, ώστε να περιέχει την α. Τότε το 1ο ίχνος του $σ_1'$ θα ταυτίζεται με την πρώτη προβολή α΄ της ευθείας α (σχ. 80). Το 2ο ίχνος $σ_2''$ του επιπέδου Σ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα y12 και περνά από το σημείο A_2''. Σημειώνεται ότι το επίπεδο Σ



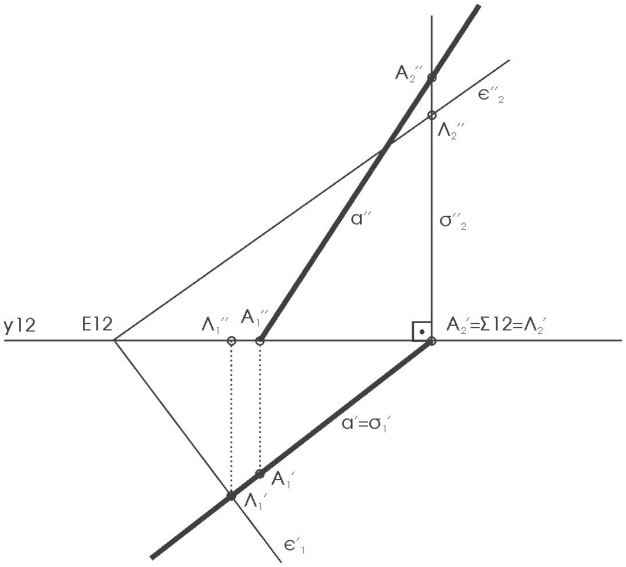
σχ. 80



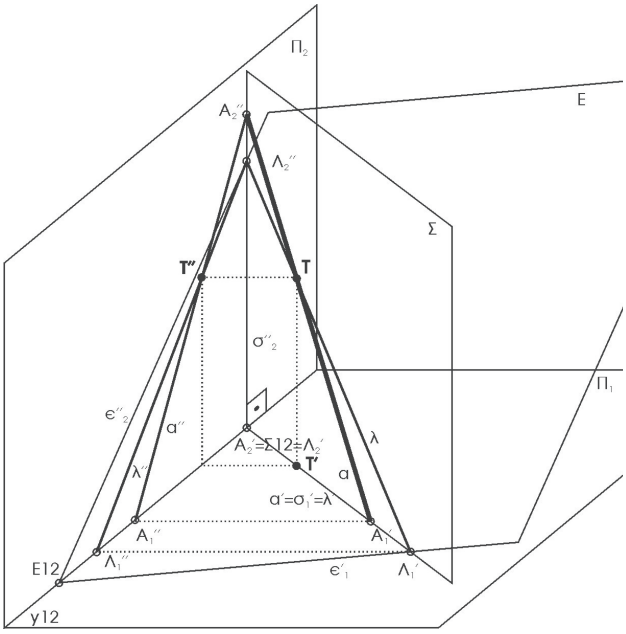
σχ. 78



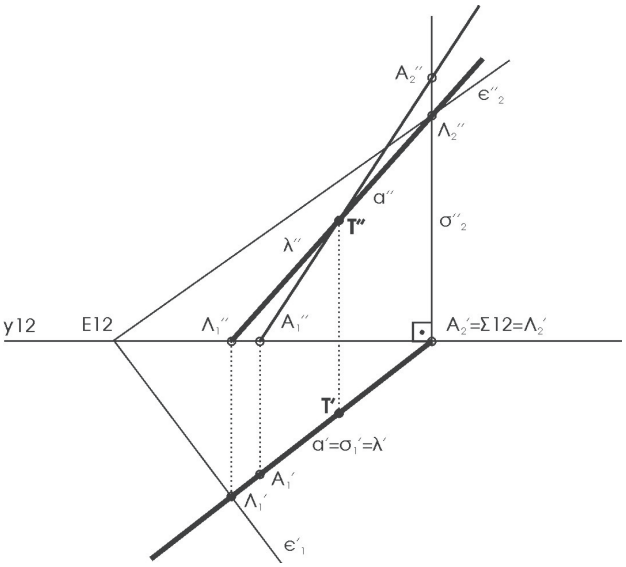
σχ. 79



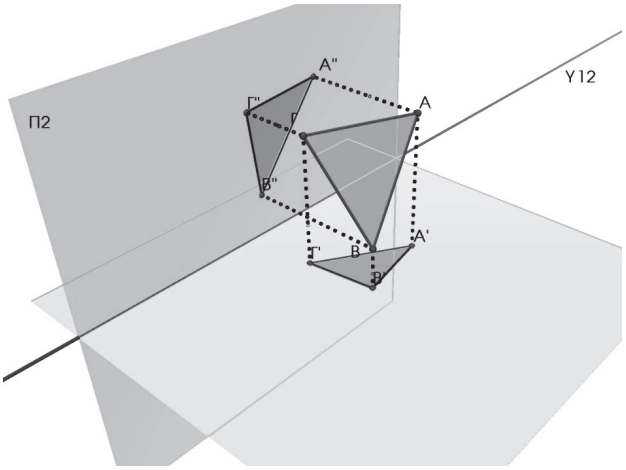
σχ. 81



σχ. 82



σχ. 83



σχ. 84

είναι τελικά το μοναδικό επίπεδο το οποίο περιέχει την ευθεία α και είναι κατακόρυφο. Βρίσκουμε την τομή των δύο επιπέδων Ε και Σ: η τομή των πρώτων ιχνών μας δίνει το σημείο $Λ_1(Λ_1', Λ_1'')$ και η τομή των δευτέρων ιχνών μας δίνει το σημείο $Λ_2(Λ_2', Λ_2'')$, όπως φαίνεται στο σχήμα 81. Η ευθεία λ (σχ. 82) με προβολές λ΄ και λ΄΄ είναι η ευθεία τομής των δύο επιπέδων Ε και Σ. Η λ –ως ευθεία τομής- ανήκει στο επίπεδο Σ, επομένως είναι συνεπίπεδη με την α.

Μπορούμε επομένως να βρούμε την τομή των ευθειών α και λ. Στο επίπεδο $Π_1$ οι προβολές α΄ και λ΄ των ευθειών α και λ ταυτίζονται (σχ. 83). Στο επίπεδο $Π_2$ όμως οι δεύτερες προβολές α΄΄ και λ΄΄ τέμνονται στο σημείο Τ΄΄, από το οποίο βρίσκουμε την 1η προβολή Τ΄ του Τ πάνω στην λ΄.Το σημείο Τ(Τ΄,Τ΄΄) είναι το ζητούμενο σημείο τομής του επιπέδου Ε και της ευθείας α, διότι είναι σημείο της ευθείας α και του επιπέδου Ε, μια και βρίσκεται στην ευθεία λ, που είναι ευθεία του επιπέδου Ε.

Κατάκλιση επιπέδου σχήματος

Οι ορθές προβολές ενός επιπέδου σχήματος δεν μας δίνουν την πραγματική μορφή και μέγεθος του σχήματος, εκτός και αν το σχήμα ανήκει σε οριζόντιο ή μετωπικό επίπεδο. Για τα σχήματα του χώρου που ανήκουν σε τυχαία επίπεδα μπορούμε να απεικονίσουμε την πραγματική τους μορφή και μέγεθος, μέσω της μεθόδου της κατάκλισης του επιπέδου στο οποίο αυτές ανήκουν, σε κάποιο από τα βασικά επίπεδα προβολής $Π_1$ ή $Π_2$.

Η κατάκλιση ενός σχήματος γίνεται:

- μέσω της περιστροφής του γύρω από το πρώτο ίχνος $ε_1'$ του επιπέδου στο οποίο ανήκει
- μέσω της περιστροφής του γύρω από το δεύτερο ίχνος $ε_2''$ του επιπέδου στο οποίο ανήκει
- μέσω της περιστροφής του γύρω από μία πρώτη ιχνοπαράλληλη i_1' του επιπέδου στο οποίο ανήκει
- μέσω της περιστροφής του γύρω από μια δεύτερη ιχνοπαράλληλη i_2'' του επιπέδου στο οποίο ανήκει

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις προβολές του σχήματος, έστω

του τριγώνου ΑΒΓ, στα $Π_1$ και $Π_2$ (σχ. 84) κι επομένως να γνωρίζουμε (ή να μπορούμε να βρούμε) τα ίχνη $σ_1'$ και $σ_2''$ του επιπέδου Σ, στο οποίο το τρίγωνο ΑΒΓ ανήκει. Έτσι μπορούμε να γνωρίζουμε τη γωνία ω, που είναι μοναδική για κάθε επίπεδο και είναι η γωνία κλίσης του Σ ως προς το οριζόντιο επίπεδο προβολής $Π_1$.

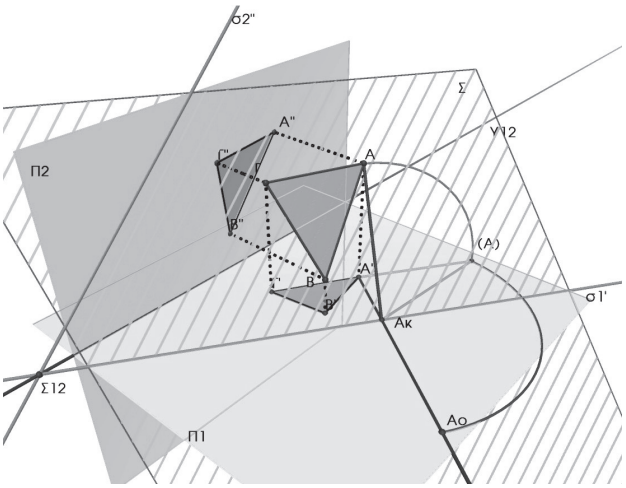
Στο σχήμα 85 το τρίγωνο $AA'A_κ$ απεικονίζει τη γωνία $ω=AA_κA'$. Στην παράσταση κατά Monge (σχ. 86) το σημείο Α δεν απεικονίζεται, παρά μόνο μέσω των προβολών του Α΄ και Α΄΄. Μπορούμε παρόλ΄ αυτά να έχουμε την «εικόνα» του σημείου Α, το σημείο (Α), εάν από το Α΄ σημειώσουμε το υψόμετρο (z_A) σε ευθεία παράλληλη με το ίχνος $σ_1'$ του επιπέδου, διερχόμενη από το Α΄. Εάν από το Α΄ φέρουμε άλλη μία ευθεία κάθετη αυτή τη φορά προς το ίχνος $σ_1'$, τότε η γωνία ω σχηματίζεται στη γωνία $A'A_κ(A)$.

Η κατάκλιση του επιπέδου Σ του τριγώνου ΑΒΓ μπορεί να γίνει με περιστροφή του Σ γύρω από το πρώτο ίχνος του $σ_1'$, έως ότου αυτό ταυτιστεί με το επίπεδο προβολής $Π_1$ (σχ. 86).

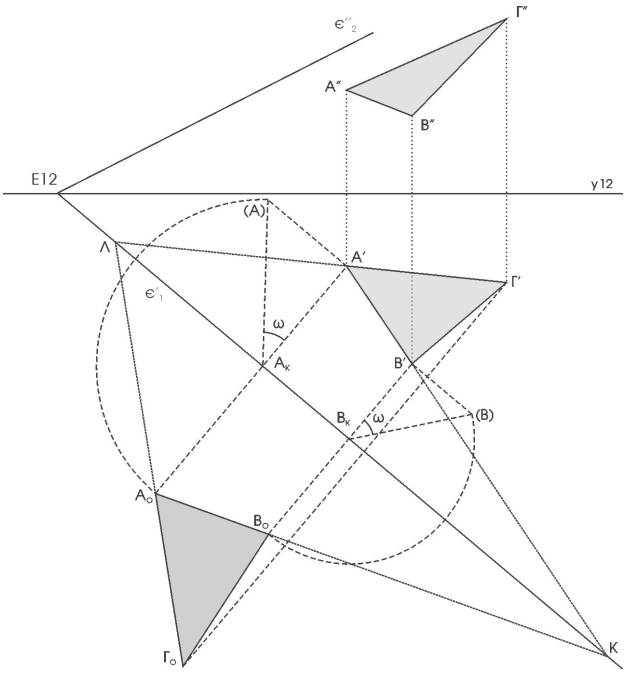
Η υποτείνουσα $(A)A_κ$ του τριγώνου $A'A_κ(A)$ είναι ίση με την ακτίνα περιστροφής του πραγματικού σημείου Α. Επομένως με κέντρο το $A_κ$ και ακτίνα την $A_κ(A)$ χαράσσουμε τόξο κύκλου, έως ότου αυτό τμήσει την προέκταση της $A'A_κ$. Το σημείο A_O είναι η κατάκλιση του σημείου Α του χώρου, στο επίπεδο προβολής $Π_1$. Εάν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο για τα σημεία Β και Γ, τότε το σχήμα $A_OB_OΓ_O$ είναι τρίγωνο ίσο με το πραγματικό.

Η μέθοδος της κατάκλισης είναι χρήσιμη για να προσδιορίζουμε τα ακριβή μεγέθη των επιπέδων σχημάτων, αλλά είναι επίσης ένας τρόπος για να προσδιορίζουμε διάφορα στοιχεία των σχημάτων αυτών, που μας είναι χρήσιμα.

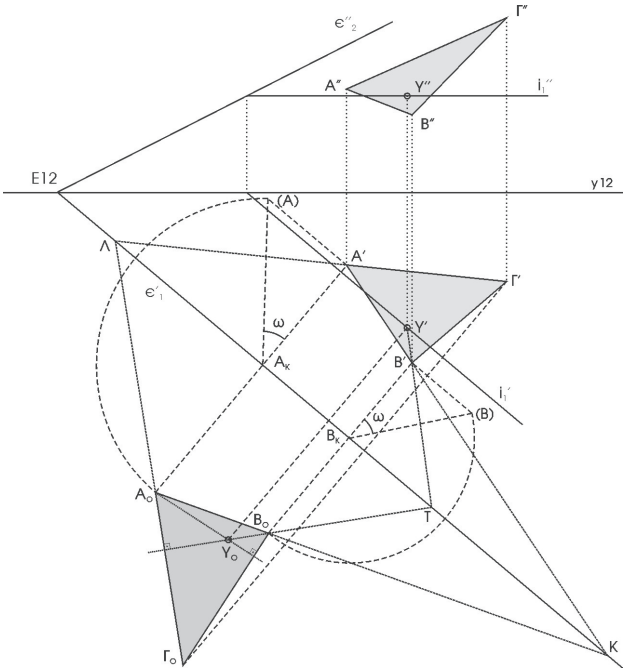
Στο παράδειγμα του σχήματος 87 θέλουμε να προσδιορίσουμε σε 1η και 2η προβολή το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Γνωρίζοντας μόνο τις δύο προβολές του τριγώνου, αυτό δεν είναι δυνατό. Ένας τρόπος είναι να κατασκευάσουμε την κατάκλιση του τριγώνου, πάνω σ΄ αυτή να προσδιορίσουμε το ορθόκεντρο και κατόπιν να κάνουμε *ανάκλιση* του σημείου Y_O. Ορίζοντας την 1η προβολή Υ΄ του ορθόκεντρου, χρησιμοποιούμε την 1η ιχνοπαράλληλη $i_1(i_1', i_1'')$ για να προσδιορίσουμε και τη 2η προβολή Υ΄΄ του σημείου.



σχ.85



σχ. 86



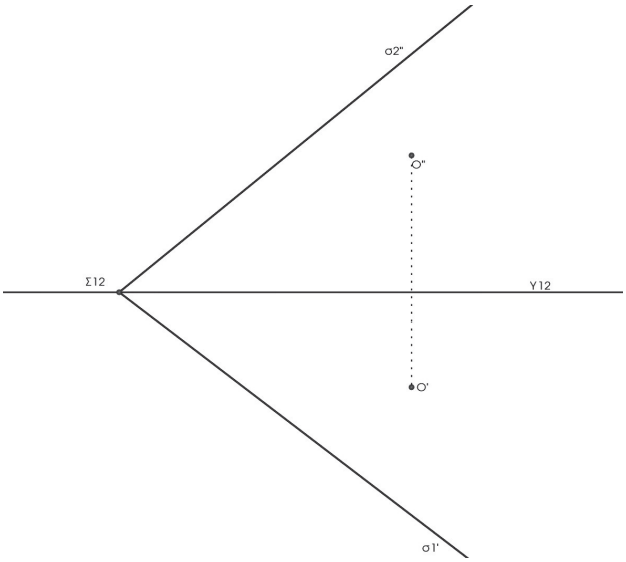
σχ. 87

Παράσταση κύκλου

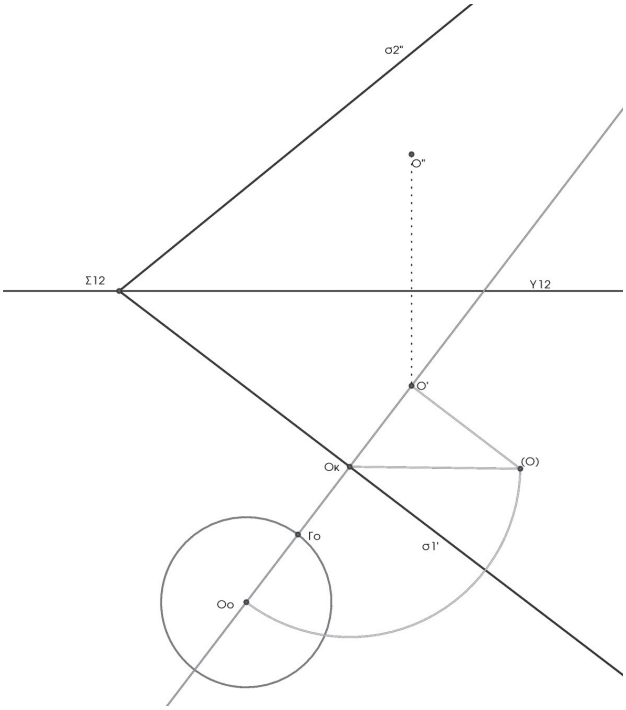
Οι προβολές ενός κύκλου τυχαίου επιπέδου παρουσιάζονται στα επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$ ως ελλείψεις.

Για να κατασκευάσουμε τις προβολές ενός κύκλου τυχαίου επιπέδου, αρκεί να γνωρίζουμε τη θέση του κέντρου του Ο(Ο΄,Ο΄΄) στο επίπεδο Σ($σ_1$΄,$σ_2$΄΄) και το μέγεθος της ακτίνας του (σχ. 88). Η κατασκευή απαιτεί να σχηματίσουμε την κατάκλιση του σημείου Ο στο επίπεδο $Π_1$, ώστε να γίνει δυνατό να οριστεί το πραγματικό μέγεθος της ακτίνας του κύκλου ΟΓ=$O_O Γ_O$ (σχ. 89). Στη συνέχεια κάνουμε *ανάκλιση* των σημείων που θα μας φανούν χρήσιμα στην κατασκευή της έλλειψης, η οποία απεικονίζει τον κύκλο στην 1η προβολή και κατόπιν στη 2η προβολή του. «Χρήσιμα» θα χαρακτηρίζαμε τα σημεία εκείνα του κύκλου, που ανήκουν σε κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους, διότι θα μας δώσουν *συζυγείς* διαμέτρους της έλλειψης, από τις οποίες στη συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε τους μεγάλο και μικρό άξονα κι επομένως να την κατασκευάσουμε γεωμετρικά (κατασκευή Rytz).

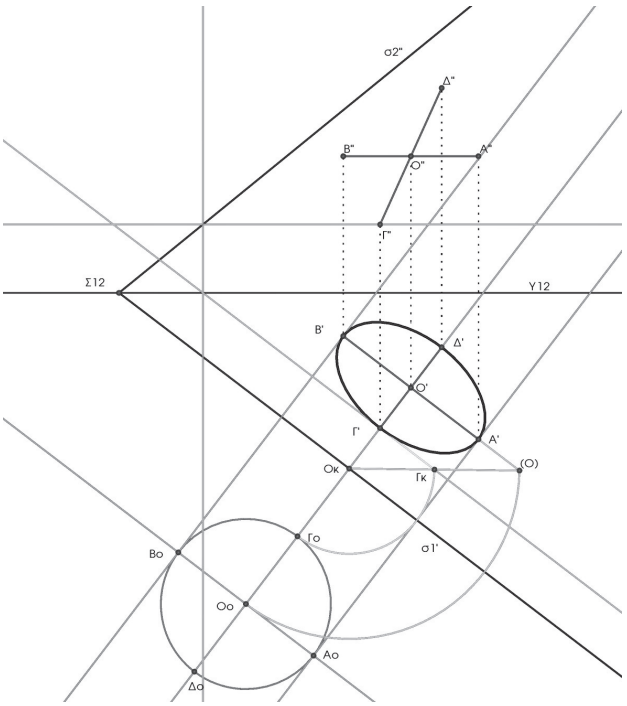
Ορίζουμε λοιπόν τα σημεία A_O και B_O στην παράλληλη με το ίχνος $σ_1$΄ διάμετρο, τα οποία - μετά την ανάκλιση- βρίσκονται αντίστοιχα στην παράλληλη στο ίχνος $σ_1$΄ από το Ο΄ διάμετρο



σχ. 88

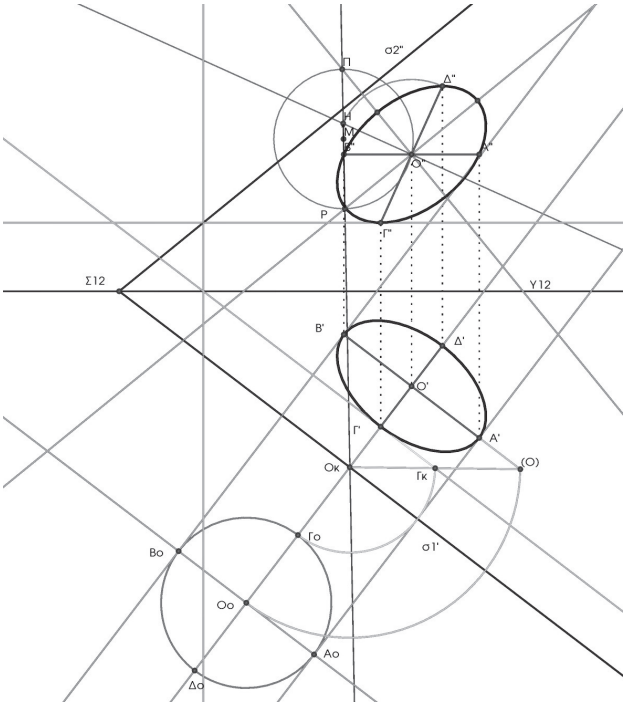


σχ. 89



σχ. 90

(σχ. 90). Το σημείο $Γ_O$ βρίσκεται σε διάμετρο κάθετη στο ίχνος $σ_1'$ και η 1η προβολή του Γ′ βρίσκεται αντίστοιχα σε κάθετη διάμετρο της έλλειψης. Το μέγεθος Ο′Γ′ ορίζεται γεωμετρικά από την ανάκλιση του σημείου $Γ_O$ και τον ορισμό του Γ′ στην $Ο'Ο_K$. Το σημείο Δ′ βρίσκεται σε αντιδιαμετρική θέση σε σχέση με το σημείο Γ′ και ισχύει: Ο′Δ′=Ο′Γ′[2]. Οι διάμετροι Α′Β′ και Γ′Δ′ είναι κάθετες μεταξύ τους, επομένως αποτελούν τους μεγάλο και μικρό άξονα της έλλειψης, αντίστοιχα. Όλα τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι σημεία του επιπέδου $σ(σ_1', σ_2'')$, επομένως είναι απλό να οριστούν οι 2ες προβολές τους, μέσω ιχνοπαραλλήλων (στο σχ. 90 έχει σημειωθεί η ιχνοπαράλληλη από το σημείο Γ μόνο). Στη 2η προβολή οι διάμετροι Α″Β″ και Γ″Δ″ δεν είναι πλέον κάθετες μεταξύ τους, αλλά προέρχονται από τους άξονες της έλλειψης της 1ης προβολής, η οποία είναι ομόλογη με την έλλειψη της 2ης προβολής. Επομένως οι διάμετροι Α″Β″ και Γ″Δ″ είναι συζυγείς διάμετροι της έλλειψης. Μέσω της κατασκευής Rytz[3] (σχ. 91), ορίζουμε τους άξονες της έλλειψης και άρα την ίδια την έλλειψη.



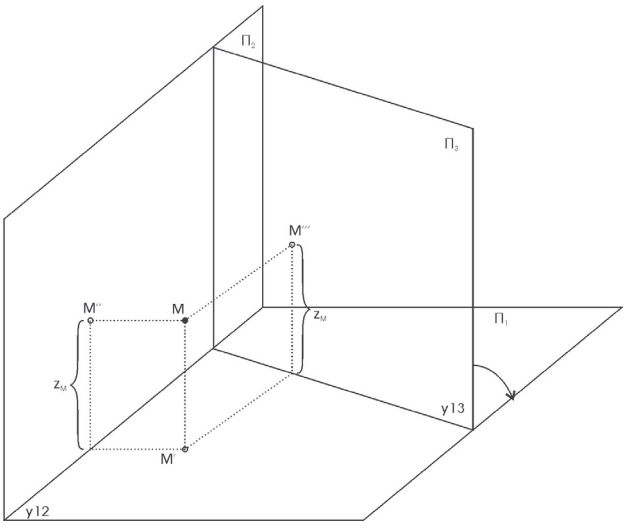
σχ. 91

Αλλαγή επιπέδου προβολής

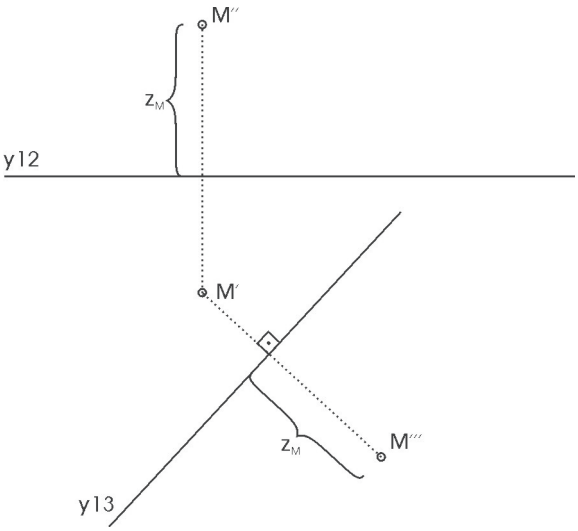
Η αλλαγή επιπέδου προβολής είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην παραστατική γεωμετρία, διότι μας δίνει τη δυνατότητα να «κατευθύνουμε» και να «ελέγχουμε» τις προβολές των σχημάτων του χώρου όπως εμείς επιθυμούμε, ανεξάρτητα από το αν τα σχήματα που μελετούμε βρίσκονται σε τυχαία επίπεδα ως προς τα βασικά επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$.

Η αλλαγή επιπέδου προβολής γίνεται με κατάργηση του ενός από τα δύο αρχικά επίπεδα $Π_1$ ή $Π_2$ και ταυτόχρονα την αντικατάστασή του από ένα τρίτο επίπεδο, το οποίο όμως πρέπει να είναι κάθετο στο επίπεδο που διατηρείται.

Στο σχήμα 92 το επίπεδο προβολής $Π_2$ αντικαθίσταται από το επίπεδο $Π_3$, το οποίο είναι και πάλι κάθετο στο διατηρούμενο επίπεδο $Π_1$, αλλά σε άλλη θέση σε σχέση με το $Π_2$. Το σημείο Μ του χώρου είχε αρχικά δύο προβολές Μ′ και Μ″ στα $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα. Στο νέο σύστημα προβολής των $Π_1$ και $Π_3$ το σημείο Μ απεικονίζεται μέσω της *πρώτης* και *τρίτης* προβολής του, Μ′ και Μ‴ αντίστοιχα. Μετά

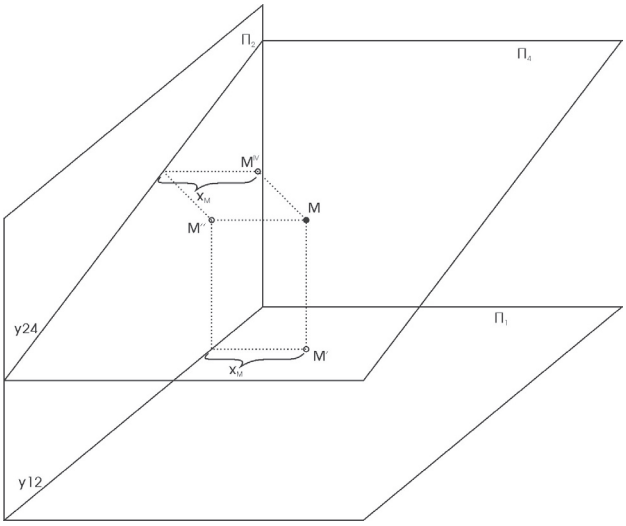


σχ. 92

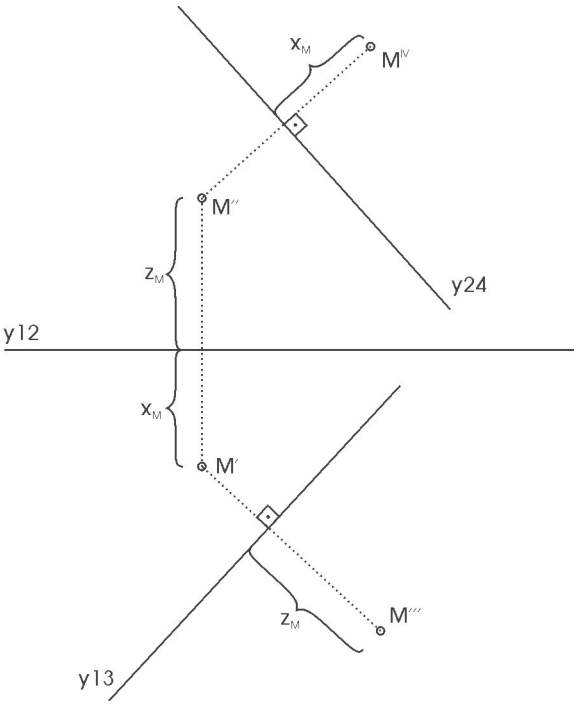


σχ. 93

2. Ως ακτίνες του ίδιου κύκλου
3. βλ. Παράρτημα Α, παρ. 26



σχ. 94



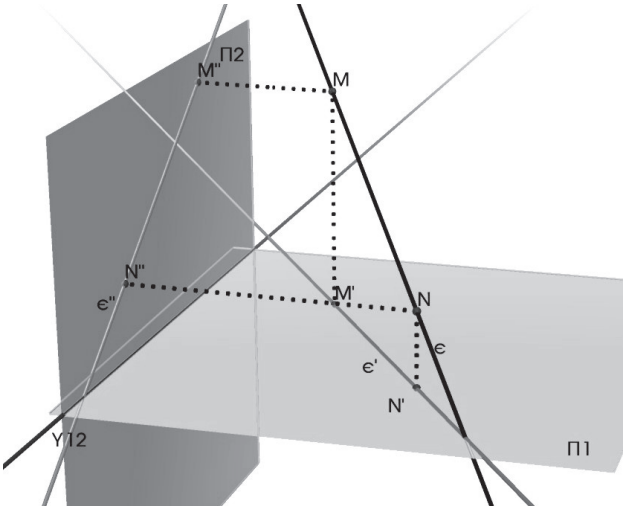
σχ. 95

την κατάκλιση του $Π_3$ στο $Π_1$, με άξονα περιστροφής την τομή των $Π_1$ και $Π_3$, που είναι η ευθεία y13, η 3η προβολή M΄΄΄ του σημείου M βρίσκεται στην κάθετη από το M΄ προς τον νέο άξονα y13 και απέχει από τον y13 απόσταση ίση με το αρχικό υψόμετρο του σημείου (σχ. 93).

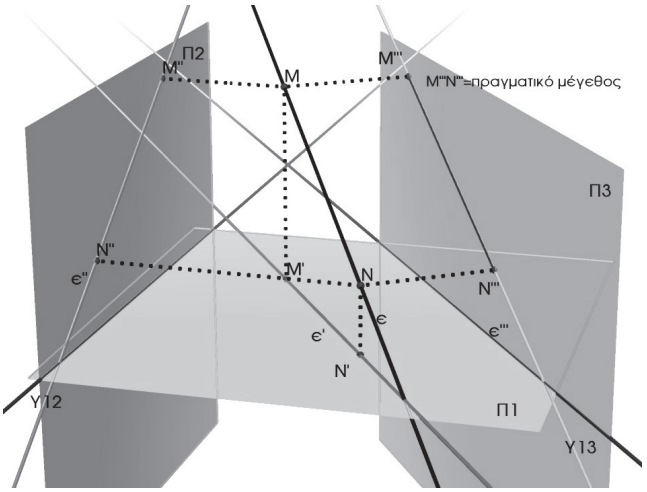
Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε ν΄ αντικαταστήσουμε το επίπεδο $Π_1$ με άλλο επίπεδο $Π_4$, κάθετο στο $Π_2$ (σχ. 94,95).

Στο σχήμα 97 το επίπεδο $Π_3$ είναι κάθετο στο $Π_1$ και αντικαθιστά το $Π_2$. Στο ίδιο σχήμα το ίχνος y13 του επιπέδου προβολής $Π_3$ ορίστηκε σε τυχαία θέση μέσα στο χώρο I, ώστε να εξυπηρετείται η παράσταση του αντικειμένου, παράλληλο όμως στην 1η προβολή ε΄ της ευθείας ε, που ορίζουν τα σημεία M και N. Στο νέο σύστημα προβολής $Π_1$ – $Π_3$ τα στοιχεία του αντικειμένου (κορυφές, ακμές, γενέτειρες κλπ) έχουν *1η και 3η προβολή*, αντί να έχουν 1η και 2η προβολή. Στο σύστημα προβολής $Π_1$ – $Π_3$ ένα σημείο του χώρου M απεικονίζεται με την 1η προβολή του M΄ και την 3η προβολή του M΄΄΄, που βρίσκεται σε ευθεία κάθετη στον άξονα y13, διερχόμενη από το M΄ και σε υψόμετρο $z_{M'}$.

Στο σχήμα 96 έχει παρασταθεί το ευθύγραμμο τμήμα MN, που ανήκει στην τυχαία ευθεία ε του χώρου. Τα ευθύγραμμα τμήματα M΄N΄ και M΄΄N΄΄ είναι αντίστοιχα η 1η και 2η προβολή του MN, αλλά δεν μπορούν σ΄ αυτό το σύστημα προβολής να συλλεχθούν περισσότερες πληροφορίες για το MN. Τοποθετώντας το επίπεδο προβολής $Π_3$ έτσι, ώστε το ίχνος του y13 να είναι παράλληλο προς την 1η προβολή ε΄ της ευθείας ε, τότε η ευθεία ε μετατρέπεται σε μετωπική ευθεία ως προς το



σχ. 96



σχ. 97

σύστημα προβολής $Π_1$ – $Π_3$ (σχ. 97). Επομένως στην 3η προβολή το ευθύγραμμο τμήμα M′′′N′′′ προβάλλεται ίσο με το πραγματικό μήκος του τμήματος MN του χώρου (σχ. 98).

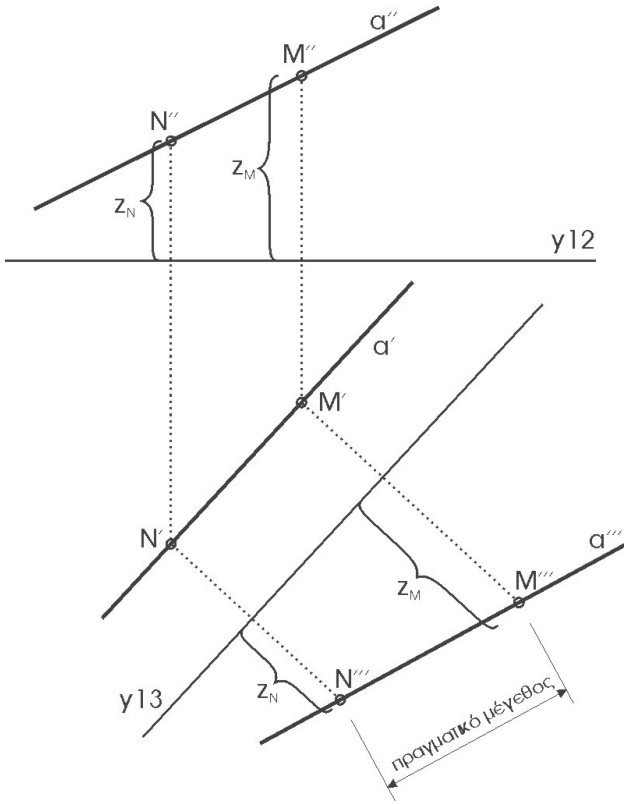
Μία ορθή γωνία προβάλλεται σε ορθή, όταν μία τουλάχιστον πλευρά της είναι παράλληλη στο επίπεδο προβολής.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, για να προσδιορίσουμε την κάθετη στην ευθεία α από ένα τυχαίο σημείο Α εκτός αυτής, θα πρέπει να ορίσουμε το σύστημα προβολής τέτοιο, ώστε η ευθεία α να προβάλλεται σαν μετωπική ευθεία (σχ. 99). Από την 3η προβολή A′′′ του Α μπορούμε να φέρουμε την κάθετη στην 3η προβολή α′′′ της α. Προσδιορίζουμε με τον τρόπο αυτό το σημείο B′′′ πάνω στην α′′′ και κατόπιν τις δύο προβολές B′ και B′′ του σημείου Β.

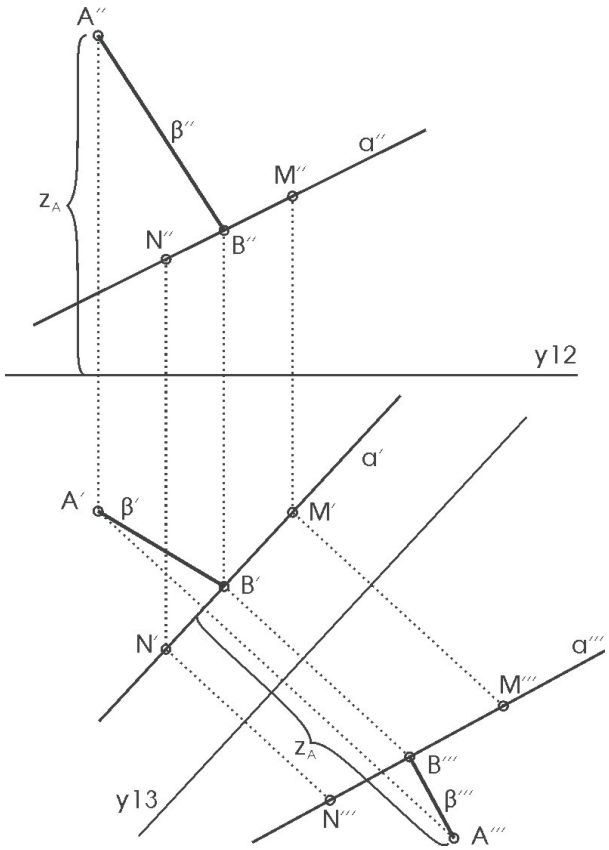
Σημειώνεται ότι θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την κάθετη από το σημείο Α στην ευθεία α και με την μέθοδο της κατάκλισης, αλλά τότε θα έπρεπε πρώτα να προσδιορίσουμε το επίπεδο Ε που σχηματίζουν η ευθεία α και το σημείο Α, μέσω των ιχνών του $ε_1'$ και $ε_2''$. Η διαδικασία είναι ορθή, αλλά σαφώς πιο πολύπλοκη.

Η απεικόνιση ενός επιπέδου στην 3η και πλέον προβολή γίνεται και πάλι μέσω των ιχνών του. Για να προσδιορίσουμε το 3ο ίχνος $ε_3'''$ ενός επιπέδου Ε, χρειάζεται να προσδιορίσουμε δύο σημεία της ευθείας $ε_3'''$ (σχ. 100). Το πρώτο σημείο είναι το Ε13 και είναι η τομή του 1ου ίχνους $ε_1'$ με τον άξονα y13. Το δεύτερο σημείο του 3ου ίχνους του επιπέδου μπορεί να προσδιοριστεί μέσω ενός τυχαίου σημείου Μ του επιπέδου Ε. Από το σημείο Μ διέρχεται η 1η ιχνοπαράλληλη i_1 με τις προβολές της i_1' και i_1'' στα επίπεδα $Π_1$ και $Π_2$ αντίστοιχα. Η 3η προβολή i_1''' της ιχνοπαραλλήλου γνωρίζουμε ότι είναι οριζόντια ευθεία και διέρχεται από την 3η προβολή M′′′ του Μ. Προσδιορίζουμε την 3η προβολή M′′′ και φέρνουμε ευθεία οριζόντια στο νέο σύστημα προβολής των $Π_1$ και $Π_3$, δηλαδή παράλληλη στον άξονα y13 (σχ. 101). Από το σημείο όπου η i_1' τέμνει τον άξονα y13 φέρνουμε ευθεία κάθετη στον y13 και στην τομή της με την i_1''' ορίζουμε το σημείο Σ. Από τα σημεία Σ και Ε13 διέρχεται το 3ο ίχνος $ε_3'''$ του επιπέδου Ε.

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία ο άξονας y13



σχ. 98

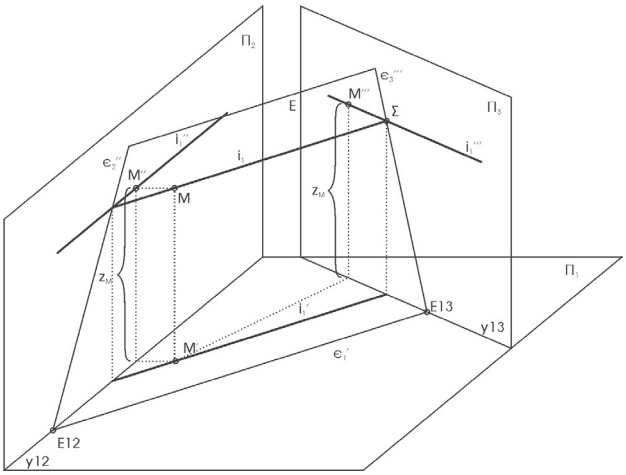


σχ. 99

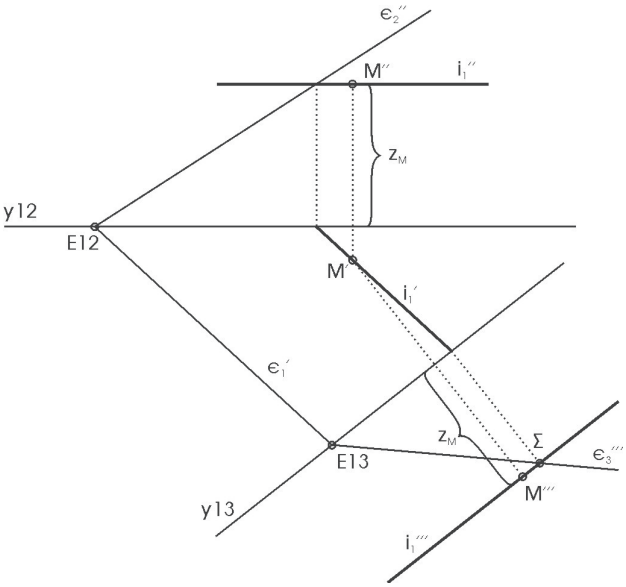
σχηματίζει με το 1ο ίχνος ϵ_1' του επιπέδου Ε γωνία ορθή (σχ. 102), το επίπεδο Ε απεικονίζεται στην 3η προβολή του σαν πρόσθιο, η δε ιχνοπαράλληλη i_1 απεικονίζεται κι αυτή σαν ευθεία πρόσθια, επομένως η 3η προβολή της εκφυλίζεται σε σημείο. Το τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου Ε έχει την 3η προβολή του Μ΄΄΄ να ταυτίζεται με την i_1'''. Επομένως το 3ο ίχνος ϵ_3''' του επιπέδου διέρχεται από τα σημεία Ε13 και Μ΄΄΄.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μετατροπή ενός επιπέδου από τυχαίο σε πρόσθιο, κατακόρυφο, μετωπικό ή οριζόντιο, μέσω της αλλαγής επιπέδου προβολής, είναι διαδικασία πολύ χρήσιμη στην επίλυση πολλών προβλημάτων απεικόνισης στην παραστατική γεωμετρία.

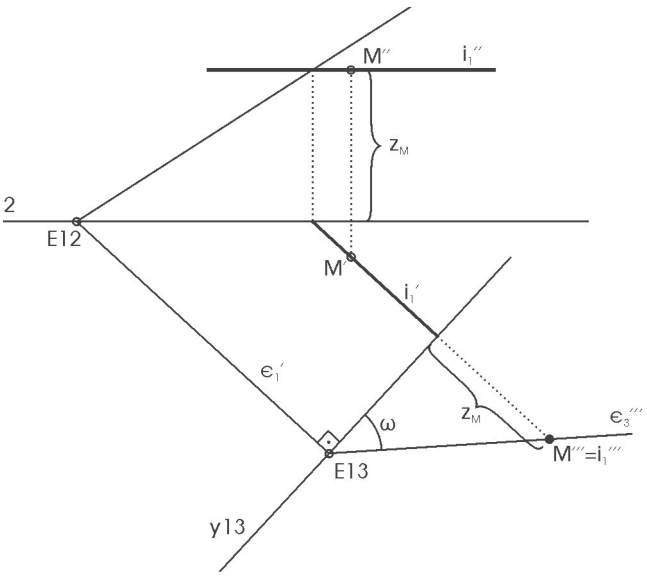
Η διαφορά ανάμεσα στην κατάκλιση επιπέδου σχήματος και στην αλλαγή επιπέδου προβολής, είναι ότι στη μεν κατάκλιση μας δίνεται η δυνατότητα να βρούμε την *πραγματική εικόνα, μέγεθος και διαστάσεις ολόκληρου σχήματος του επιπέδου,* όπως είναι η πλευρά ενός πρίσματος, ενώ κατά την αλλαγή επιπέδου προβολής μπορούμε να *συλλέξουμε άλλου είδους πληροφορίες* για το αντικείμενο της παράστασης, όπως για παράδειγμα να καθορίσουμε την τομή ενός στερεού σχήματος με ένα επίπεδο και να την απεικονίσουμε. Με την αλλαγή μπορούμε να βρίσκουμε επίσης *πραγματικά μεγέθη ευθυγράμμων τμημάτων,* όχι όμως επιπέδων σχημάτων (εκτός από ειδικές περιπτώσεις).



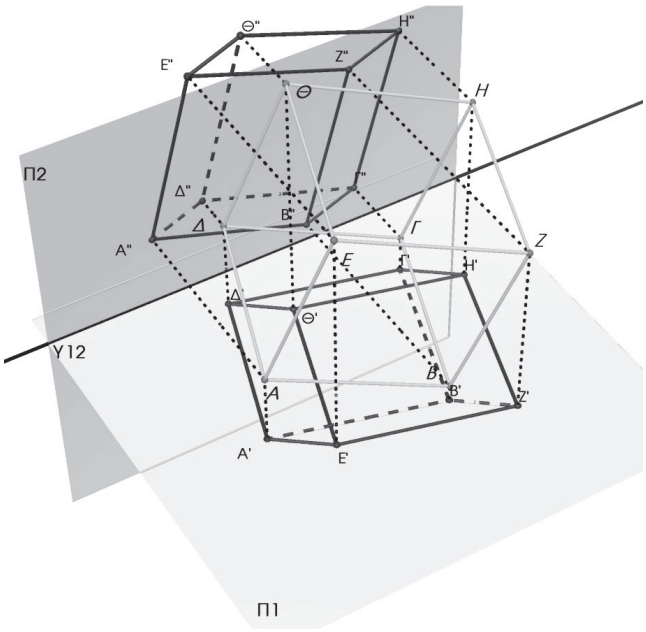
σχ. 100



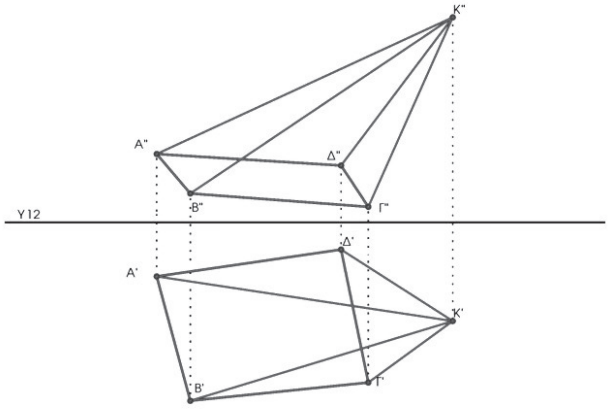
σχ. 101



σχ. 102



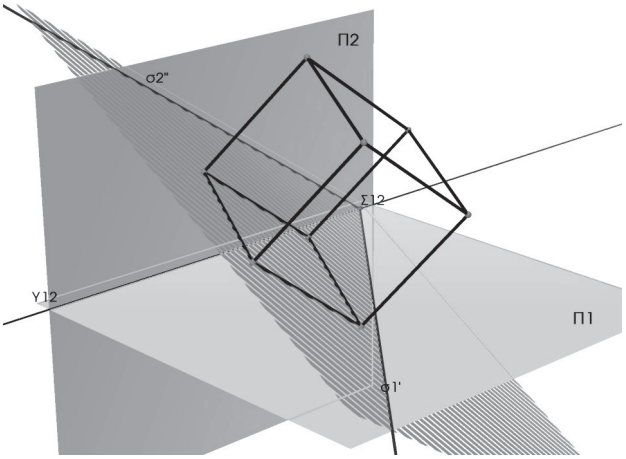
σχ. 103



σχ. 104

Παράσταση στερεών σχημάτων του χώρου

Τα στερεά σχήματα του χώρου απεικονίζονται στην παραστατική γεωμετρία μέσω των προβολών των κορυφών τους στα επίπεδα $Π_1$ και $Π_2$. Στο σχήμα 103 περιγράφεται ο τρόπος απεικόνισης ενός κύβου, μέσω των προβολών των κορυφών του στα δύο επίπεδα προβολής. Στο σχήμα 104 απεικονίζεται η παράσταση μιας πυραμίδας.

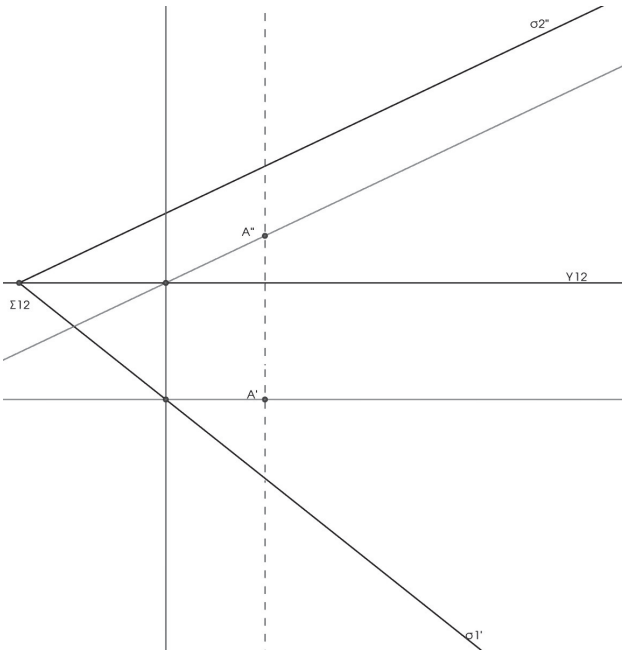


σχ. 105

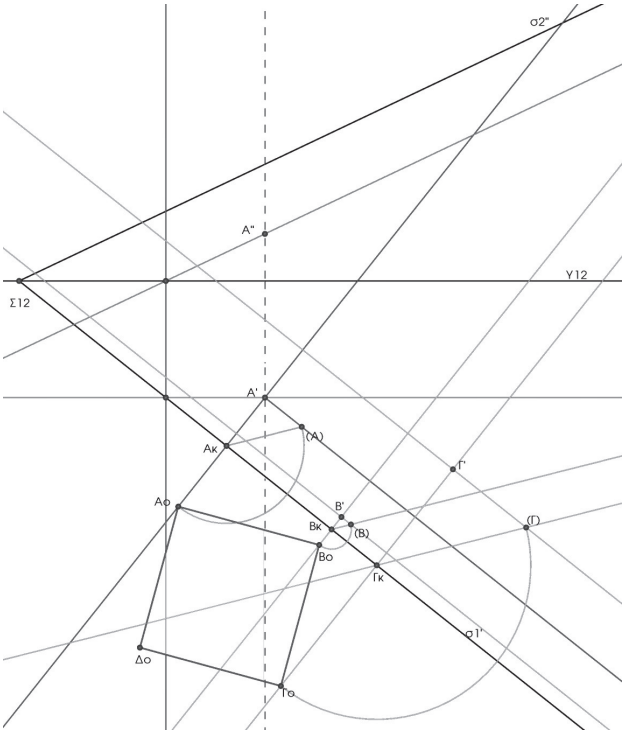
Παράσταση κύβου με έδρα σε τυχαίο επίπεδο

Στο παράδειγμα του σχήματος 105 θα τοποθετήσουμε έναν κύβο με δεδομένο και γνωστό μήκος ακμής σε επίπεδο, του οποίου τα ίχνη είναι γνωστά. Επειδή το επίπεδο $Σ(σ_1', σ_2'')$ είναι τυχαίο, δεν μπορούμε να δούμε σε καμία από τις δύο προβολές πραγματικά μεγέθη του κύβου. Ο μόνος τρόπος να δούμε πραγματικές εικόνες των τετραγώνων των πλευρών του κύβου, είναι μέσω κατακλίσεων.

Θεωρούμε ότι το σημείο A(A′,A″) είναι σημείο της κάτω βάσης του κύβου και ανήκει στο επίπεδο $Σ(σ_1', σ_2'')$. Η πρόταση αυτή μας υποχρεώνει να ορίσουμε μόνο τη μία από τις δύο προβολές του A(A′,A″), έστω το A′ και κατόπιν –με ιχνοπαράλληλη- να βρούμε το A″ (σχ. 106).



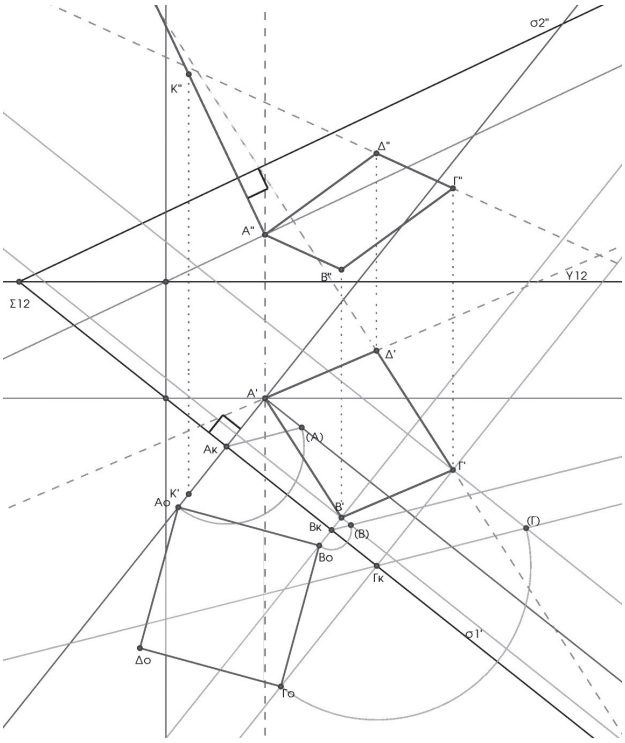
σχ. 106



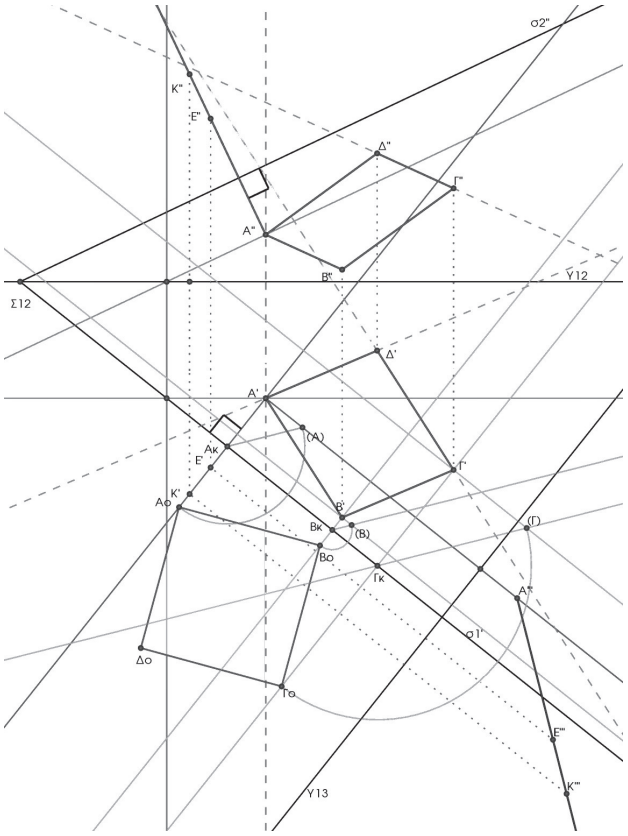
σχ. 107

Το σημείο Α είναι στο χώρο μια κορυφή του τετραγώνου της βάσης του κύβου. Εάν σχηματίσουμε την κατάκλιση A_O του σημείου Α, τότε είναι δυνατό να δημιουργήσουμε την αληθή εικόνα του τετραγώνου της βάσης του κύβου $A_OB_O\Gamma_O\Delta_O$ (σχ. 107). Στη συνέχεια κάνουμε ανάκλιση των σημείων B_O, Γ_O και Δ_O, για να ορίσουμε ολόκληρη την 1η προβολή της κάτω βάσης του κύβου. Για την ανάκλιση (σχ. 108) έστω του σημείου B_O, φέρνουμε από το B_O ευθεία κάθετη στο ίχνος σ_1' και ορίζουμε το B_K. Μεταφέρουμε τη γωνία $\omega = A'A_K(A)$, ώστε να έχει κορυφή το B_K. Χαράσσουμε τον κύκλο (B_K, B_KB_O) και ορίζουμε το σημείο (Β). Από το (Β) φέρνουμε ευθεία παράλληλη στο ίχνος σ_1' και στην τομή της με τη B_OB_K βρίσκουμε το Β΄. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο για τα σημεία Γ΄ και Δ΄[4]. Για να δημιουργήσουμε τη 2η προβολή της βάσης ΑΒΓΔ μπορούμε να εργαστούμε είτε με τη μέθοδο των ιχνοπαραλλήλων, είτε μεταφέροντας για κάθε σημείο το υψόμετρό του, που είναι γνωστό από την ανάκλιση[5] (σχ. 107).

Το σημείο Ε θεωρούμε ότι είναι σημείο της άνω βάσης του κύβου και βρίσκεται πάνω από το Α. Η



σχ. 108



σχ. 109

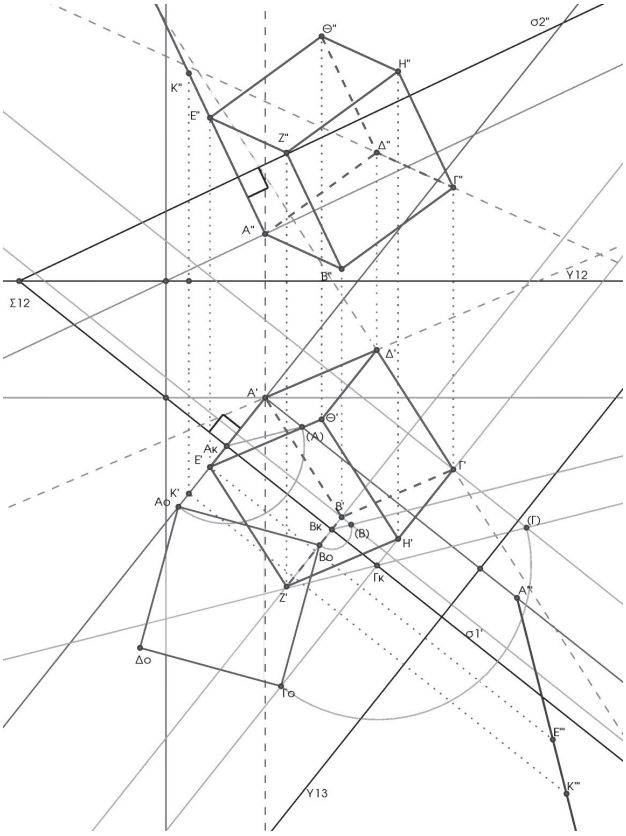
4. Για να βρούμε το Δ΄, μπορούμε εναλλακτικά να φέρουμε από το Γ΄ ευθεία παράλληλη στην Α΄Β΄ και από το Α΄ ευθεία παράλληλη στη ΒΓ΄

5. Το υψόμετρο του Β (για παράδειγμα) είναι ίσο με το Β΄(Β)

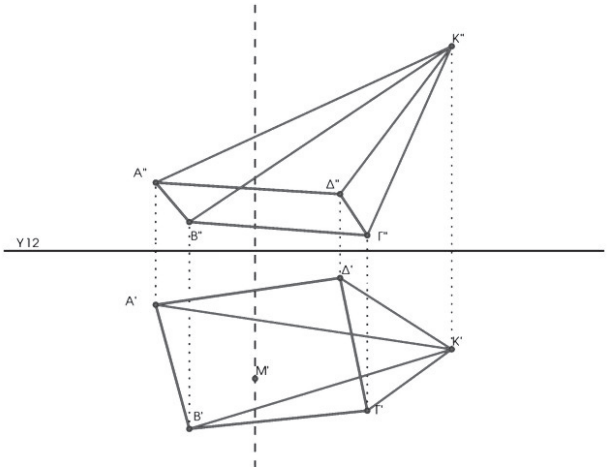
ευθεία ΑΕ είναι επομένως κάθετη στη βάση ΑΒΓΔ του κύβου, επομένως κάθετη σε όλο το επίπεδο Σ(σ_1',σ_2'') και άρα σε κάθε στοιχείο του επιπέδου, όπως είναι οι ευθείες των ιχνών του επιπέδου. Η ιδιότητα αυτή της επιπεδομετρίας, ισχύει στην παραστατική γεωμετρία ως εξής: *όταν μία ευθεία είναι κάθετη σ΄ ένα επίπεδο, τότε η 1η προβολή της παριστάνεται κάθετη στο 1ο ίχνος του επιπέδου και η 2η προβολή της ευθείας παριστάνεται κάθετη στο 2ο ίχνος του επιπέδου.* Για να βρούμε λοιπόν τον φορέα[6] του σημείου Ε, αρκεί να σχηματίσουμε την 1η προβολή του κάθετη στο ίχνος σ_1' από το Α΄ και τη 2η προβολή του κάθετη στο ίχνος σ_2'' από το Α΄΄ (σχ. 108).

Μένει να οριστεί το ακριβές μήκος της ΑΕ σε 1η και 2η προβολή. Για το σκοπό αυτό κάνουμε αλλαγή επιπέδου προβολής και ορίζουμε επίπεδο Π_3 τέτοιο, ώστε ο άξονας y13 να είναι παράλληλος στην 1η προβολή του φορέα της ΑΕ (σχ. 109). Για να βρούμε την 3η προβολή του φορέα της ΑΕ, εκτός από το σημείο Α(Α΄,Α΄΄΄), χρειάζεται να γνωρίζουμε άλλο ένα σημείο, έστω το Κ(Κ΄,Κ΄΄), για το οποίο βρίσκουμε την 3η προβολή του Κ΄΄΄. Στο σύστημα Π_1 – Π_3 ο φορέας της ΑΕ είναι ευθεία μετωπική, επομένως κάθε ευθύγραμμο τμήμα πάνω της έχει μήκος ίσο με το πραγματικό. Επομένως από το Α΄΄΄ μετράμε τμήμα Α΄΄΄Ε΄΄΄=A_OB_O (το μήκος της ακμής του κύβου) και ορίζουμε το σημείο Ε΄΄΄, για το οποίο βρίσκουμε την 1η και 2η προβολή, Ε΄ και Ε΄΄ αντίστοιχα.

Από το Ε΄ (σχ. 110) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο Ε΄Ζ΄Η΄Θ΄=Α΄Β΄Γ΄Δ΄ και αντίστοιχα από το Ε΄΄ σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο Ε΄΄Ζ΄΄Η΄΄Θ΄΄=Α΄΄Β΄΄Γ΄΄Δ΄΄. Τέλος, ενώνουμε κατ΄ αντιστοιχία τα σημεία της άνω και κάτω βάσης, για να δημιουργηθούν οι ακμές ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ και ΘΔ στις δύο προβολές τους.



σχ. 110

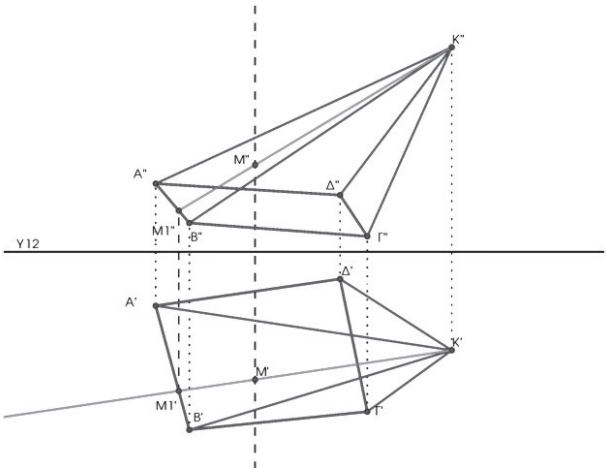


σχ. 111

Σημείο στην έδρα ενός στερεού

Στην πυραμίδα του σχήματος 111, γνωρίζουμε τις προβολές του στερεού και την πρώτη προβολή Μ΄ του σημείου Μ, που ανήκει στην έδρα ΑΒΚ. Ζητούμε να βρούμε τη 2η προβολή Μ΄΄. Ένας τρόπος που έχουμε ήδη μελετήσει, είναι να βρούμε τα ίχνη του επιπέδου που ορίζουν τα σημεία Α(Α΄,Α΄΄), Β(Β΄,Β΄΄) και Κ(Κ΄,Κ΄΄) και κατόπιν να βρούμε το Μ΄΄ με ιχνοπαράλληλες. Ο τρόπος αυτός είναι ορθός,

6. Φορέας ενός σημείου ονομάζεται η ευθεία, πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο



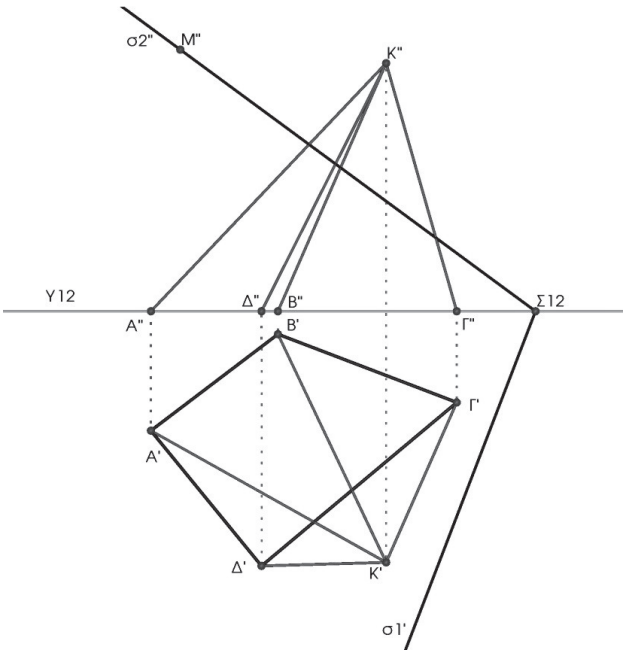
σχ. 112

αλλά πολύπλοκος και αργός, πόσο μάλλον εφ' όσον έχουμε στοιχεία για να ακολουθήσουμε πιο σύντομη διαδικασία. Γνωρίζουμε ότι το Μ'' θα βρίσκεται κάπου στην κάθετη στον y12 ευθεία, που περνά από το Μ'. Φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία από ένα από τα γνωστά σημεία, έστω το Κ' και προεκτείνουμε την Κ'Μ' μέχρι να τμήσει την Α'Β'. Στην τομή της Α'Β' με την Κ'Μ' σημειώνουμε το σημείο M_1'. Βρίσκουμε τη 2η προβολή M_1'' στην Α''Β''. Σχηματίζουμε την $K''M_1''$ και στην τομή της με την κάθετη από το Μ', βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο Μ'' (σχ. 112).

Τομή στερεού με επίπεδο

Στο σχήμα 113 εικονίζεται η παράσταση μιας πυραμίδας με βάση πάνω στο επίπεδο $Π_1$ και ένα επίπεδο $Σ(σ_1', σ_2'')$, που τέμνει την πυραμίδα, κατά ένα τετράπλευρο. Η θέση του επιπέδου Σ είναι τυχαία ως προς τα επίπεδα προβολής $Π_1$ και $Π_2$ και δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί και επομένως να παρασταθεί το σχήμα της τομής του με την πυραμίδα. Για τον λόγο αυτό αλλάζουμε το σύστημα προβολής έτσι, ώστε σε κάποιο νέο σύστημα προβολής το επίπεδο Σ να γίνει πρόσθιο. Ένα επίπεδο είναι πρόσθιο, όταν το 1ο ίχνος του είναι κάθετο στον άξονα των επιπέδων προβολής. Οποιοδήποτε σχήμα βρίσκεται σε πρόσθιο επίπεδο, έχει επίσης την ιδιότητα να εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα στην κατακόρυφη προβολή.

Για τους λόγους αυτούς, εγκαταλείπουμε προσωρινά το σύστημα προβολής $Π_1 - Π_2$ και δημιουργούμε ένα νέο σύστημα προβολής $Π_1 - Π_3$ τέτοιο, ώστε το επίπεδο $Σ(σ_1', σ_3''')$ να είναι πρόσθιο. Επιλέγουμε τον άξονα y13 να είναι κάθετος στο 1ο ίχνος $σ_1'$ του επιπέδου. Το σημείο Σ13 είναι ένα σημείο του 3ου ίχνους του επιπέδου. Αρκεί να βρεθεί άλλο ένα σημείο για να σχηματίσουμε το 3ο ίχνος $σ_3'''$. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου με 2η προβολή Μ'' πάνω στο 2ο ίχνος $σ_2''$ (για ευκολία). Η 1η προβολή Μ' θα βρίσκεται επομένως στον άξονα y12 (σχ. 114). Στο σύστημα προβολής $Π_1 - Π_3$, το σημείο Μ''' θα βρίσκεται σε ευθεία κάθετη στον άξονα y13, διερχόμενη από το Μ'. Το υψόμετρο του σημείου Μ δεν μεταβάλλεται και μας είναι γνωστό (από το σύστημα προβολής $Π_1 - Π_2$). Βρίσκουμε

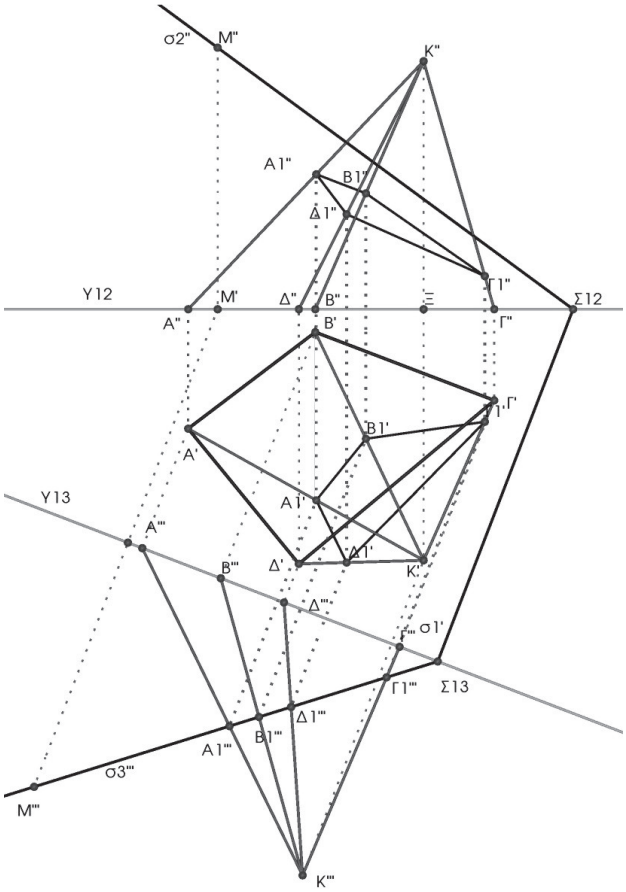


σχ. 113

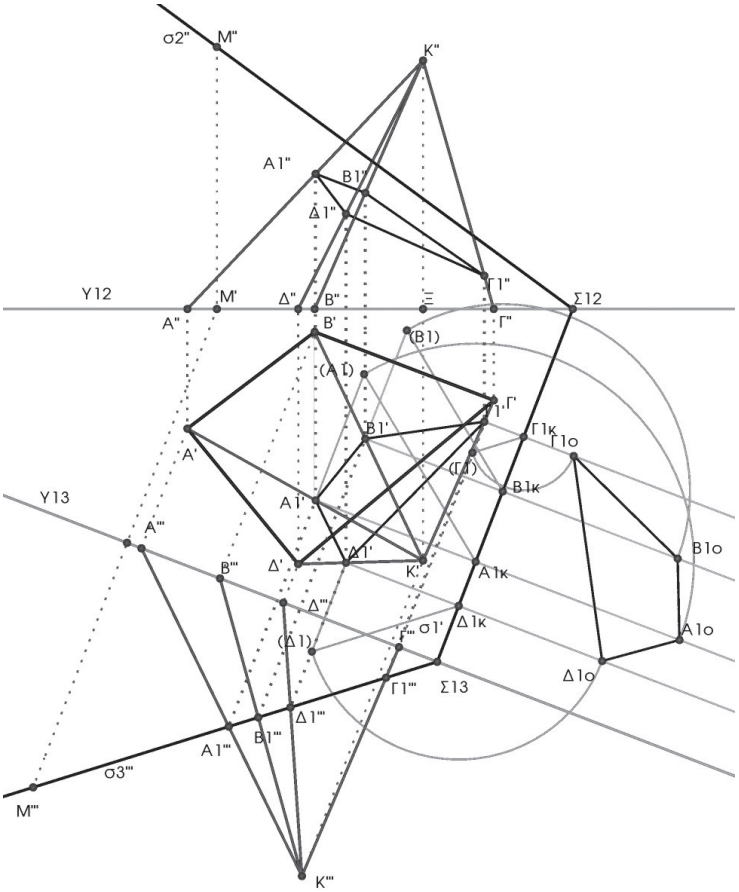
επομένως το Μ΄΄΄, το οποίο ενώνουμε με το Σ13 και σχηματίζουμε την 3η προβολή $σ_3$΄΄΄ του επιπέδου Σ.

Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ της βάσης της πυραμίδας ανήκουν στο επίπεδο $Π_1$, επομένως έχουν μηδενικό υψόμετρο και οι 3ες προβολές τους θα βρίσκονται στον άξονα y13. Για να βρούμε την 3η προβολή Κ΄΄΄ της κορυφής Κ, εργαζόμαστε όπως για την 3η προβολή του σημείου Μ.

Στο σύστημα $Π_1$ – $Π_3$ το επίπεδο Σ είναι πρόσθιο (σχ. 115) κι οποιοδήποτε σχήμα ανήκει σ΄ αυτό, εμφανίζεται στην κατακόρυφη προβολή του ως ευθύγραμμο τμήμα. Επομένως τα σημεία $Α_1$΄΄΄, $Β_1$΄΄΄, $Γ_1$΄΄΄ και $Δ_1$΄΄΄ είναι τα σημεία τομής των ακμών της πυραμίδας με το επίπεδο Σ και σχηματίζουν τετράπλευρο, που στην κατακόρυφη προβολή (την 3η προβολή) εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα. Από τα σημεία αυτά όμως μπορούμε να βρούμε την 1η προβολή του τετραπλεύρου $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ και κατόπιν τη 2η προβολή του.



σχ. 114



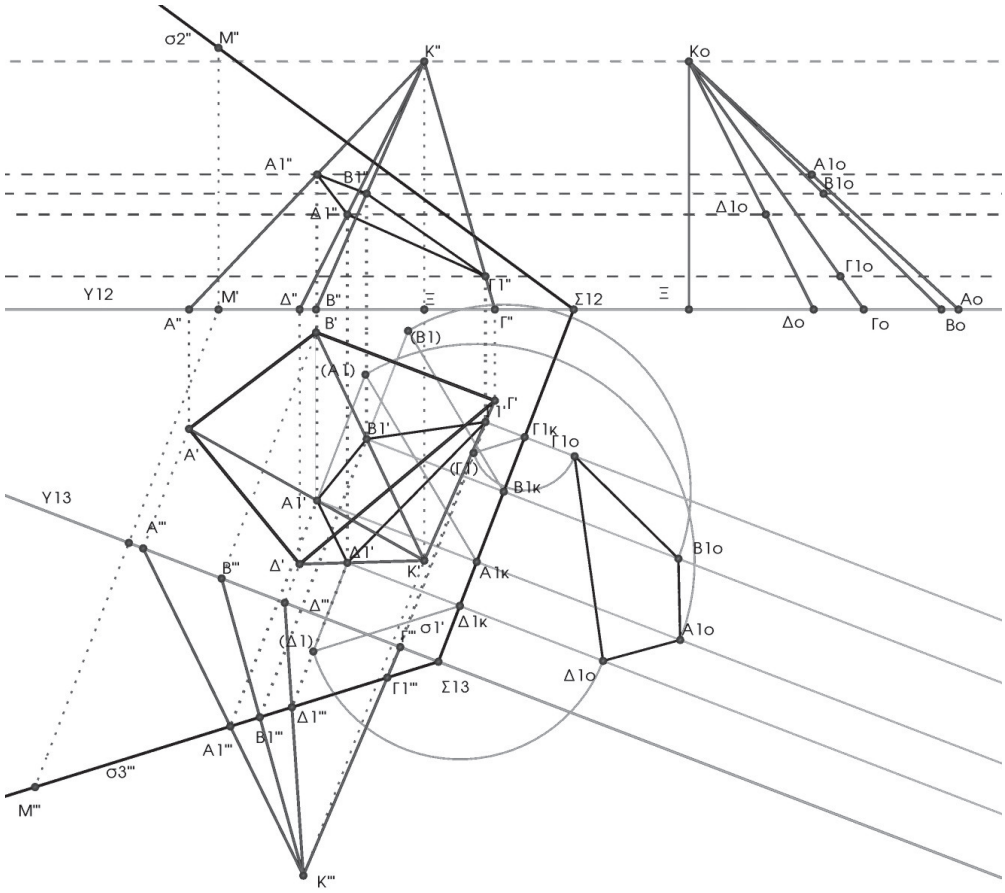
σχ. 115

Ανάπτυγμα στερεού

Θα δημιουργήσουμε το ανάπτυγμα της πυραμίδας του προηγούμενου παραδείγματος, συνυπολογίζοντας και την τομή της με το επίπεδο Σ. Η εργασία αυτή απαιτεί να γνωρίζουμε ή να μπορούμε να υπολογίσουμε γεωμετρικά τα πραγματικά μεγέθη των εδρών της πυραμίδας, αλλά και τις γωνίες των εδρών με το οριζόντιο επίπεδο $Π_1$.

Επειδή η πυραμίδα εδράζεται στο επίπεδο $Π_1$, το τετράπλευρο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι ίσο με το πραγματικό. Γνωρίζουμε επίσης ότι το τετράπλευρο $Α_1΄Β_1΄Γ_1΄Δ_1΄$ ανήκει στο επίπεδο Σ, του οποίου γνωρίζουμε τα ίχνη, επομένως μπορούμε –με κατάκλιση- να βρούμε το πραγματικό του μέγεθος (σχ. 116), το τετράπλευρο $Α_{1ο}Β_{1ο}Γ_{1ο}Δ_{1ο}$.

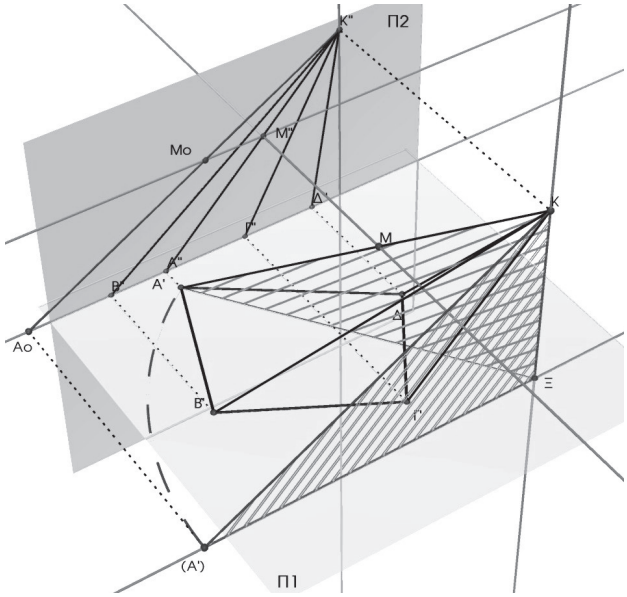
Χρειάζεται τώρα να υπολογίσουμε τα πραγματικά μεγέθη και τις γωνίες κλίσης με το $Π_1$ των ακμών ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ και ΚΔ. Χρησιμοποιούμε κατακόρυφα ορθογώνια τρίγωνα, που σχηματίζονται από το Κ, την προβολή του Ξ και τα σημεία Α, Β, Γ και Δ (σχ. 117). Μετατοπίζουμε την Κ΄΄Ξ στην $Κ_oΞ$ (σχ. 116) και στρέφουμε καθένα από τα παραπάνω τρίγωνα



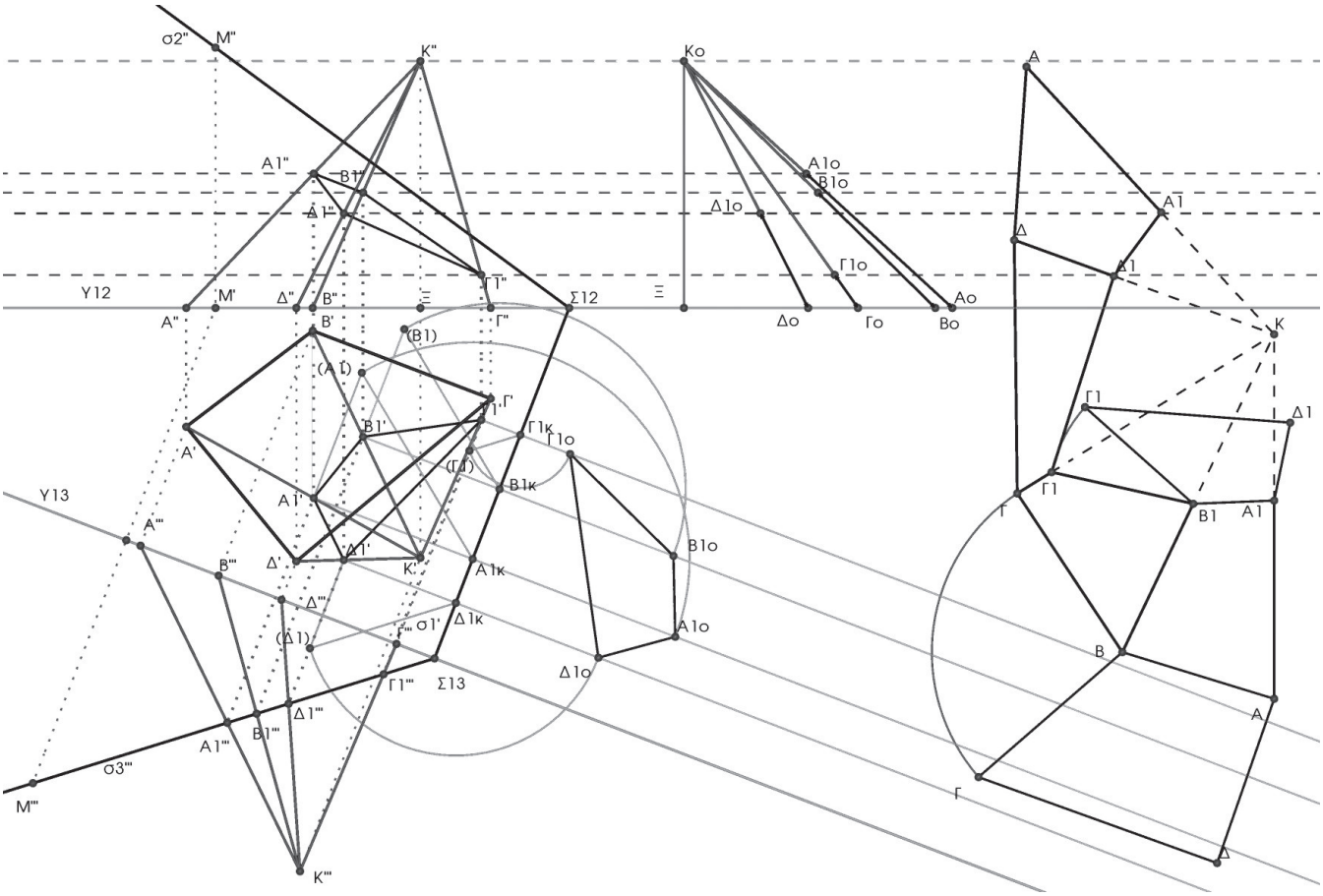
σχ. 116

γύρω από την $K_O\Xi$, ώστε να γίνουν παράλληλα με το επίπεδο Π_2. Αυτό γίνεται, αν από το Ξ και πάνω στον άξονα y12 ορίσουμε το μέγεθος ΞA_O ίσο με το K΄A΄. Τότε το τρίγωνο $K_O\Xi A_O$ είναι ίσο με το πραγματικό, επομένως και η K_OA_O έχει πραγματικό μήκος. Με αντίστοιχο τρόπο σχηματίζονται και τα υπόλοιπα ορθογώνια τρίγωνα. Επάνω στην K_OA_O ορίζουμε το A_{1O}, μεταφέροντας το υψόμετρό του, δημιουργώντας δηλαδή μια γραμμή παράλληλη στον y12, που περνά από το A_1'', μέχρι να τμήσει την K_OA_O κ.ο.κ.

Έχουμε όλα τα απαιτούμενα στοιχεία και αρκεί τώρα να δημιουργήσουμε την ανοιγμένη επιφάνεια της πυραμίδας, ξεκινώντας έστω από την ακμή KA. Σε κάποια θέση στη σχεδιαστική επιφάνεια σχηματίζουμε μια γραμμή και πάνω της ορίζουμε το σημείο K, το διάστημα $KA=K_OA_O$ και το διάστημα $AA_1=A_OA_{1O}$ (σχ. 118). Κατόπιν κινούμαστε δεξιόστροφα και υπολογίζουμε τη θέση του σημείου B, στην τομή των κύκλων (K,KB) και (A,AB), γνωρίζοντας ότι $KB=K_OB_O$ και AB=A΄B΄. Μεταφέρουμε στην KB το διάστημα B_OB_{1O} και ορίζουμε το σημείο B_1 κ.ο.κ. Τέλος, μεταφέρουμε τις πραγματικές εικόνες των εδρών ΑΒΓΔ και $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$.



σχ. 117



σχ. 118

εικ. 119

εικ. 120

Εκ περιστροφής στερεά

Τα εκ περιστροφής στερεά σχήματα παράγονται θεωρητικά από την περιστροφή ευθείας, ανοιχτής ή κλειστής καμπύλης γύρω από άξονα περιστροφής. Η ευθεία ή καμπύλη που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα περιστροφής ονομάζεται **γενέτειρα** του στερεού. Είναι πολύ διαδεδομένα σχήματα και είναι χρήσιμο να γίνει κάποια ανάλυση της γεωμετρίας τους.

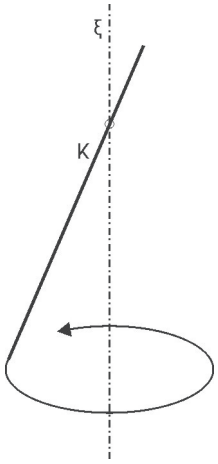
Τα εκ περιστροφής σχήματα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα βασικά και τα σύνθετα στερεά σχήματα. Μερικά από τα βασικά εκ περιστροφής στερεά είναι ο κώνος, ο κύλινδρος, η σφαίρα, η σπείρα, το ελλειψοειδές (το σχήμα της γης). Τα στερεά αυτά έχουν γενέτειρες με «απλή» γεωμετρία: ευθεία για τον κώνο και τον κύλινδρο, κύκλο για τη σφαίρα και τη σπείρα, έλλειψη για το ελλειψοειδές (εικ. 119, 120). Όταν η γενέτειρα είναι καμπύλη πιο «σύνθετης» γεωμετρίας, η επιφάνεια που παράγεται μπορεί να γίνει πολυσύνθετη, όπως το μονόχωνο υπερβολοειδές (τέτοιες επιφάνειες θα μελετηθούν σε άλλο κεφάλαιο). Από τα βασικά εκ περιστροφής στερεά, κάποια είναι αναπτυκτά

(κώνος, κύλινδρος) και κάποια όχι (σφαίρα, σπείρα) ή αναπτύσσονται προσεγγιστικά (όπως θα δούμε στην συνέχεια).

Κώνος

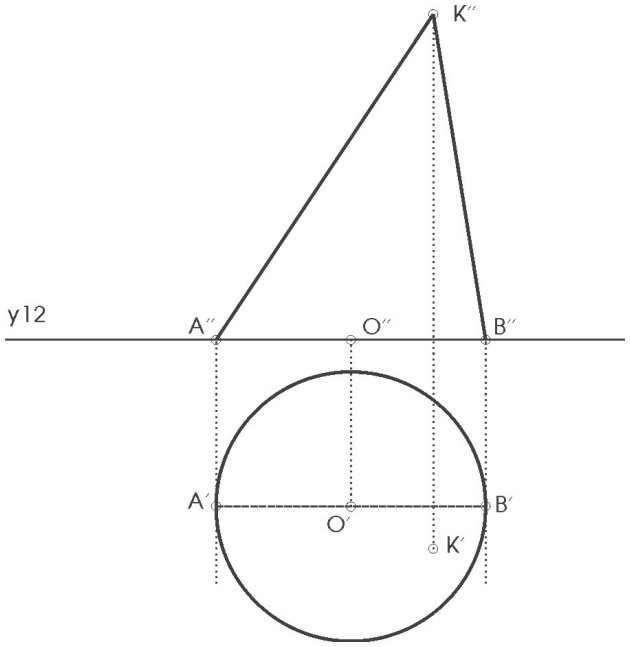
Παράσταση κώνου

Η κωνική επιφάνεια παράγεται από περιστροφή ευθείας γύρω από άξονα περιστροφής, που τέμνεται από τη γενέτειρα ευθεία σε σημείο Κ, που ονομάζεται *κορυφή* του κώνου (σχ. 121).



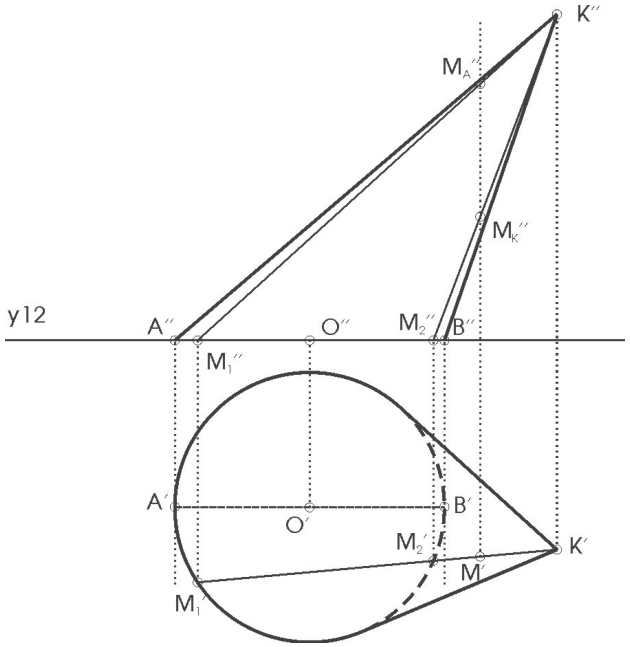
σχ. 121

Στην παραστατική γεωμετρία ο κώνος απεικονίζεται μέσω της καμπύλης της βάσης του, της κορυφής του και των ακραίων γενετειρών του, δηλαδή των ευθυγράμμων τμημάτων που ξεκινούν από την κορυφή και καταλήγουν εφαπτομενικά στη βάση του κώνου. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις που σε κάποια από τις δύο προβολές, οι γενέτειρες του κώνου δεν εμφανίζονται, όπως στην περίπτωση κώνου με βάση στο επίπεδο $Π_1$ και κορυφή που έχει 1η προβολή μέσα στην περίμετρο του κύκλου της βάσης του. Οι γενέτειρες του κώνου δεν εμφανίζονται στην 1η προβολή (σχ. 122).



σχ. 122

Εάν γνωρίζουμε την 1η προβολή ενός σημείου Μ της επιφάνειας κώνου, μπορούμε να βρούμε τη 2η προβολή του μέσω της γενέτειρας που ορίζει το Μ: σχηματίζουμε την Κ′Μ′ και προεκτείνουμε μέχρι η Κ′Μ′ να τμήσει τη βάση του κώνου, στο σημείο M_1'. Βρίσκουμε στη 2η προβολή της βάσης του κώνου το σημείο M_1'' και δημιουργούμε τη 2η προβολή της γενέτειρας $K''M_1''$. Το σημείο Μ″ βρίσκεται στην τομή της $K''M_1''$ με την κάθετη στον y12 από το Μ′. Είναι δυνατό το πρόβλημα αυτό να έχει δύο λύσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 123, όπου δεν είναι σαφές εάν το σημείο Μ βρίσκεται στο άνω ή το κάτω μισό της κωνικής επιφάνειας.



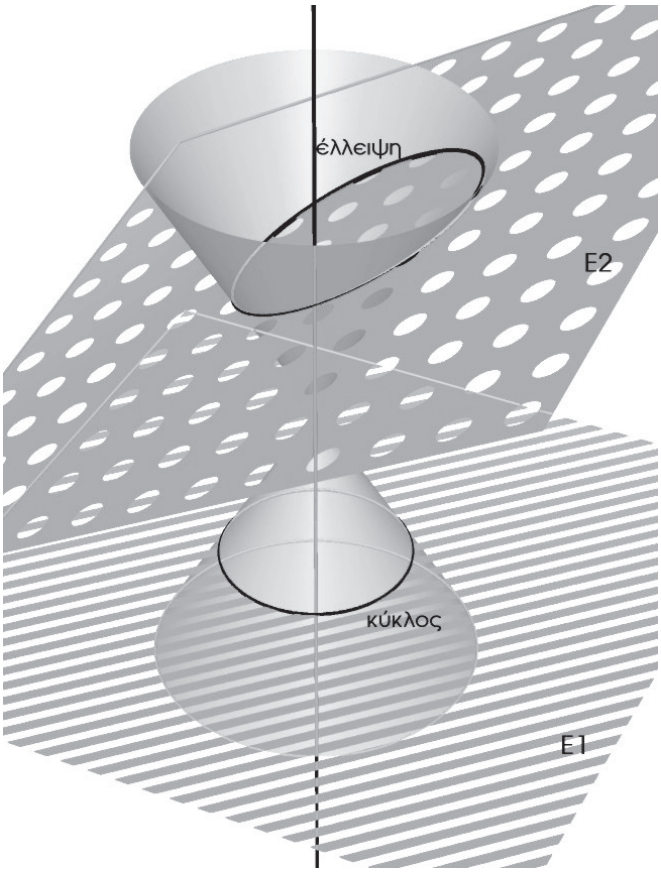
σχ. 123

Κωνικές τομές

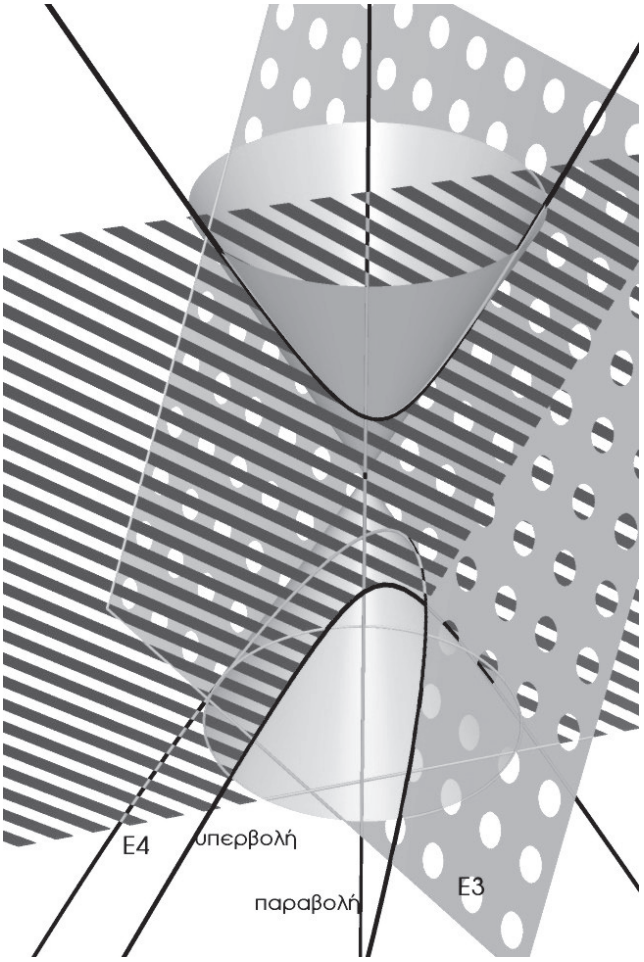
Στη θεωρητική γεωμετρία μπορούμε να ορίσουμε τα βασικά γεωμετρικά στοιχεία μέσω των τομών κωνικής επιφάνειας με επίπεδα. Έτσι:

- Το **σημείο** ορίζεται από τομή επιπέδου καθέτου στον άξονα του κώνου, διερχόμενου από την κορυφή του κώνου.

- Η **ευθεία** ορίζεται από τομή επιπέδου παραλλήλου σε οποιαδήποτε γενέτειρα του κώνου και διερχόμενου από την κορυφή του κώνου.
- Ο **κύκλος** ορίζεται από την τομή του κώνου με επίπεδο Ε1 κάθετο στον άξονα του κώνου, που όμως να μη διέρχεται από την κορυφή του (σχ. 124).
- Η **έλλειψη** ορίζεται από τομή του κώνου με τυχαίο επίπεδο Ε2, που δε διέρχεται από την κορυφή του (σχ. 124).
- Η **παραβολή** ορίζεται από τομή του κώνου με επίπεδο Ε3 παράλληλο σε οποιαδήποτε γενέτειρα του κώνου, που δε διέρχεται από την κορυφή του (σχ. 125).
- Η **υπερβολή** ορίζεται από τομή του κώνου με επίπεδο Ε4 παράλληλο στον άξονα του κώνου, που δε διέρχεται από την κορυφή του (σχ. 125).



σχ. 124



σχ. 125

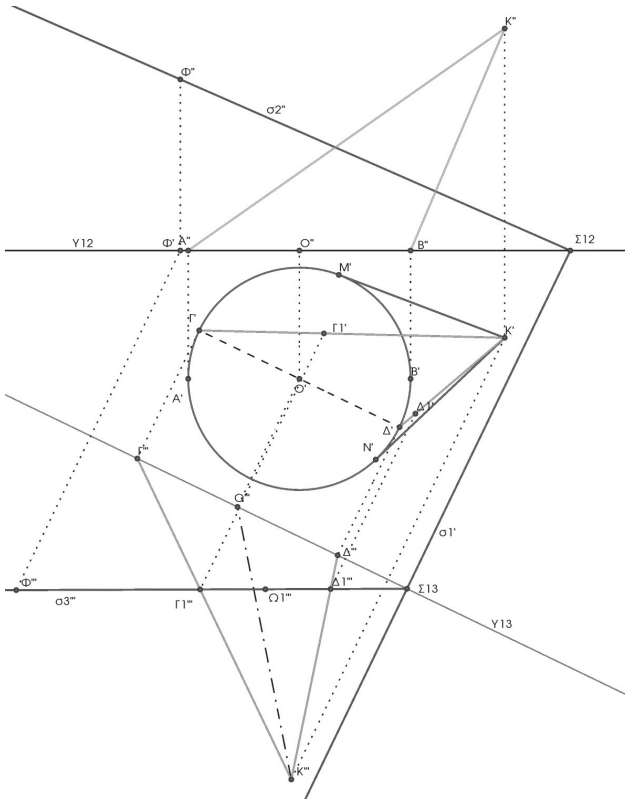
Τομή κώνου με επίπεδο

Η τομή κώνου με επίπεδο παράγει στη γενική περίπτωση καμπύλη έλλειψης, της οποίας ζητούμε τις δύο προβολές. Για το θέμα αυτό εργαζόμαστε όπως και για την τομή οποιουδήποτε στερεού σχήματος με επίπεδο. Ειδικά για τα εκ περιστροφής στερεά σχήματα (κώνο, κύλινδρο, σφαίρα κλπ) μας ενδιαφέρουν τα σημεία ορίων, δηλαδή τα σημεία εκείνα της καμπύλης τομής που εφάπτονται στις ακρότατες γενέτειρες του στερεού.

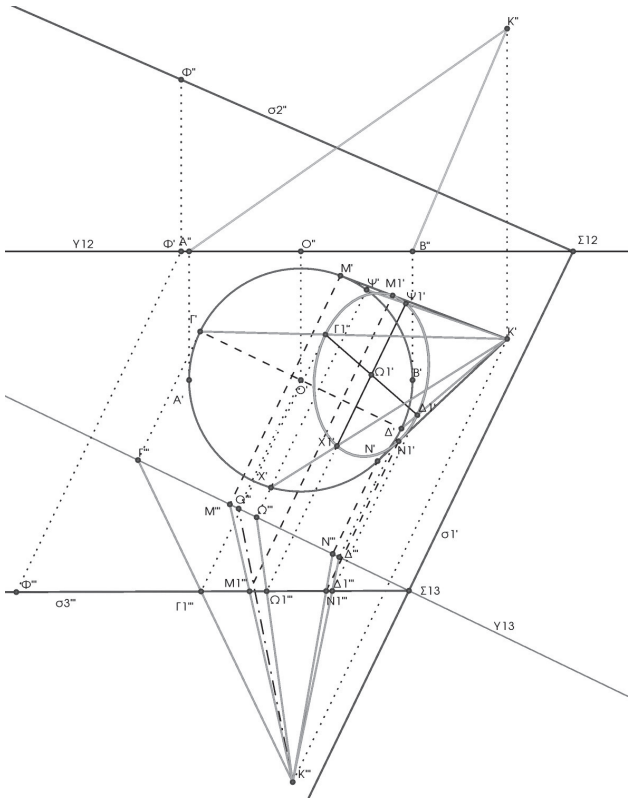
Στο σχήμα 126 εικονίζεται η παράσταση ενός πλάγιου κώνου με βάση κύκλο του $Π_1$ κι ενός επιπέδου $Σ(σ_1', σ_2'')$, που τέμνει τον κώνο. Για να σχηματίσουμε την καμπύλη της τομής, κάνουμε αλλαγή επιπέδου προβολής και μετασχηματίζουμε το επίπεδο Σ σε πρόσθιο, στο σύστημα προβολής $Π_1 - Π_3$. Σχηματίζουμε το 3ο ίχνος του επιπέδου και την 3η προβολή του κώνου. Η καμπύλη της τομής είναι το ευθύγραμμο τμήμα $Γ_1'''Δ_1'''$, που αποτελεί τον μικρό άξονα της έλλειψης. Ο μεγάλος άξονάς της εκφυλίζεται στην 3η προβολή στο σημείο $Ω_1'''$, στο μέσο του τμήματος $Γ_1'''Δ_1'''$ (σχ. 127). Χρησιμοποιούμε τη γενέτειρα $Κ'''Ω'''$ για να ορίσουμε σε 1η προβολή τα σημεία Χ′ και Ψ′ και στη συνέχεια τα σημεία της τομής $Χ_1'$ και $Ψ_1'$, στις αντίστοιχες γενέτειρες. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε σε 1η προβολή τις συζυγείς διαμέτρους $Γ_1'Δ_1'$ και $Χ_1'Ψ_1'$, από τις οποίες (με κατασκευή Rytz) βρίσκουμε τον μεγάλο και μικρό άξονα της έλλειψης κι επομένως κατασκευάζουμε την έλλειψη.

Το σημαντικό εδώ είναι να κατανοήσουμε ότι η καμπύλη της τομής στην 1η αλλά και στη 2η αργότερα προβολή θα πρέπει να βρίσκεται **εντός** του περιγράμματος του στερεού, όπως κι αν απεικονίζεται αυτό, δηλαδή σε οποιαδήποτε προβολή του. Για τον λόγο αυτό, είναι αναγκαίο να ορίσουμε τα χαρακτηριστικά σημεία της καμπύλης της τομής στις ακρότατες γενέτειρες, πρώτα για την 1η προβολή και στη συνέχεια για τη 2η προβολή.

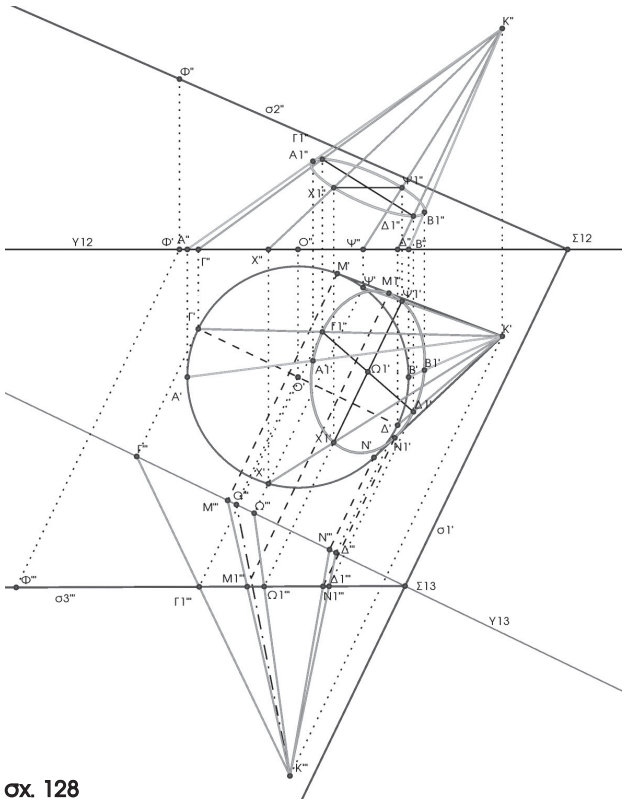
Για τον σκοπό αυτό, σχηματίζουμε την 3η προβολή Μ′′′ και Ν′′′ των σημείων Μ και Ν, αντίστοιχα, που αποτελούν τα σημεία των ακρότατων γενετειρών για την 1η προβολή του κώνου. Κατόπιν ενώνουμε με την κορυφή Κ′′′ και ορίζουμε τα σημεία $Μ_1'''$ και $Ν_1'''$ στην τομή των γενετειρών με το 3ο ίχνος $σ_3'''$.



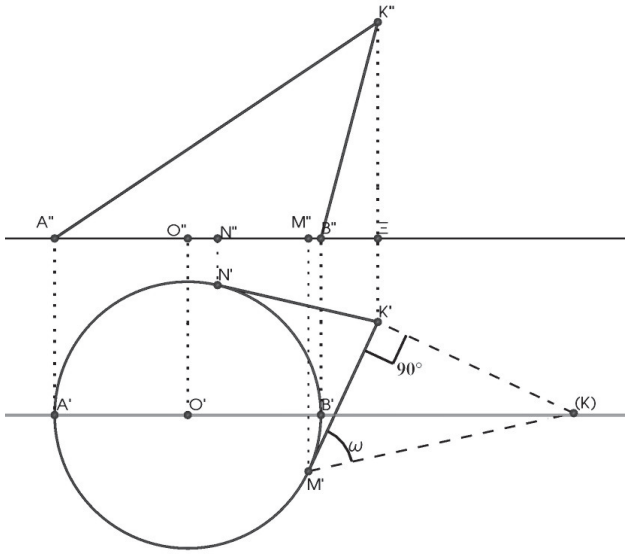
σχ. 126



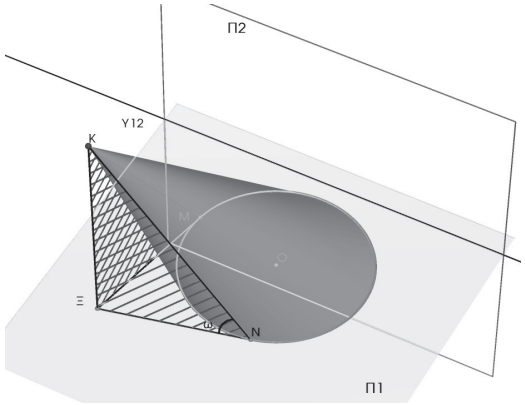
σχ. 127



σχ. 128



σχ. 129



σχ. 130

Βρίσκουμε τα σημεία M_1' και N_1' στις αντίστοιχες γενέτειρες στην 1η προβολή και κατασκευάζουμε την έλλειψη.

Για τα αντίστοιχα ακρότατα σημεία στη 2η προβολή εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, αλλά αυτή τη φορά για να ορίσουμε τα A_1'' και B_1'', στις γενέτειρες K''A'' και K''B'' αντίστοιχα (σχ. 128).

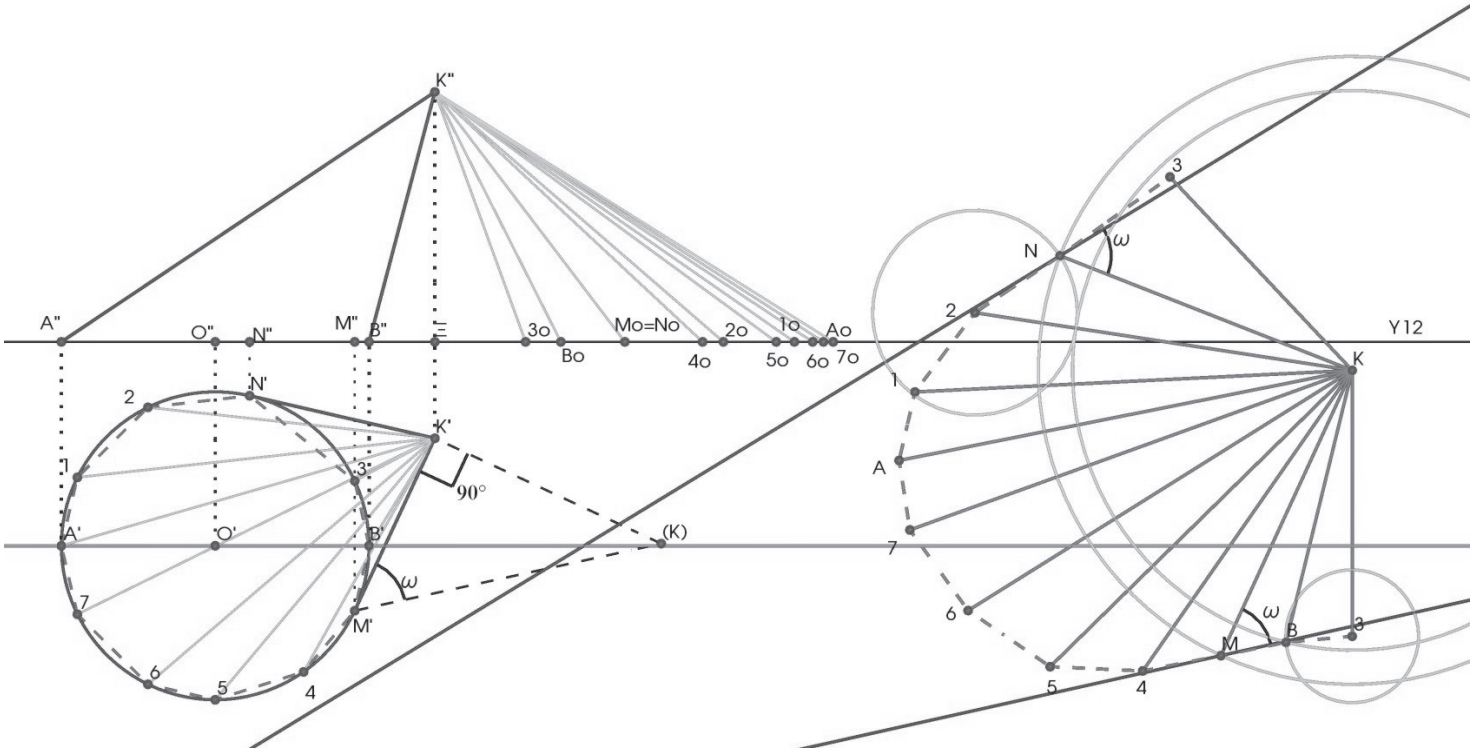
Αξίζει να σημειωθεί ότι το κέντρο Ω(Ω',Ω'') της έλλειψης δεν βρίσκεται στην KO(K'O',K''O''), δηλαδή στην ευθεία που ενώνει το κέντρο της βάσης του κώνου με την κορυφή του. Αυτό θα συνέβαινε μόνο αν το επίπεδο της βάσης του κώνου και το επίπεδο τομής Σ ήταν παράλληλα μεταξύ τους.

Ανάπτυγμα κώνου

Η διαδικασία ανάπτυξης στερεού σχήματος έχει ήδη παρουσιαστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και το ανάπτυγμα κώνου δεν παρουσιάζει διαφορές, εκτός από κάποιες ιδιαιτερότητες, που αναπτύσσονται στο παρόν κεφάλαιο.

Στο σχήμα 129 παριστάνεται ένας λοξός κώνος με βάση κύκλο του επιπέδου $Π_1$ και κορυφή K(K',K''). Το ανάπτυγμα της κωνικής επιφάνειάς του είναι πρόβλημα υπερστατικό, δηλαδή δεν επιλύεται με κανόνα και διαβήτη, μια και η καμπύλη της βάσης του αναπτύγματος παράγεται (όπως θα αναλυθεί στη συνέχεια) από ένωση πολλών τυχαίων σημείων της περιφέρειας της βάσης. Από τα τυχαία σημεία της βάσης ξεχωρίζουμε τα M(M',M'') και N(N',N''), τα οποία είναι χαρακτηριστικά. Τα M(M',M'') και N(N',N'') είναι τα σημεία επαφής των ακρότατων γενετειρών του κώνου. Επίσης, οι τριάδες σημείων KΞM και KΞN δημιουργούν τα δύο χαρακτηριστικά επίπεδα που περνούν από την κορυφή K του κώνου και εφάπτονται στην επιφάνειά του (σχ. 130). Μας δίνουν λοιπόν τη γωνία κλίσης των ακρότατων γενετειρών, τη γωνία ω, που είναι ταυτόχρονα η γωνία της εφαπτομένης της μετασχηματισμένης[7] καμπύλης στα σημεία M και N, αντίστοιχα. Δημιουργούμε τη γωνία ω, αν κάνουμε κατάκλιση του τριγώνου KΞM του χώρου: από το K' φέρνουμε ευθεία κάθετη στην K'M' (σχ. 129) και μεταφέρουμε σ' αυτή το υψόμετρο του K, δηλαδή K'(K)=K''Ξ. Η γωνία (K)M'K' είναι η ζητούμενη γωνία ω.

7. Μετασχηματισμένη ονομάζεται η καμπύλη της βάσης του κώνου, μετά την ανάπτυξή της



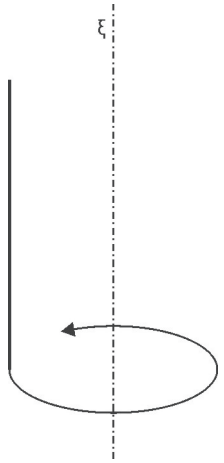
σχ. 131

Για να ορίσουμε τη μετασχηματισμένη καμπύλη, ορίζουμε σημεία στη βάση του κώνου (σχ. 131) και κάνουμε ουσιαστικά το ανάπτυγμα της εγγεγραμμένης πυραμίδας. Στα σημεία Μ και Ν της μετασχηματισμένης μεταφέρουμε και τη γωνία ω και δημιουργούμε τις εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι εφαπτόμενες στην πραγματικότητα μας ορίζουν τη *διεύθυνση* της καμπύλης στα σημεία επαφής Μ και Ν.

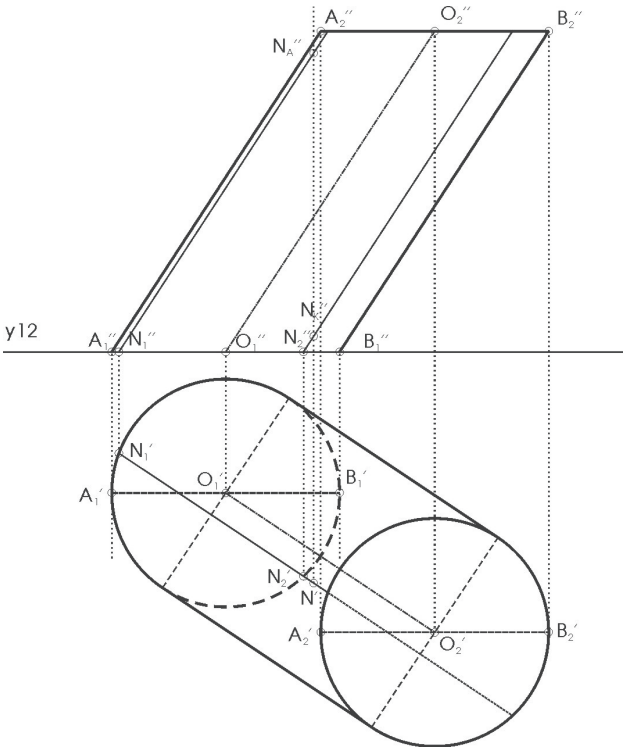
Κύλινδρος

Παράσταση κυλίνδρου

Ο κύλινδρος είναι και αυτός στερεό εκ περιστροφής, με γενέτειρα ευθεία, που περιστρέφεται γύρω από παράλληλο στη γενέτειρα άξονα (σχ. 132). Η παράσταση κυλίνδρου γίνεται με την παράσταση των βάσεων του κυλίνδρου και των ακραίων γενετειρών του.



σχ. 132



σχ. 133

Ένα σημείο Ν κυλινδρικής επιφάνειας, για το οποίο γνωρίζουμε τη μία από τις δύο προβολές του, μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της αντίστοιχης γενέτειρας και με τον ίδιο τρόπο, που περιγράφεται για σημείο στην επιφάνεια κώνου (σχ. 133).

Τομή κυλίνδρου με επίπεδο

Στη γενική περίπτωση η τομή κυλίνδρου με επίπεδο δημιουργεί έλλειψη. Για τον προσδιορισμό της απαιτείται να οριστούν ο μεγάλος και ο μικρός άξονας σε κάθε προβολή. Σημαντικό επίσης είναι να προσδιοριστούν τα σημεία επαφής της καμπύλης τομής με τις γενέτειρες, σε κάθε προβολή. Είναι επίσης σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι -αντίθετα με την τομή επιπέδου με κώνο- το κέντρο της έλλειψης βρίσκεται στην περίπτωσή μας πάντοτε στον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου (σχ. 134).

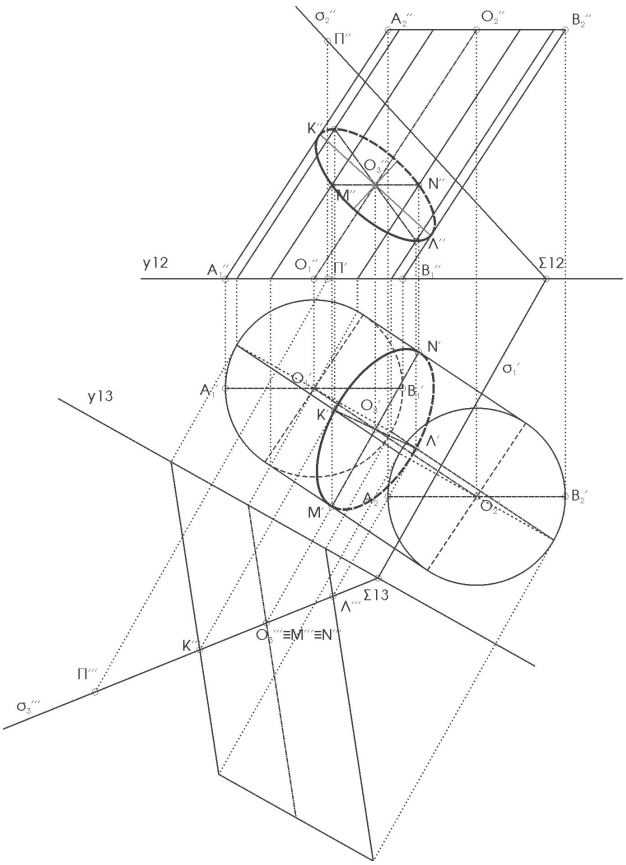
Ανάπτυγμα κυλίνδρου

Ο πιο ασφαλής τρόπος για να αναπτύξουμε την επιφάνεια ενός *ορθού κυλίνδρου* είναι να χρησιμοποιούμε ένα βοηθητικό επίπεδο $S(s_1', s_2'')$ που να τέμνει τον κύλινδρο κάθετα στον άξονά του (σχ. 135). Αυτή η μέθοδος προτιμάται, διότι η ανάπτυξη ξεκινά με ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, με μήκος που μπορεί εύκολα και με ασφάλεια να προσδιοριστεί. Οι δε γενέτειρες πάνω στις οποίες θα απεικονιστούν πραγματικά μεγέθη είναι κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

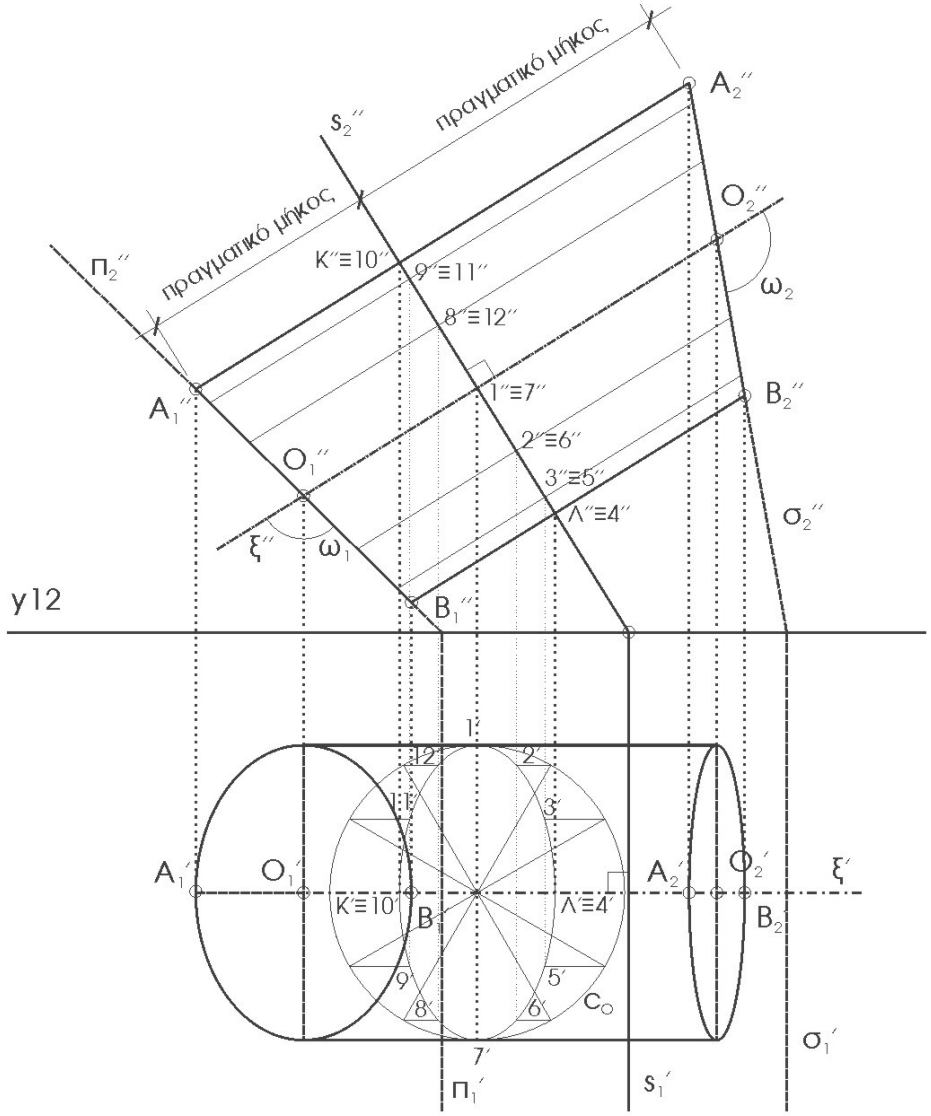
Στην περίπτωση ορθού κυλίνδρου, το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ=2πR, όπου R η ακτίνα του κύκλου, όπως προκύπτει από την κατάκλισή της στο $Π_1$ (σχ. 135,136).

Χωρίζουμε τον κύκλο c σε 12 ίσα τμήματα και το ίδιο κάνουμε και για το ευθύγραμμο τμήμα που αντιστοιχεί στο ανάπτυγμα του κύκλου c. Προσδιορίζουμε τις γενέτειρες που αντιστοιχούν στα 12 σημεία σε $2^η$ προβολή, όπου όλες εμφανίζουν πραγματικό μήκος άνω και κάτω του βοηθητικού επιπέδου τομής $S(s_1', s_2'')$.

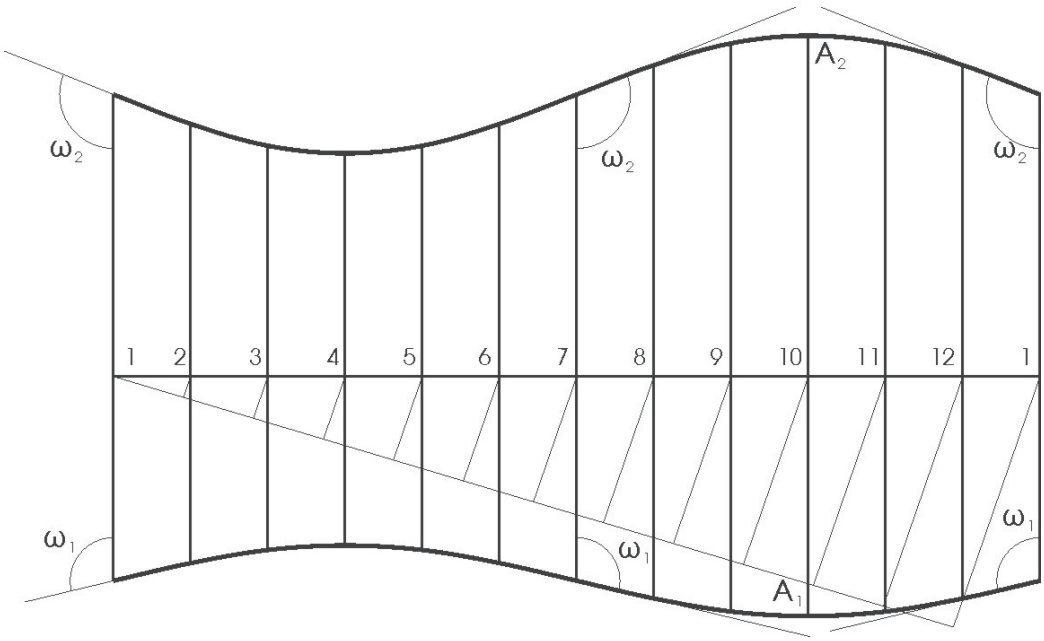
Τα σημεία καμπής των μετασχηματισμένων των βάσεων του κυλίνδρου εμφανίζονται στις γενέτειρες των σημείων 1 και 7, διότι στα σημεία αυτά εφάπτονται στον κύλινδρο επίπεδα



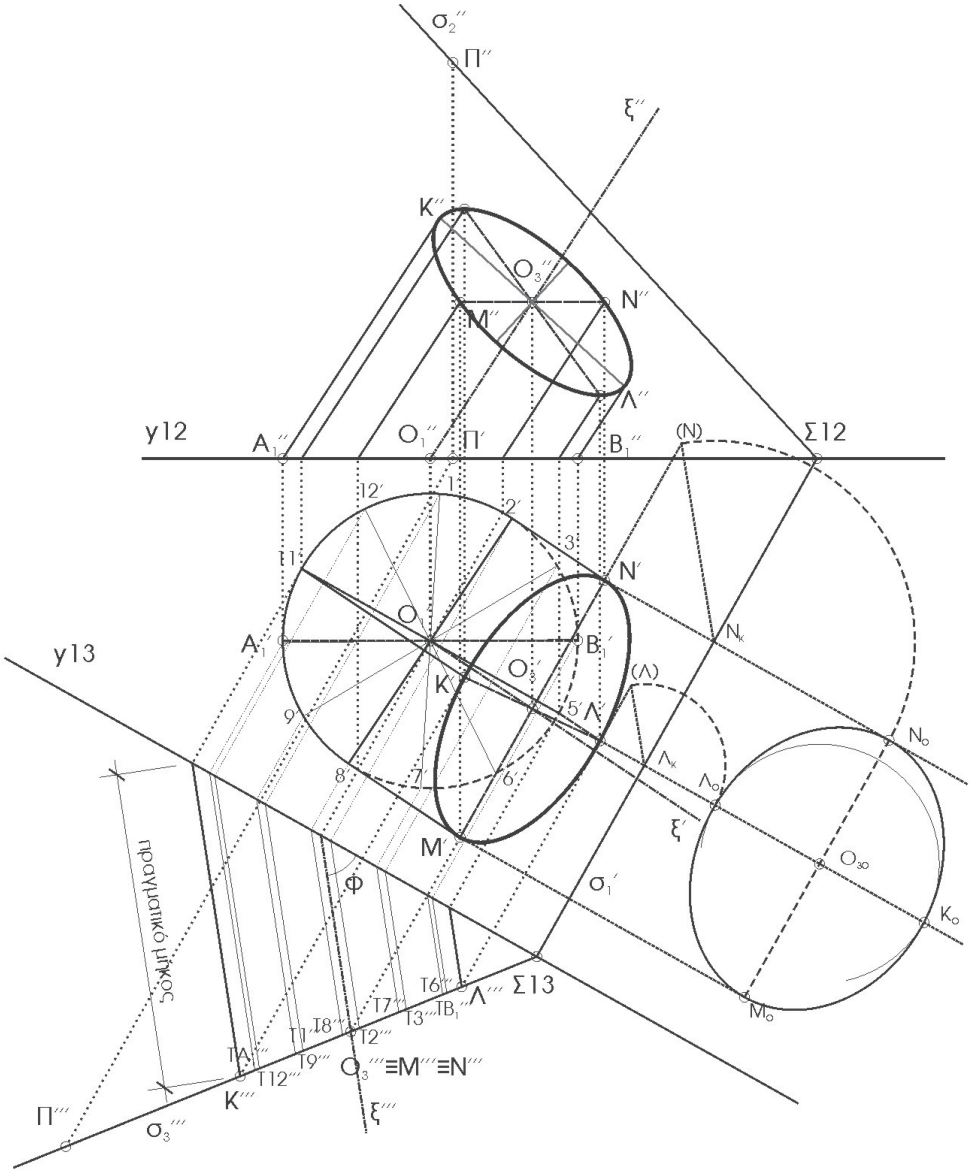
σχ. 134


πραγματικό μήκος,
πραγματικό μήκος,
s_2''
A_2''
O_2''
ω_2
B_2''
σ_2''
Π_2''
$K''\equiv10''$
$9''\equiv11''$
$8''\equiv12''$
$1''\equiv7''$
$2''\equiv6''$
$3''\equiv5''$
$\Lambda''\equiv4''$
A_1''
O_1''
ξ''
ω_1
B_1''
y12
A_1'
O_1'
$K'\equiv10'$
B_1'
$\Lambda'\equiv4'$
A_2'
O_2'
ξ'
B_2'
C_O
σ_1'
Π_1'
s_1'

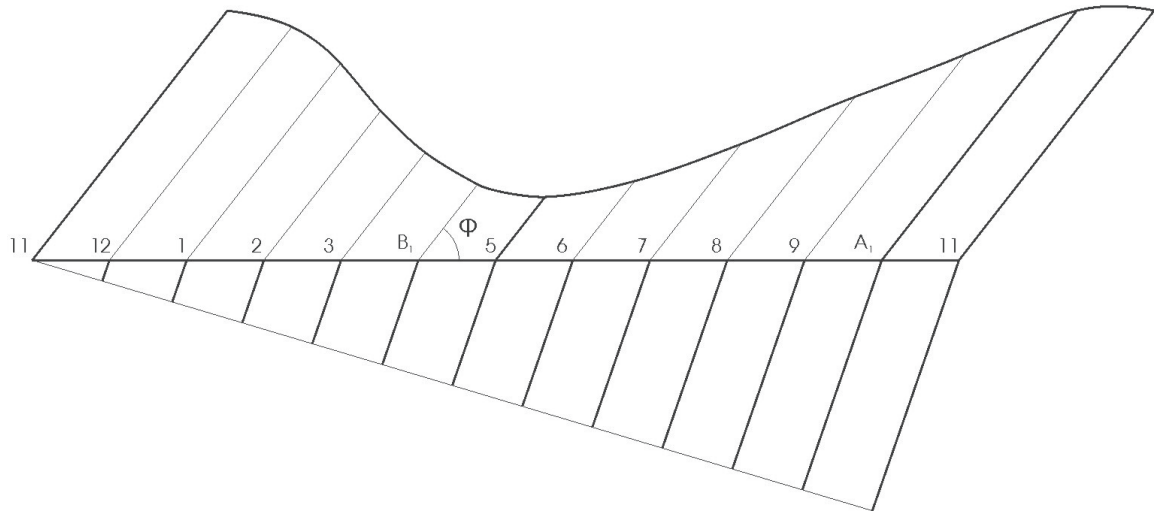
σχ. 135


A_2
ω_2
ω_2
ω_2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1
ω_1
ω_1
ω_1
A_1

σχ. 136


σ2''
Π''
ξ''
K''
O3'''
N''
M''
Λ''
y12
A1''
O1''
Π'
B1''
(N)
Σ12
12'
1'
2'
3'
11'
N'
O1'
A1'
B1'
y13
O3'
K'
(Λ)
9'
5'
Λ'
8'
7'
6'
M'
Φ
σ1'
ξ'
πραγματικό μήκος
Σ13
Λ'''
T6'''
TB1'''
T7'''
T13'''
T8'''
T11'''
T12'''
TA1'''
T9'''
T12'''
O3'''≡M'''≡N'''
K'''
ξ'''
Π'''
σ3'''
Nk
Λk
Λo
No
O3o
Ko
Mo

σχ. 137


11
12
1
2
3
B1
Φ
5
6
7
8
9
A1
11

σχ. 138

παράλληλα στον άξονα ξ(ξ΄,ξ΄΄) και κάθετα στις αντίστοιχες διαμέτρους των βάσεων. Οι γωνίες κλίσης ω_1 και ω_2 της κάτω και άνω βάσης αντίστοιχα, δηλαδή οι γωνίες των εφαπτομένων κάθε μετασχηματισμένης καμπύλης με την αντίστοιχη γενέτειρα, είναι ίσες με τις γωνίες που σχηματίζει ο άξονας ξ με το επίπεδο κάθε βάσης του κυλίνδρου και εμφανίζονται σε πραγματικό μέγεθος στη $2^η$ προβολή.

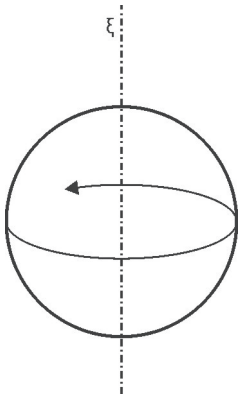
Στην περίπτωση *πλάγιου κυλίνδρου* (ο άξονας δεν είναι κάθετος στον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου), δεν χρησιμοποιούμε επίπεδο κάθετο στον άξονα ξ του κυλίνδρου, διότι η τομή του με τον κύλινδρο δημιουργεί έλλειψη. Χρησιμοποιούμε και αναπτύσσουμε τον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου και σχηματίζουμε τις γενέτειρές του με κλίση ως προς τη μετασχηματισμένη ευθεία, με γωνία κλίσης που ορίζεται στην κατάλληλη προβολή. Στο παράδειγμα του σχήματος 137 η προβολή που δίνει το πραγματικό μέγεθος της γωνίας κλίσης φ των γενετειρών του κυλίνδρου είναι η $3^η$ προβολή.

Η μετασχηματισμένη της άνω βάσης υπολογίζεται γραφικά με τον ίδιο τρόπο, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα (σχ. 138). Για την ολοκλήρωση της ανάπτυξης του στερεού, καθορίζουμε τα σχήματα των βάσεων. Στο παράδειγμα η κάτω βάση είναι κύκλος του $Π_1$ επομένως η πραγματική εικόνα του σχήματος παριστάνεται στην $1^η$ προβολή του. Η άνω βάση βρίσκεται στο επίπεδο $Σ(σ_1΄,σ_2΄΄)$ και για να προσδιοριστεί η πραγματική εικόνα του σχήματος (της έλλειψης), κάνουμε κατάκλιση. Σημειώνεται ότι αρκεί να γίνει κατάκλιση δύο σημείων, έστω των Λ και Ν, διότι τα υπόλοιπα είναι συμμετρικά των πρώτων ως προς τους άξονες ΜΝ και $Ο_1΄Ο_3΄$ αντίστοιχα.

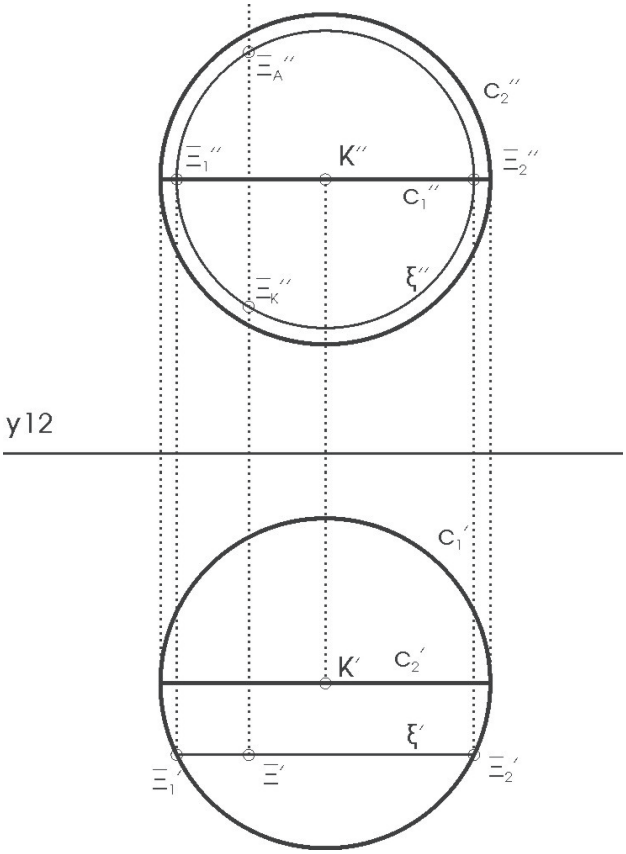
Σφαίρα

Παράσταση σφαίρας

Η σφαίρα είναι σχήμα εκ περιστροφής, με γενέτειρα κύκλο (σχ. 139). Η παράστασή της επομένως πραγματοποιείται μέσω της παράστασης του κέντρου της Κ(Κ΄,Κ΄΄) και της γενέτειρας περιφέρειας. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάθε μία από της προβολές σφαίρας απεικονίζουμε διαφορετική γενέτειρα. Στο παράδειγμα του



σχ. 139



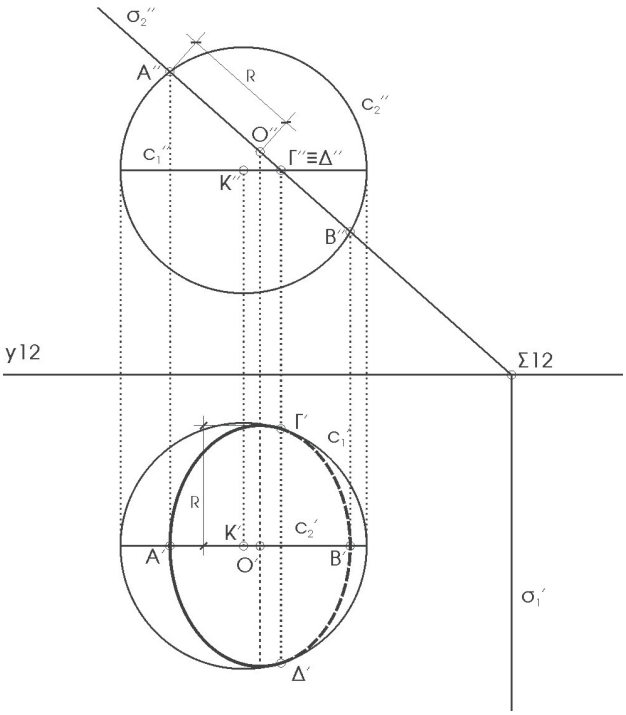
σχ. 140

σχήματος 140 η γενέτειρα c_1' στη 2η προβολή εκφυλίζεται στη διάμετρο c_1'' και αντίστοιχα η γενέτειρα c_2'' εκφυλίζεται στη διάμετρο c_2' στην 1η προβολή.

Ένα τυχαίο σημείο στην επιφάνεια σφαίρας, για το οποίο γνωρίζουμε μόνο την 1η προβολή του δεν μπορεί να προσδιοριστεί, διότι δίνει πάντοτε δύο σημεία στη 2η προβολή. Ο μονοσήμαντος προσδιορισμός τέτοιου σημείου, απαιτεί και δεύτερο γεωμετρικό τόπο, δηλαδή κάποιο επιπρόσθετο στοιχείο προσδιορισμού. Για παράδειγμα εάν ζητούμε τη 2η προβολή του σημείου Ξ, που ανήκει στο άνω ημισφαίριο της σφαίρας του σχήματος 140 εργαζόμαστε ως εξής: από το Ξ' σχηματίζουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα y12, που τέμνει τη c_1' στα $Ξ_1'$ και $Ξ_2'$. Το ευθύγραμμο τμήμα $Ξ_1Ξ_2$ είναι στην πραγματικότητα κύκλος με διάμετρο $Ξ_1Ξ_2$, σε επίπεδο παράλληλο στο $Π_2$. Βρίσκουμε τη 2η προβολή $Ξ_1''$ του σημείου $Ξ_1$ στην τομή του c_1'' με την κάθετη στον y12 από το $Ξ_1'$, διαγράφουμε τον κύκλο (K'',K''$Ξ_1$'') και ορίζουμε τα $Ξ_A''$ και $Ξ_K''$. Γνωρίζοντας ότι το Ξ ανήκει στο άνω ημισφαίριο, ορίζουμε το Ξ(Ξ',$Ξ_A$'').

Τομή σφαίρας με επίπεδο

Η τομή σφαιρικής επιφάνειας με επίπεδο δημιουργεί πάντοτε κύκλο ως καμπύλη τομής (εκτός από την περίπτωση εφαπτόμενου στη σφαίρα επιπέδου). Η παράσταση της καμπύλης είναι συνήθως έλλειψη στη μία ή και στις δύο προβολές της σφαίρας. Χαρακτηριστικά σημεία για την ορθή παράσταση της έλλειψης, είναι τα σημεία επαφής της έλλειψης με τον εκάστοτε περιβάλλοντα κύκλο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 141 τα σημεία επαφής Γ και Δ προσδιορίζονται στη 2η προβολή από την τομή του 2ου ίχνους $σ_2$'' με τη διάμετρο c_1''.



σχ. 141

Τομή σφαίρας με ευθεία

Η τομή σφαίρας με μη εφαπτόμενη ευθεία δημιουργεί στην επιφάνεια της σφαίρας δύο σημεία τομής 1(1',1'') και 2(2',2''). Για τον προσδιορισμό των σημείων αυτών, χρησιμοποιούμε αλλαγή επιπέδου προβολής (σχ. 142), ώστε η ευθεία ε(ε',ε'') να απεικονιστεί ως μετωπική: y13//ε'. Βρίσκουμε τις 3ες προβολές της ευθείας και της σφαίρας και

προσδιορίζουμε το σημείο Α΄, τομή της ε΄ με τον περιβάλλοντα κύκλο της σφαίρας, που δίνει στην 3η προβολή το σημείο Α΄΄΄. Με κέντρο Ο΄΄΄ και ακτίνα Ο΄΄΄Α΄΄΄ χαράσσουμε κύκλο s, που τέμνεται με την ε΄΄΄ στα ζητούμενα σημεία 1΄΄΄ και 2΄΄΄. Προσδιορίζουμε τις 1ες και 2ες προβολές των σημείων 1 και 2 στην ε΄ και ε΄΄ αντίστοιχα.

Σπείρα

Γενικά

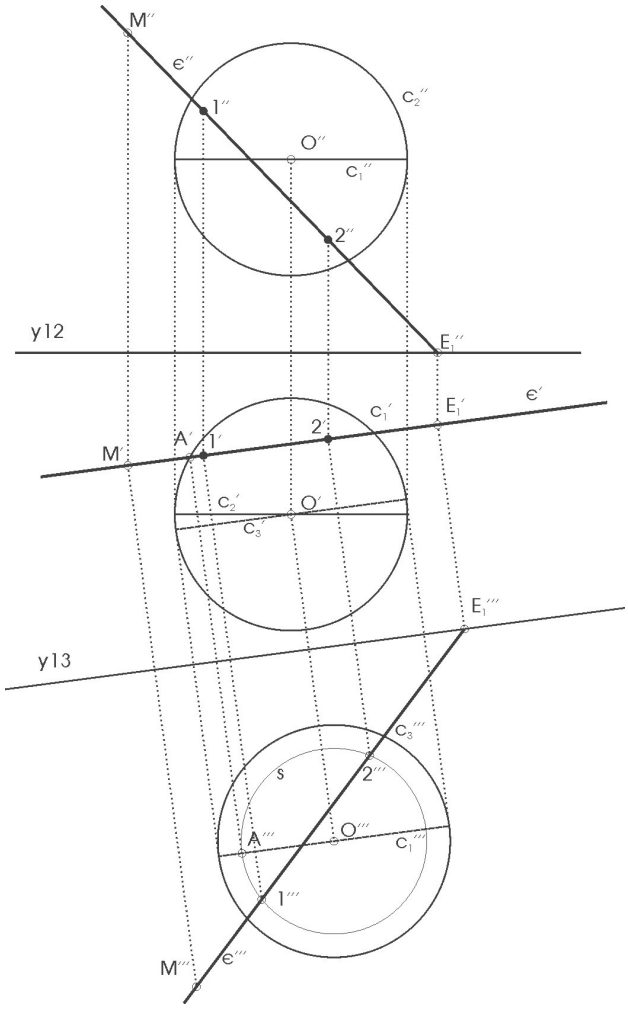
Η σπείρα (torus) είναι κι αυτή εκ περιστροφής στερεό με γενέτειρα κύκλο, αλλά ο άξονας περιστροφής της γενέτειρας δεν είναι στο κέντρο του κύκλου, όπως στη σφαίρα, αλλά ευθεία εκτός αυτού και στο επίπεδό του (σχ. 143, εικ. 144). Διακρίνονται τρείς κύριες κατηγορίες σπείρας:

1. ο άξονας περιστροφής απέχει από τον κύκλο της γενέτειρας Q>R και ονομάζεται *συνήθης ή ανοιχτή σπείρα* (σαμπρέλα) (σχ. 145)
2. ο άξονας περιστροφής εφάπτεται στον κύκλο της γενέτειρας Q=R και τότε έχουμε *σπείρα με μηδενικό περιλαίμιο* (σχ. 146)
3. ο άξονας περιστροφής τέμνει τον κύκλο της γενέτειρας (χωρίς να είναι διάμετρός του) Q<R, οπότε έχουμε τη λεγόμενη *κλειστή σπείρα* (σχ. 147).

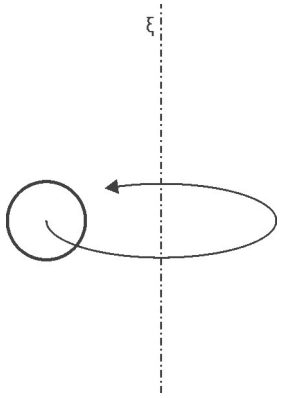
Παράσταση σπείρας

Για την παράσταση μιας σπείρας απεικονίζουμε την ευθεία του άξονά της και την ισημερινή περιφέρειά της. **Ισημερινή περιφέρεια** ονομάζεται ο κύκλος που διαγράφει το κέντρο του κύκλου της γενέτειρας, καθώς περιστρέφεται γύρω από τον άξονα περιστροφής. Κατόπιν σχηματίζουμε βοηθητικούς κύκλους με ακτίνα ίση με την ακτίνα του κύκλου της γενέτειρας και κέντρα, διάφορα σημεία της ισημερινής περιφέρειας. Τέλος σχηματίζουμε τις περιβάλλουσες καμπύλες των βοηθητικών κύκλων, που αποτελούν τα **οριακά περιγράμματα** της σπείρας (σχ. 148).

Ένα τυχαίο σημείο Ρ της επιφάνειας σπείρας, για το οποίο γνωρίζουμε μόνο την 1η προβολή του, δεν μπορεί και σε αυτή την περίπτωση να οριστεί, εκτός

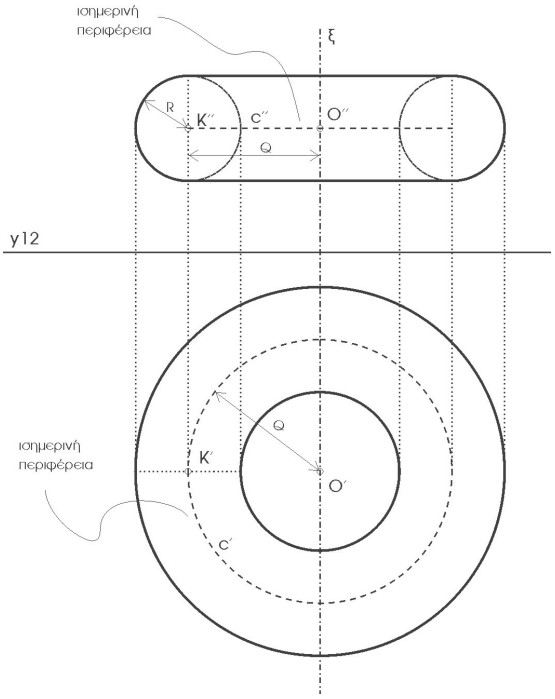


σχ. 142

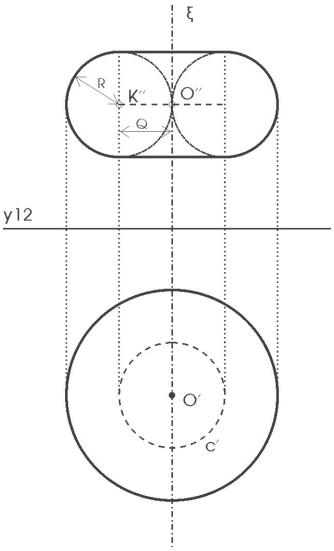


σχ. 143

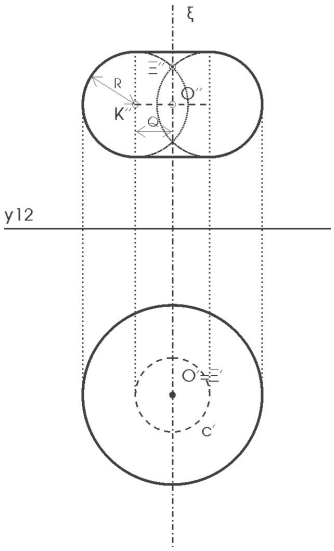
εικ. 144



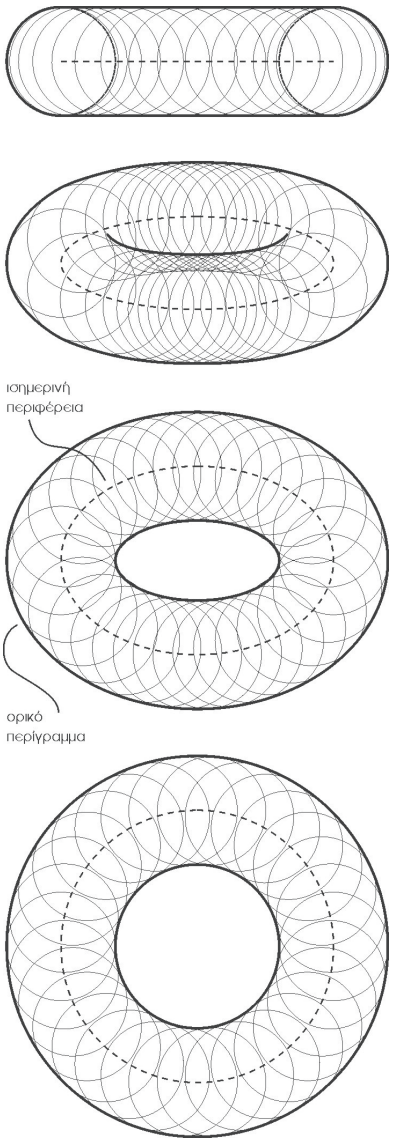
σχ. 145



σχ. 146



σχ. 147



σχ. 148

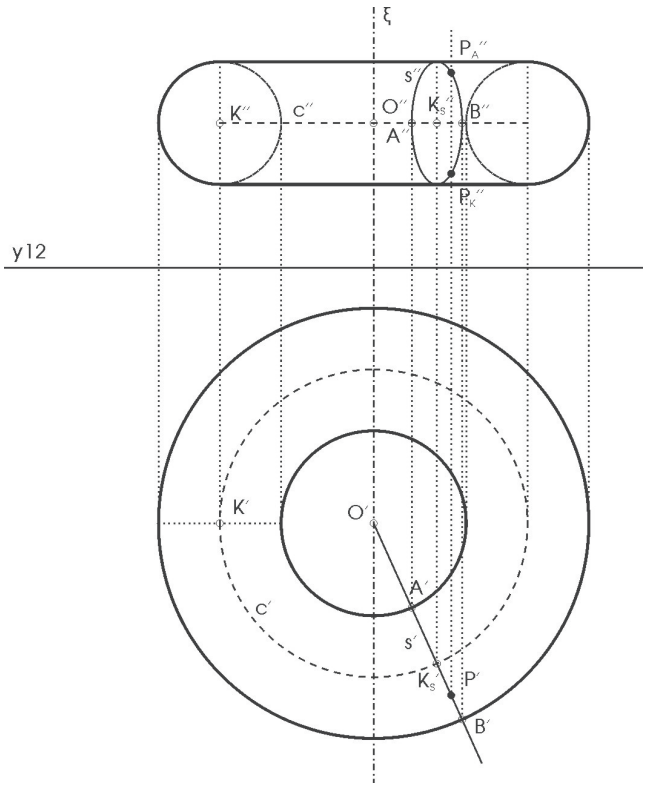
κι αν γνωρίζουμε κάποιο επιπρόσθετο στοιχείο προσδιορισμού του. Από την 1η προβολή Ο′ του κέντρου της σπείρας φέρνουμε την ακτίνα Ο′Ρ′, που απεικονίζει κατακόρυφο επίπεδο, το οποίο τέμνει τη σπείρα κατά τον κύκλο s′. Στην 1η προβολή ο κύκλος s εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα Α′Β′. Σχηματίζουμε τη 2η προβολή s″ του s, που είναι έλλειψη με μεγάλο άξονα παράλληλο στον άξονα ξ της σπείρας και ίσο με τη διάμετρο του κύκλου της γενέτειρας και μικρό άξονα το ευθύγραμμο τμήμα Α″Β″ στη γραμμή της ισημερινής περιφέρειας. Η κάθετη ευθεία από το Ρ′ ορίζει στην έλλειψη s″ δύο σημεία, τα P_A'' και P_K''. Εάν γνωρίζουμε (για παράδειγμα) ότι η 2η προβολή του Ρ βρίσκεται στο κάτω μισό της σπείρας, τότε ως 2η προβολή του Ρ επιλέγουμε το P_K'' (σχ. 149).

Τομή σπείρας με επίπεδο

Ανάλογα με τη θέση που είναι δυνατό να λάβει ένα επίπεδο, δημιουργεί στην τομή του με μια σπείρα πολλές διαφορετικές καμπύλες;

Εάν το επίπεδο τομής $P(\rho_1', \rho_2'')$ περιέχει τον άξονα περιστροφής της σπείρας, η καμπύλη τομής μετασχηματίζεται σε δύο κύκλους (σχ. 150).

Εάν το επίπεδο τομής $\Sigma(\sigma_1', \sigma_2'')$ είναι παράλληλο στον άξονα περιστροφής της σπείρας και εφαπτόμενο στον εσωτερικό ορικό κύκλο της σπείρας, η καμπύλη τομής μοιάζει με το σύμβολο του ∞ (σχ. 150).



σχ. 149

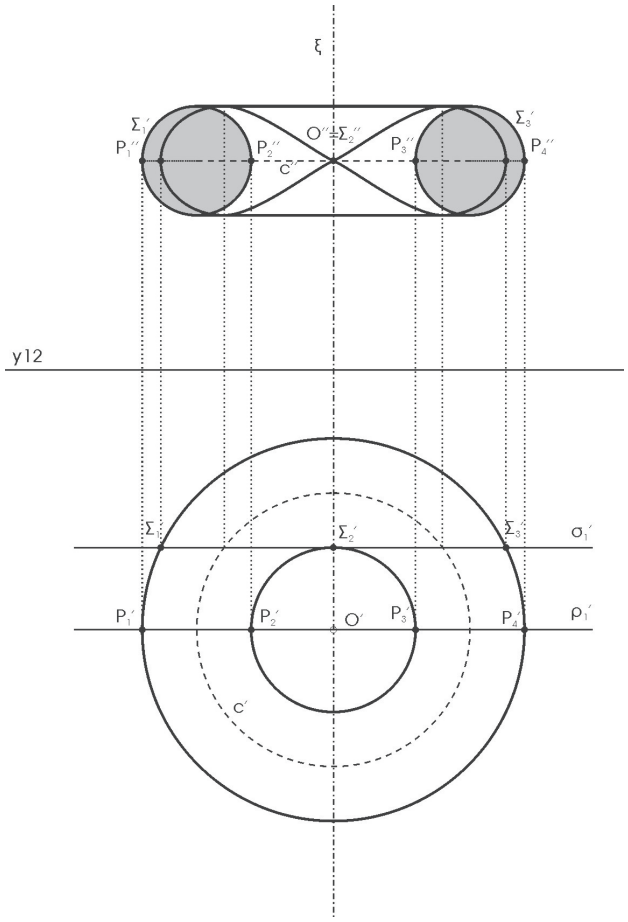
Εάν το επίπεδο τομής $T(\tau_1', \tau_2'')$ είναι παράλληλο στον άξονα περιστροφής της σπείρας και περιλαμβάνει το κέντρο ενός κύκλου γενέτειρας, τότε η καμπύλη τομής είναι η κλειστή καμπύλη του σχήματος 151, που όμως δεν είναι έλλειψη.

Εάν το επίπεδο τομής $Y(\upsilon_1', \upsilon_2'')$ διέρχεται από τυχαία θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα 151, η καμπύλη τομής προκύπτει με κατάκλιση του κύκλου s, για τον προσδιορισμό της απόστασης α.

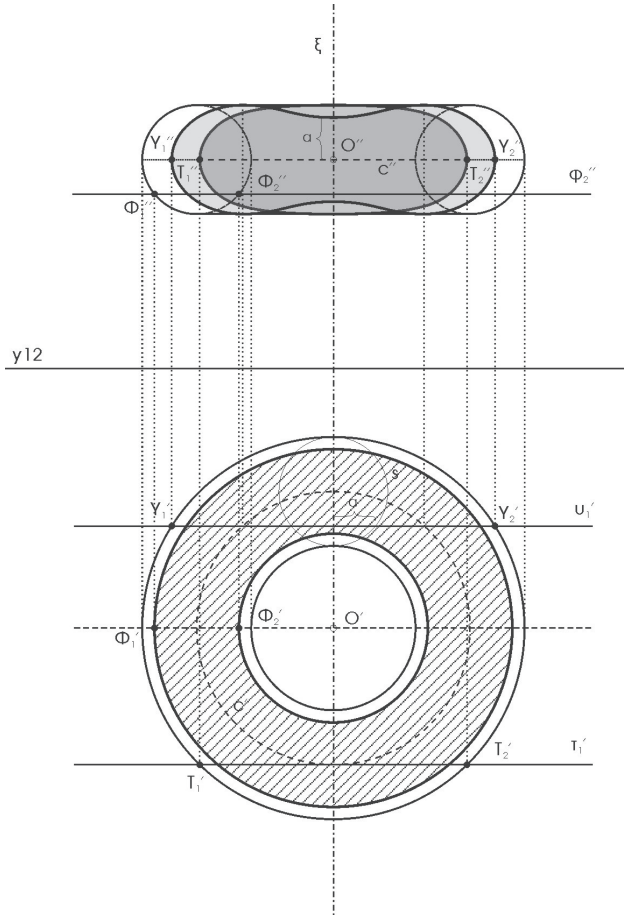
Οποιοδήποτε επίπεδο $\Phi(\varphi_1', \varphi_2'')$ κάθετο στον άξονα περιστροφής της σπείρας, δημιουργεί ομόκεντρους δυκτυλίους, ως καμπύλη τομής (σχ. 151).

Χαρακτηριστικό επίσης επίπεδο τομής σπείρας είναι το *δισεφαπτόμενο* επίπεδο $K(\kappa_1', \kappa_2'')$, που ονομάζεται το επίπεδο εκείνο που εφάπτεται σε δύο σημεία Α και Β της σπείρας, με Α≠Β. Στην περίπτωση αυτή (σχ. 152) η καμπύλη τομής μετασχηματίζεται σε δύο ίσους τεμνόμενους κύκλους, με σημεία τομής τα Α και Β (θεώρημα Villarceau).

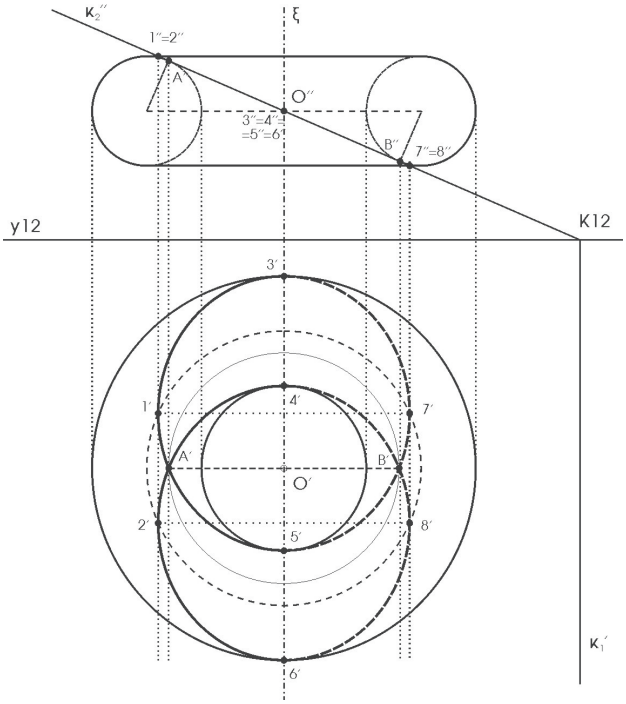
Ένα τυχαίο επίπεδο του χώρου μπορεί να δημιουργήσει μονή ή διπλή καμπύλη τομής με μια σπείρα. Στο σχήμα 153 το πρόσθιο επίπεδο $E(\epsilon_1', \epsilon_2'')$ τέμνει τη σπείρα και ζητείται η καμπύλη τομής της.



σχ. 150



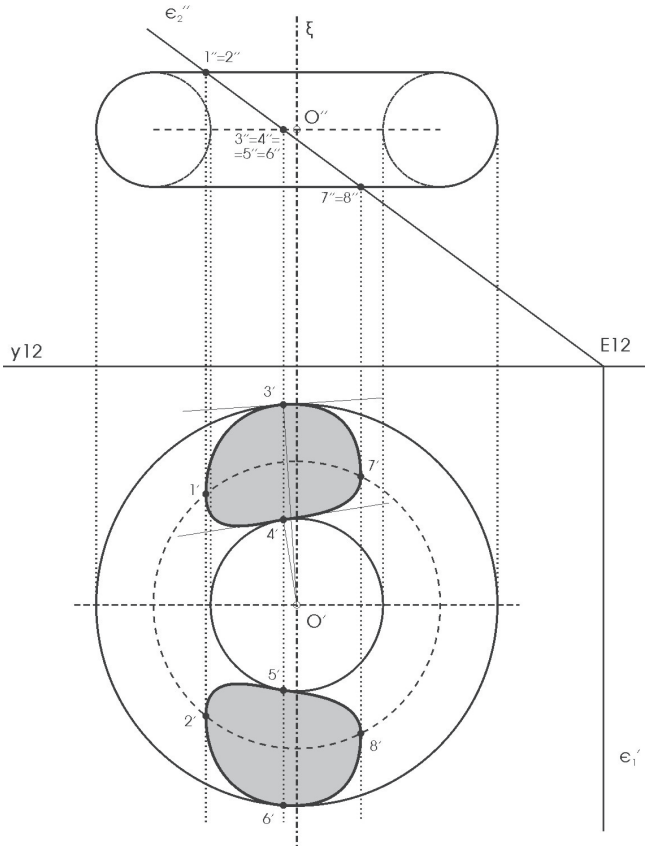
σχ. 151



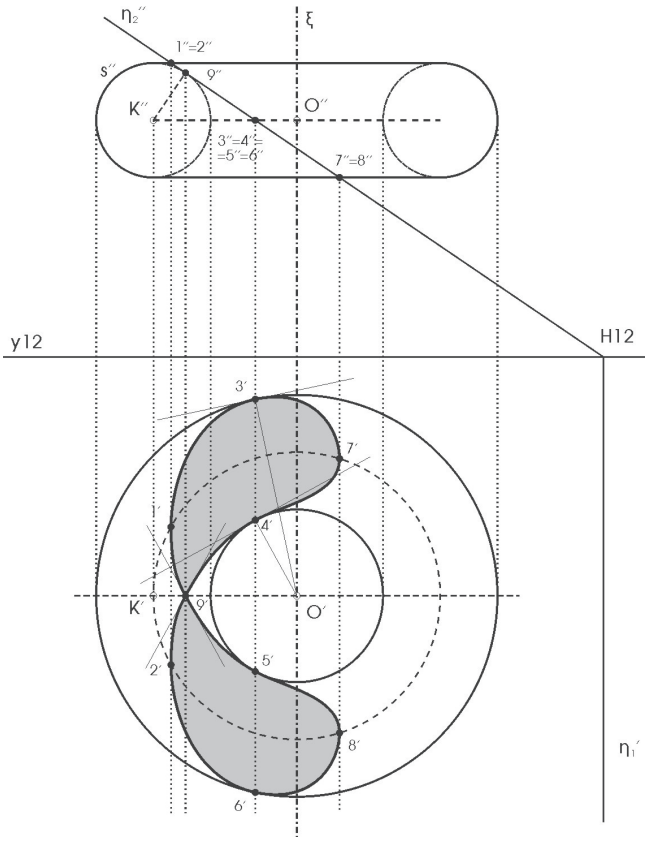
σχ. 152

Στη 2η προβολή η καμπύλη τομής της σπείρας και του επιπέδου έχει εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα (επειδή το επίπεδο Ε είναι ή μπορεί να γίνει –με αλλαγή- πρόσθιο) κι επομένως ο προσδιορισμός της καμπύλης τομής στην 1η προβολή είναι απλός και γίνεται μέσω των χαρακτηριστικών ακρότατων σημείων. Τα ακρότατα σημεία βρίσκονται στην τομή του ίχνους ϵ_2'' με τους τέσσερεις ακραίους κύκλους της σπείρας: ανώτατο, κατώτατο, εσωτερικό και εξωτερικό. Τα σημεία αυτά είναι αντίστοιχα τα 1 και 2, 7 και 8, 4 και 5, 3 και 6. Αφού προσδιορίσουμε τις 1ες προβολές τους, ορίζουμε τις εφαπτόμενες σε κάθε σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, ώστε να προσδιορίσουμε τη *διεύθυνση* της καμπύλης τομής σε κάθε ακρότατο σημείο. Για τα σημεία 1′, 2′, 7′ και 8′ οι εφαπτόμενες είναι ευθείες παράλληλες στο ίχνος ϵ_1'.

Στο σχήμα 154 το τυχαίο επίπεδο $H(\eta_1', \eta_2'')$ εφάπτεται στη σπείρα κι επομένως η καμπύλη τομής σχηματίζει το διπλό σημείο 9(9′,9″), το οποίο βρίσκεται αν από το κέντρο K″ του κύκλου s″ φέρουμε ευθεία κάθετη στο ίχνος η_2''.



σχ. 153



σχ. 154

Αλληλοτομία στερεών σχημάτων

Η αλληλοτομία στερεών σχημάτων είναι στην αρχιτεκτονική η σύνθεση βασικών στερεών, που τέμνοντας το ένα το άλλο, δημιουργούν τις συνθέσεις όγκων του αρχιτεκτονικού έργου. Η εφαρμογή των αλληλοτομιών στερεών σχημάτων είναι πάρα πολύ συχνή διαδικασία στην αρχιτεκτονική (σχ. 155).

Χαρακτηριστικές εφαρμογές αλληλοτομίας μπορούμε να παρατηρήσουμε σε σύνθετες στέγες (αλληλοτομία πυραμίδων) και στη ναοδομία (αλληλοτομία κυλίνδρων, κώνων και ημισφαιρίων), (σχ. 156).

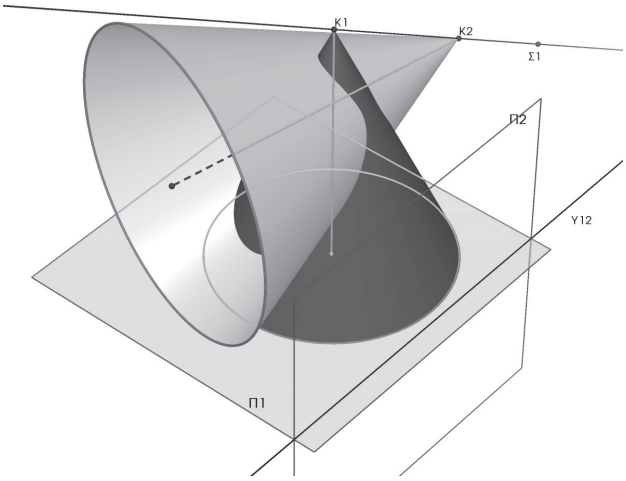
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μερικά χαρακτηριστικά θέματα αλληλοτομιών, με στόχο την παρουσίαση και κατανόηση της μεθοδολογίας που κάθε φορά ακολουθείται.

Αλληλοτομία πυραμίδων

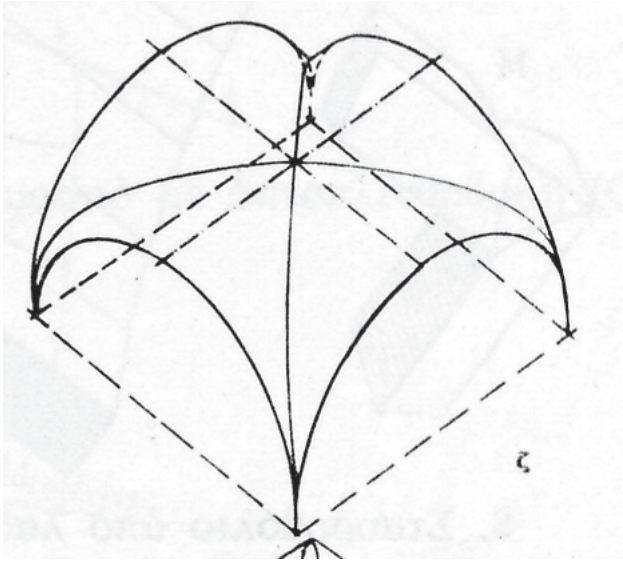
Η αλληλοτομία δυο πυραμίδων, παράγει μία ή δύο κλειστές τεθλασμένες γραμμές στις έδρες των στερεών, εκεί που τέμνουν το ένα το άλλο. Για να παραστήσουμε την αλληλοτομία στερεών σχημάτων εν γένει, εφαρμόζουμε μια σχετικά απλή, αλλά σχεδιαστικά πολύπλοκη μέθοδο, θεωρώντας διάφορα βοηθητικά επίπεδα, με τα οποία τέμνουμε τα στερεά.

Στο παράδειγμα των σχημάτων 157 και 158 έχουν παρασταθεί δύο πυραμίδες με τριγωνικές βάσεις. Η πρώτη πυραμίδα έχει βάση $Α_1Β_1Γ_1$ και κορυφή $Κ_1$ και εδράζεται στο επίπεδο προβολής $Π_1$. Η δεύτερη πυραμίδα έχει βάση το τρίγωνο $Α_2Β_2Γ_2$, κορυφή το σημείο $Κ_2$ και εδράζεται στο επίπεδο προβολής $Π_2$ (σχ. 158).

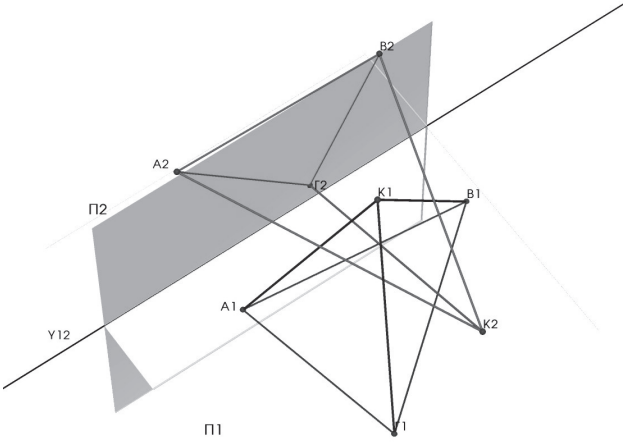
Αυτό που χρειάζεται πριν απ΄ όλα να ελεγχθεί και να οριστεί είναι η *περιοχή* της αλληλοτομίας των δύο στερεών. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε μια ομάδα βοηθητικών επιπέδων (σχ. 159). Από την ομάδα αυτή θα ορίσουμε κατόπιν τα ακρότατα επίπεδα, τα οποία ονομάζονται *οριακά επίπεδα*. Η ομάδα των βοηθητικών επιπέδων ορίζεται από μια «σταθερή» ευθεία, την $Κ_1Κ_2$, την ευθεία δηλαδή που ενώνει τις κορυφές των πυραμίδων και διάφορα χαρακτηριστικά σημεία των δύο στερεών.



σχ. 155

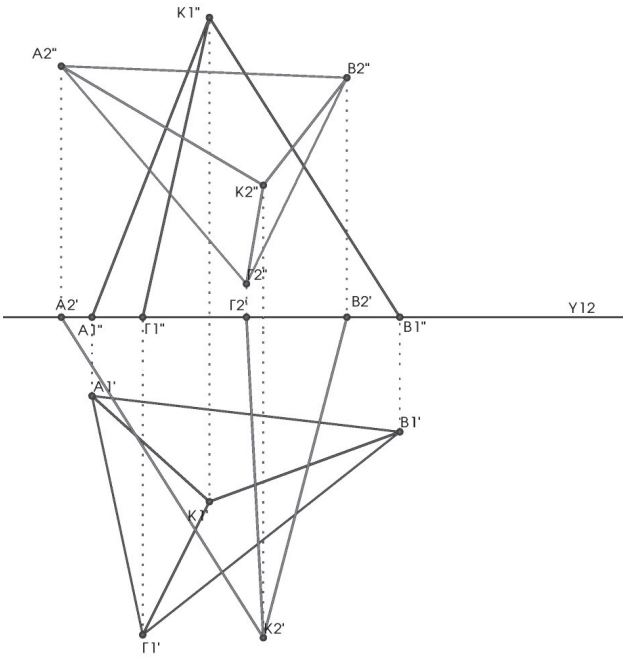


σχ. 156



σχ. 157

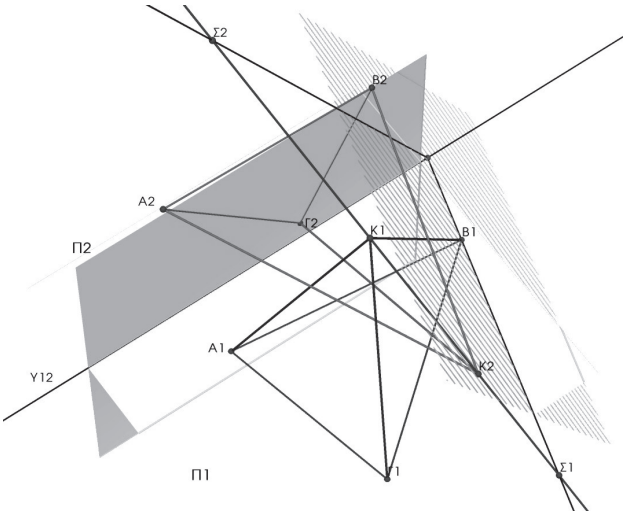
Κατασκευάζουμε την ευθεία K_1K_2 στην 1η και 2η προβολή και βρίσκουμε τα ίχνη της $\Sigma_1=\Sigma_1'$ και $\Sigma_2=\Sigma_2''$. Εφ΄ όσον η ομάδα βοηθητικών επιπέδων έχει οριστεί να περιλαμβάνει την ευθεία K_1K_2, θα περιλαμβάνει όλα τα σημεία της, επομένως και τα Σ_1' και Σ_2'' (σχ. 160). Επειδή δε τα Σ_1' και Σ_2'' είναι ίχνη της ευθείας K_1K_2, τότε τα ίχνη των βοηθητικών επιπέδων θα διέρχονται από τα σημεία Σ_1' και Σ_2''. Δημιουργούμε το πρώτο βοηθητικό επίπεδο, ενώνοντας το ίχνος Σ_1' με το B_1' (σχ. 161). Η ευθεία $\Sigma_1'B_1'$ αποτελεί ίχνος του νέου επιπέδου. Προεκτείνουμε την $\Sigma_1'B_1'$ μέχρι να τμήσει τον άξονα y12, στο σημείο B_i και ενώνουμε το B_i με το Σ_2'', δημιουργώντας το 2ο ίχνος του βοηθητικού επιπέδου. Παρατηρούμε ότι το βοηθητικό επίπεδο $\Sigma_1'B_i\Sigma_2''$ *εφάπτεται* στην πρώτη πυραμίδα και *τέμνει* τη δεύτερη πυραμίδα. Δημιουργεί επομένως ένα *όριο* για την περιοχή της αλληλοτομίας και αποτελεί ένα *ορικό επίπεδο* της αλληλοτομίας των πυραμίδων. Ενώνουμε το ίχνος Σ_2'' με το σημείο A_2'' της δεύτερης πυραμίδας και δημιουργούμε το 2ο ίχνος ενός ακόμα βοηθητικού επιπέδου, το οποίο τέμνει τον άξονα y12 στο σημείο A_{ii}. Ενώνουμε το A_{ii} με το Σ_1' και παρατηρούμε ότι το 1ο ίχνος $A_{ii}\Sigma_1'$ του επιπέδου τέμνει το τρίγωνο της βάσης της πρώτης πυραμίδας. Το επίπεδο $\Sigma_1'A_{ii}\Sigma_2''$ είναι *εφαπτόμενο*, όσον αφορά τη δεύτερη πυραμίδα και *τέμνει* την πρώτη πυραμίδα. Είναι λοιπόν και αυτό *ορικό επίπεδο* της αλληλοτομίας.



σχ. 158

Αυτό που χρειάζεται τώρα να γίνει, είναι να οριστούν τα σημεία στις ακμές και τις έδρες των πυραμίδων, από τα οποία διέρχεται η τεθλασμένη γραμμή της αλληλοτομίας τους. Ξεκινούμε από τα ορικά επίπεδα και συγκεκριμένα από το $\Sigma_1'B_i\Sigma_2''$. Το επίπεδο αυτό εφάπτεται στην πρώτη πυραμίδα και τέμνει τη δεύτερη πυραμίδα. Επομένως η ακμή K_1B_1 τέμνει δύο έδρες της δεύτερης πυραμίδας. Για να βρούμε τα σημεία τομής, ορίζουμε τα σημεία 1'' και 2'', τομές του ίχνους $B_i\Sigma_2''$ με τις $A_2''B_2''$ και $B_2''\Gamma_2''$ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε τις βοηθητικές ακμές $K_2''1''$ και $K_2''2''$. Στην τομή των $K_2''1''$ και $K_1''B_1''$ ορίζουμε το σημείο I'' και στην τομή των $K_2''2''$ και $K_1''B_1''$ ορίζουμε το σημείο II''. Τα σημεία I και II είναι σημεία της αλληλοτομίας.

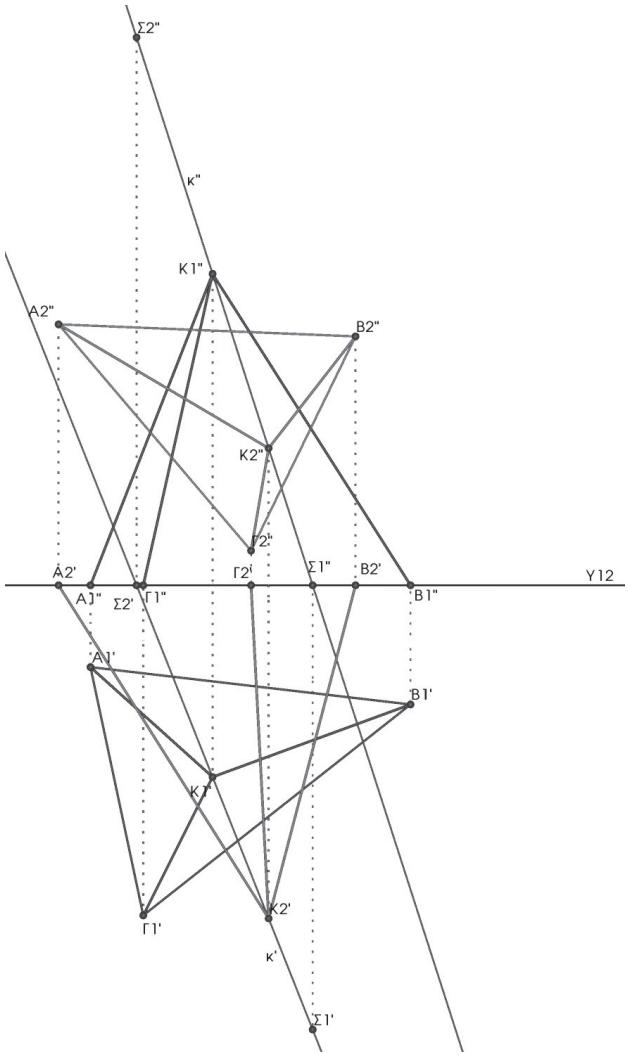
Βρίσκουμε τις 1ες προβολές τους I' και II' στην $K_1'B_1'$. Με όμοιο τρόπο εργαζόμαστε για το δεύτερο ορικό επίπεδο $\Sigma_1'B_{ii}\Sigma_2''$, το οποίο εφάπτεται στη δεύτερη πυραμίδα και τέμνει την πρώτη πυραμίδα. Το 1ο ίχνος $\Sigma_1'A_{ii}$ τέμνει τη βάση της πρώτης πυραμίδας



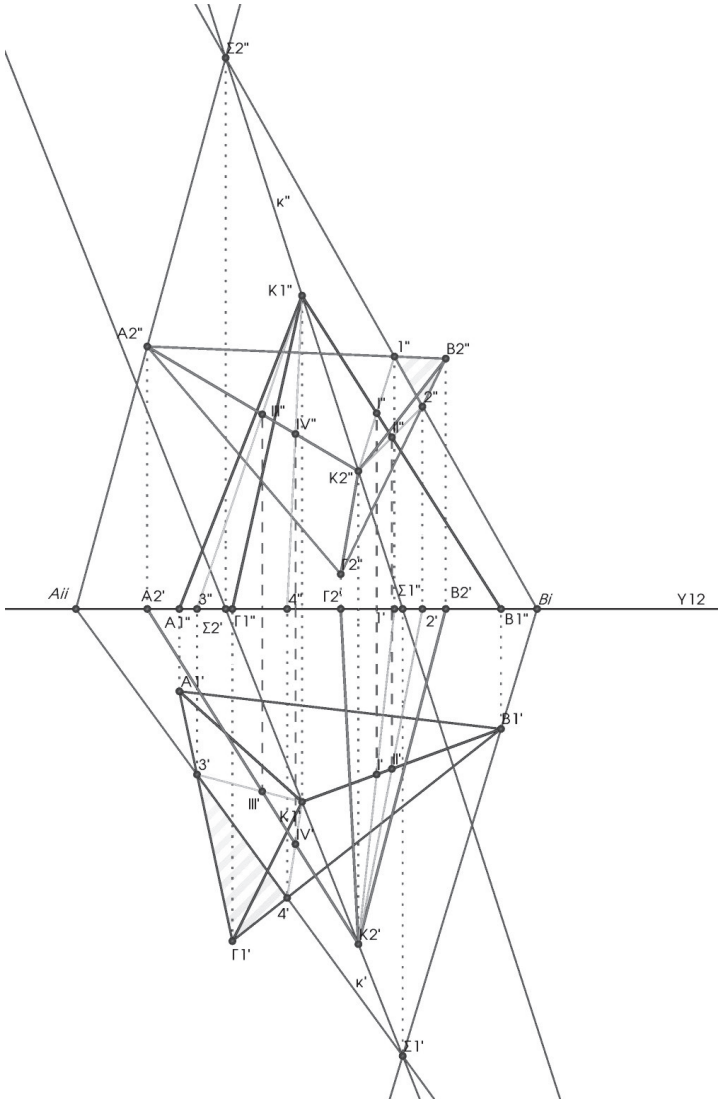
σχ. 159

στα σημεία 3′ και 4′. Σχηματίζουμε τις βοηθητικές ακμές $K_1'3'$ και $K_1'4'$, οι οποίες τέμνουν την ακμή $K_2'A_2'$ στα σημεία III′ και IV′ αντίστοιχα. Βρίσκουμε τις 2ες προβολές III′′ και IV′′ στην $K_2''A_2''$.

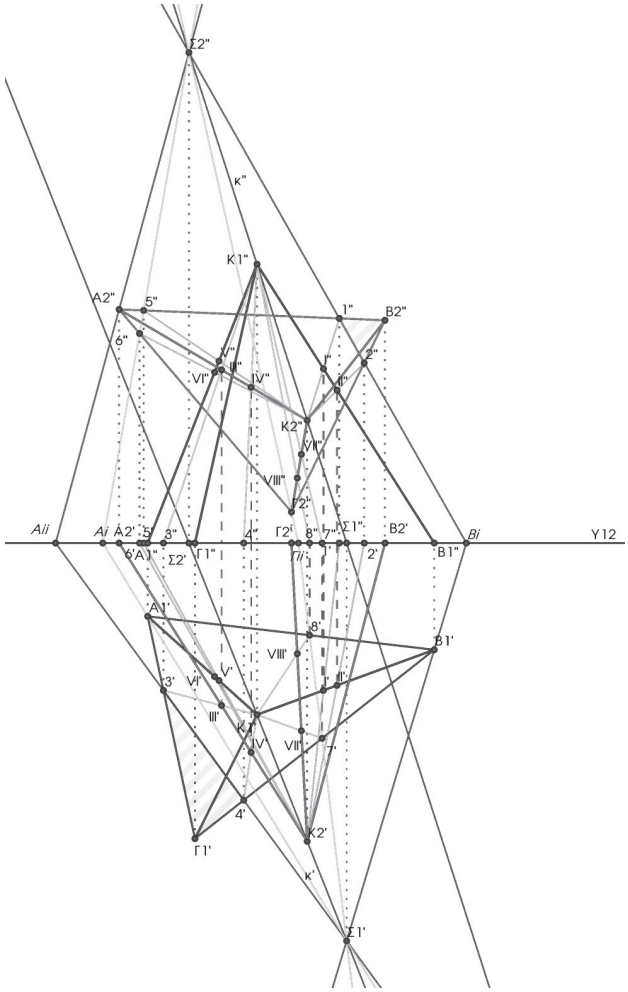
Τα ορικά επίπεδα έχουν σχηματίσει στις πυραμίδες δύο δευτερεύοντα στερεά σχήματα, τα οποία δεν συμμετέχουν στην αλληλοτομία. Για τη δεύτερη πυραμίδα το δευτερεύον αυτό στερεό ορίζεται από το τρίγωνο $1B_22$ και την κορυφή K_2. Για την πρώτη πυραμίδα το δευτερεύον σχήμα ορίζεται από το τρίγωνο $3Γ_14$ και την κορυφή K_1. Τα τρίγωνα $1B_22$ και $3Γ_14$ ονομάζονται *νεκρές περιοχές* της αλληλοτομίας. Είναι χρήσιμο ν′ αναγνωρίζουμε τις νεκρές περιοχές αλληλοτομίας, διότι αυτομάτως αναγνωρίζουμε ότι οι ακμές K_2B_2 της δεύτερης και $K_1Γ_1$ της πρώτης πυραμίδας δεν συμμετέχουν στην αλληλοτομία των στερεών και βέβαια δεν υπάρχουν σ′ αυτές σημεία αλληλοτομίας.



σχ. 160



σχ. 161

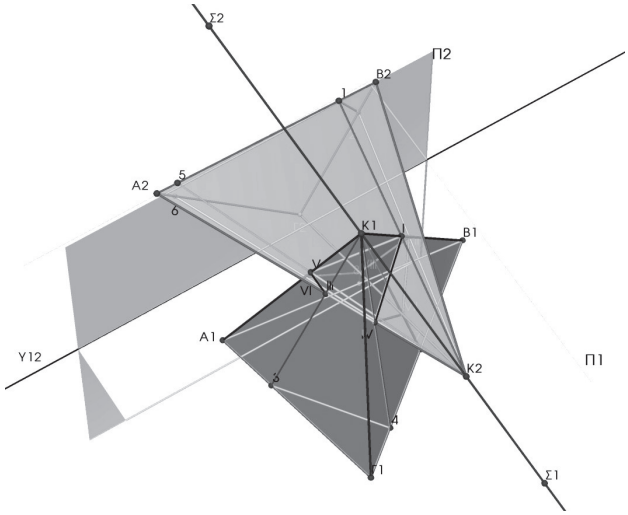


σχ. 162

Μπορούν τώρα να βρεθούν τα σημεία αλληλοτομίας για τις ακμές K_1A_1 και $K_2Γ_2$ (σχ. 162). Σχηματίζουμε το βοηθητικό επίπεδο που διέρχεται από το A_1 και περιλαμβάνει την K_1K_2, ενώνοντας τα $Σ_1'$ και A_1', προεκτείνοντας μέχρι τον άξονα y12 στο σημείο A_i και τέλος ενώνοντας τα A_i και $Σ_2''$. Το ίχνος $A_iΣ_2''$ του βοηθητικού επιπέδου τέμνει τη βάση της δεύτερης πυραμίδας στα σημεία 5″ και 6″. Σχηματίζουμε τις βοηθητικές ακμές $K_2''5''$ και $K_2''6''$. Οι τομές των $K_2''5''$ με την $K_1''A_1''$ ορίζουν τα σημεία V″ και VI″, για τα οποία βρίσκουμε και τις 1ες προβολές V′ και VI′ στην $K_1'A_1'$. Σχηματίζουμε και το τελευταίο βοηθητικό επίπεδο, ενώνοντας τα $Σ_2''$ και $Γ_2''$, προεκτείνουμε μέχρι τον άξονα y12 στο σημείο $Γ_{ii}$, το οποίο ενώνουμε με το $Σ_1'$. Το ίχνος $Γ_{ii}Σ_1'$ τέμνει τη βάση της πρώτης πυραμίδας στα σημεία 7′ και 8′. Σχηματίζουμε τις βοηθητικές ακμές $K_1'7'$ και $K_1'8'$. Στην τομή των παραπάνω βοηθητικών ακμών με την $K_2'Γ_2'$ βρίσκονται τα σημεία VII′ και VIII′ της αλληλοτομίας. Ορίζουμε και τις 2ες προβολές τους VII″ και VIII″ στην $K_2''Γ_2''$.

Απομένει πλέον να οριστεί η σειρά με την οποία θα ενωθούν τα οκτώ σημεία αλληλοτομίας που έχουν βρεθεί. Σημειώνεται ότι η σειρά παραμένει η ίδια τόσο στην 1η, όσο και στη 2η προβολή.

Ξεκινούμε από ένα οποιοδήποτε σημείο της βάσης του ενός στερεού και ταυτόχρονα από το αντίστοιχο σημείο της βάσης του δεύτερου στερεού και ορίζουμε τη διεύθυνση της κίνησής μας στα διάφορα σημεία των βάσεων, με τη σειρά που τα συναντάμε. Κάθε φορά όμως που φτάνουμε σε νεκρή περιοχή, *αντιστρέφουμε* τη διεύθυνση της πορείας. Συνήθως ξεκινούμε από σημείο νεκρής περιοχής.



σχ. 163

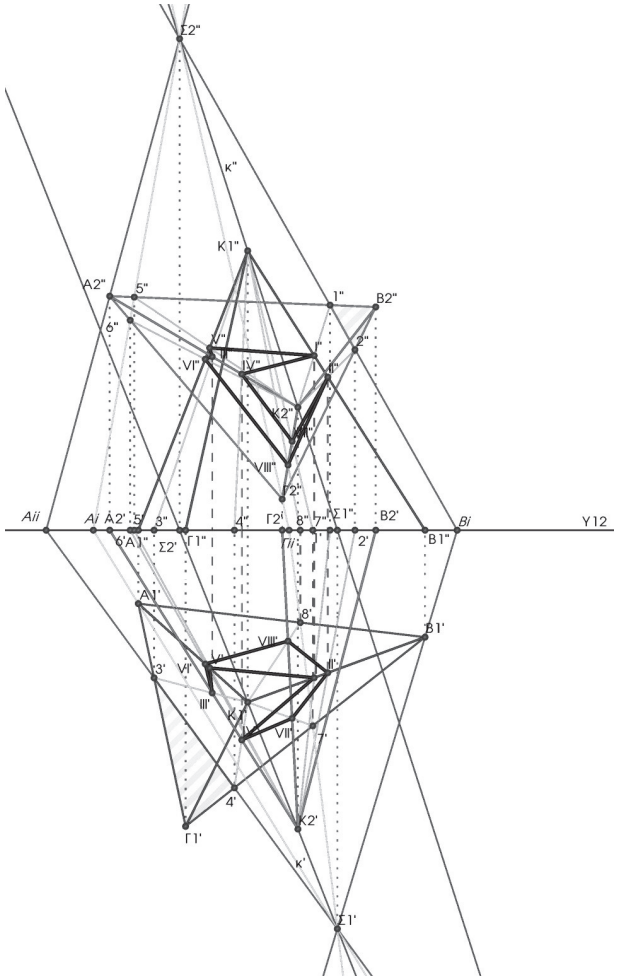
Στο παράδειγμά μας (σχ. 163, 164) μπορούμε να ξεκινήσουμε από το σημείο 1″ της 2ης πυραμίδας, που αντιστοιχεί στο σημείο B_1' της 1ης πυραμίδας. Για τη 2η πυραμίδα κινούμαστε υποχρεωτικά αριστερόστροφα, ενώ για την 1η πυραμίδα μπορούμε να κινηθούμε με οποιαδήποτε διεύθυνση επιθυμούμε, έστω κι εδώ αριστερόστροφα. Από τις K_1B_1 και K_21 παίρνουμε το σημείο I, που είναι το πρώτο και τελευταίο σημείο της σειράς της τεθλασμένης γραμμής αλληλοτομίας.

Από τα σημεία 1″ και B_1' αριστερόστροφα φτάνουμε στα 5″ και A_1' στις δύο πυραμίδες, τα οποία δίνουν το σημείο αλληλοτομίας V(V′,V″). Η

τεθλασμένη λοιπόν της αλληλοτομίας ξεκινά από το σημείο I(I′,I′′) και συνεχίζει στο V(V′,V′′). Από τα σημεία 5′′ και A_1' κινούμενοι αριστερόστροφα, φτάνουμε στα A_2'' και 3′, τα οποία δίνουν το σημείο αλληλοτομίας III. Στη 2η πυραμίδα συνεχίζουμε αριστερόστροφα στο σημείο 6′′, αλλά στην 1η πυραμίδα συνεχίζουμε δεξιόστροφα, πάλι στο A_1' (διότι το σημείο 3′ ορίζει νεκρή περιοχή). Τα σημεία 6′′ και A_1' δίνουν το σημείο αλληλοτομίας VI. Από το 6′′ φτάνουμε αριστερόστροφα στο $Γ_2''$ και *ταυτόχρονα* από το A_1' φτάνουμε δεξιόστροφα στο 8′. Τα σημεία δίνουν το σημείο αλληλοτομίας VIII κ.ο.κ.

Η σειρά των σημείων της αλληλοτομίας ορίζεται λοιπόν ως εξής: I – V – III – VI – VIII – II – VII – IV – I (σχ. 164).

Είναι χρήσιμο να επισημανθεί ότι για τα βοηθητικά σημεία της βάσης των στερεών, που παράγονται από τις τομές των στερεών με τα διάφορα βοηθητικά επίπεδα, χρησιμοποιούμε αραβικούς αριθμούς για τον χαρακτηρισμό τους. Για να αποφεύγουμε δυσκολίες και παρερμηνείες, ονομάζουμε συνήθως τα σημεία της αλληλοτομίας με τους αντίστοιχους λατινικούς αριθμούς.



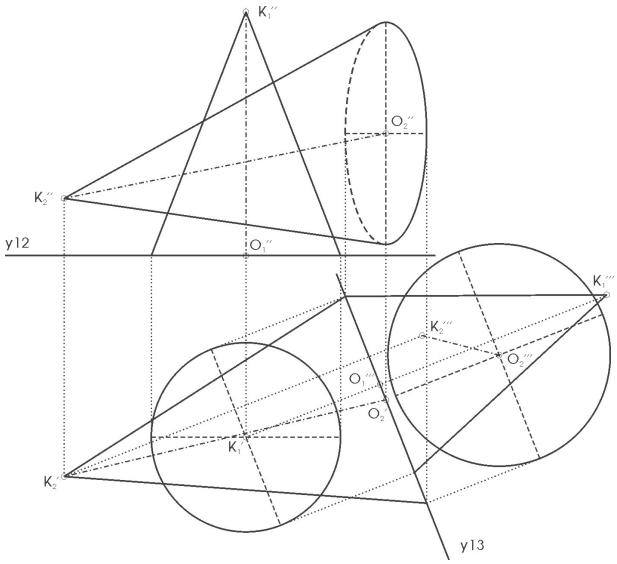
σχ. 164

Αλληλοτομία κώνων

Η αλληλοτομία κώνων παράγει στη γενική περίπτωση καμπύλη 4ου βαθμού. Αυτό μαθηματικά σημαίνει ότι η εξίσωση της καμπύλης αλληλοτομίας συμπεριλαμβάνει παράγοντες στην 4η δύναμη. Γεωμετρικά σημαίνει ότι οποιοδήποτε τυχαίο επίπεδο του χώρου, που τέμνει την καμπύλη αλληλοτομίας, δημιουργεί το πολύ 4 σημεία τομής.

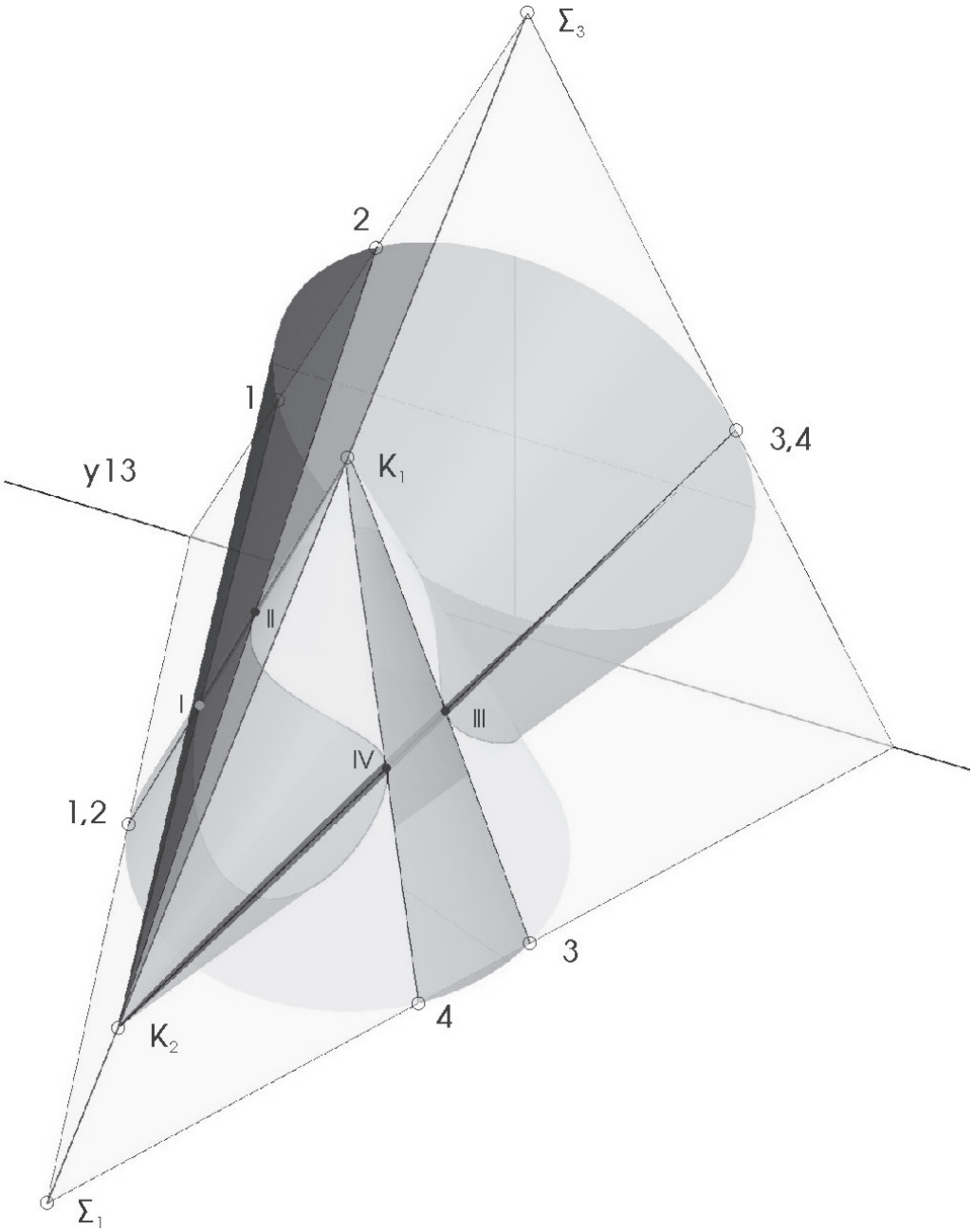
Πριν την ανάλυση του θέματος, είναι χρήσιμο να επισημανθεί ότι για την ευκολότερη παραστατική επίλυση θεμάτων αλληλοτομίας, είναι σκόπιμο να προσαρμόζουμε τα επίπεδα προβολής $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$ κλπ έτσι, ώστε τα στερεά σχήματα που αλληλοτέμνονται, να παριστάνονται με τον απλούστερο δυνατό τρόπο, που επιτυγχάνεται με διαδοχικές αλλαγές επιπέδων προβολής (σχ. 165).

Η καμπύλη αλληλοτομίας κώνων υπολογίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Κι εδώ χρησιμοποιούμε την ευθεία

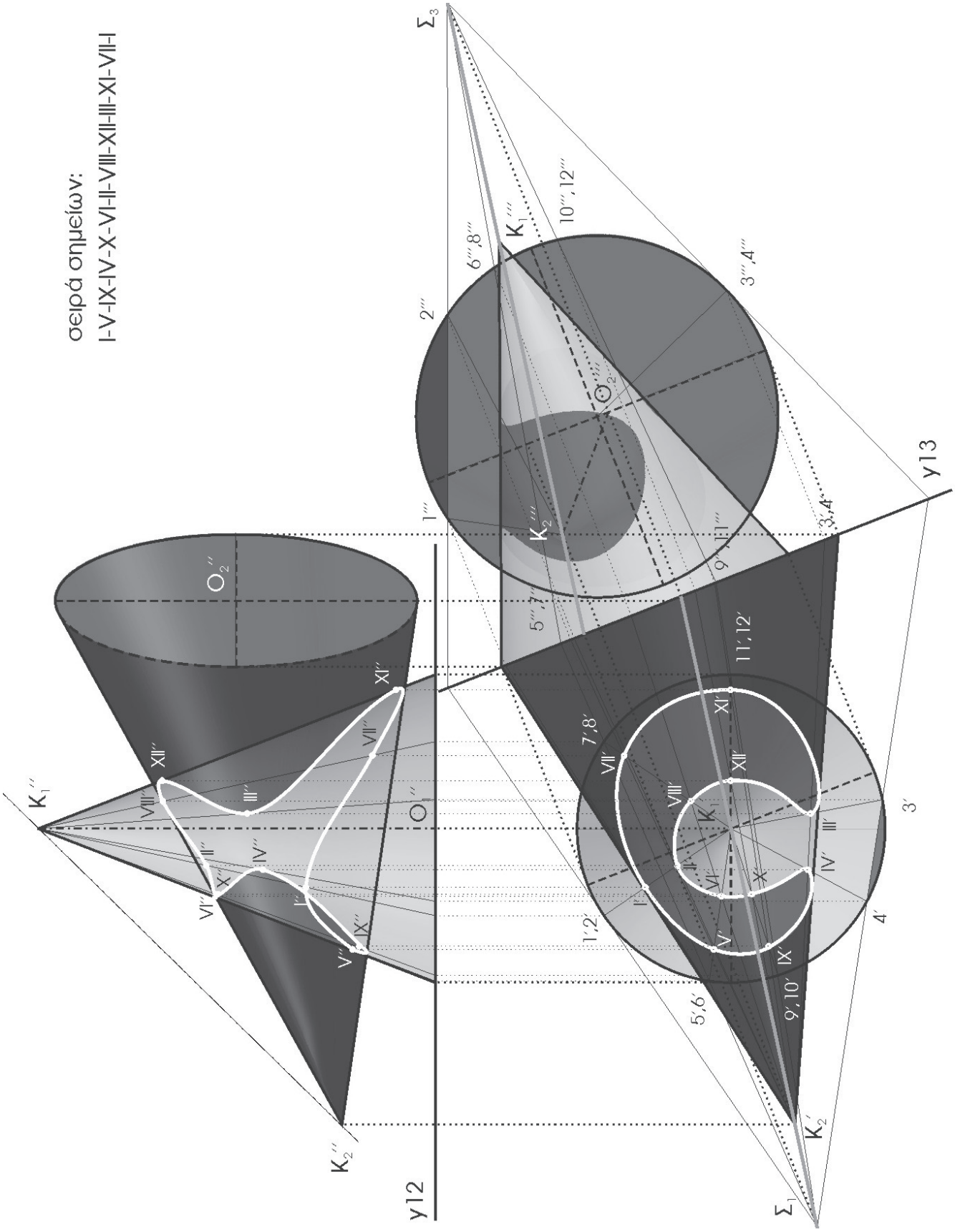


σχ. 165

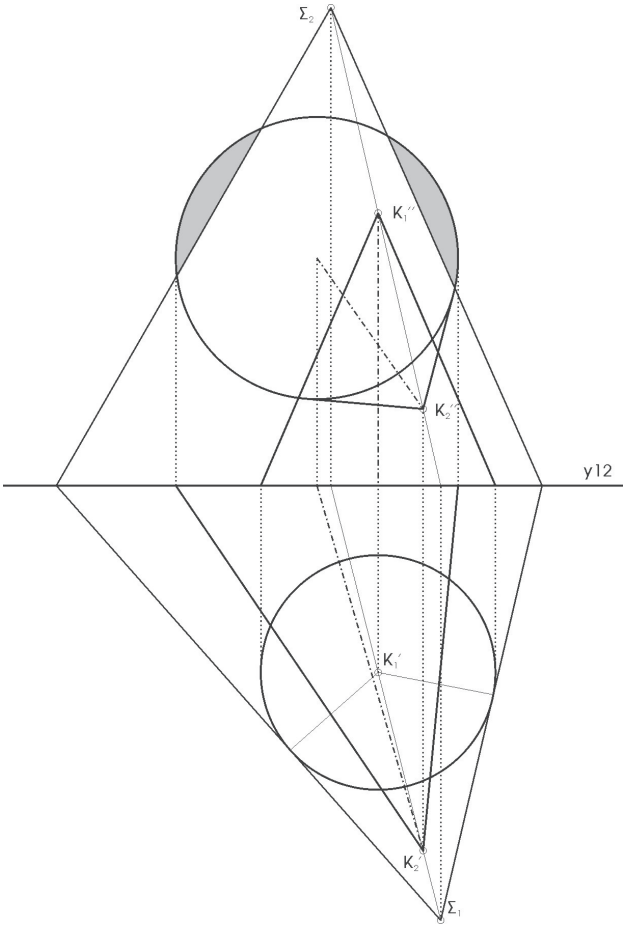
K_1K_2, την ευθεία δηλαδή που ενώνει τις κορυφές των κώνων, για να ορίσουμε ένα σύνολο βοηθητικών επιπέδων. Τα πρώτα βοηθητικά επίπεδα που ορίζουμε είναι τα *ορικά επίπεδα* της αλληλοτομίας των στερεών (σχ. 166). Από το ίχνος Σ_1 της K_1K_2 (σχ. 167) φέρνουμε το 1ο ίχνος του βοηθητικού ορικού επιπέδου έτσι, ώστε να εφάπτεται στη βάση του 1ου κώνου και ορίζουμε το διπλό σημείο (1′,2′) σε 1η προβολή. Το 3ο ίχνος του ίδιου ορικού επιπέδου ορίζει τα σημεία 1‴ και 2‴ στη βάση του 2ου κώνου (στην 3η προβολή) και διαγράφει *νεκρό τόξο* αλληλοτομίας στον 2ο κώνο. Όμοια, από το ίχνος Σ_3 της K_1K_2 φέρνουμε το 3ο ίχνος του 2ου ορικού επιπέδου τέτοιο, ώστε να είναι εφαπτόμενο στη



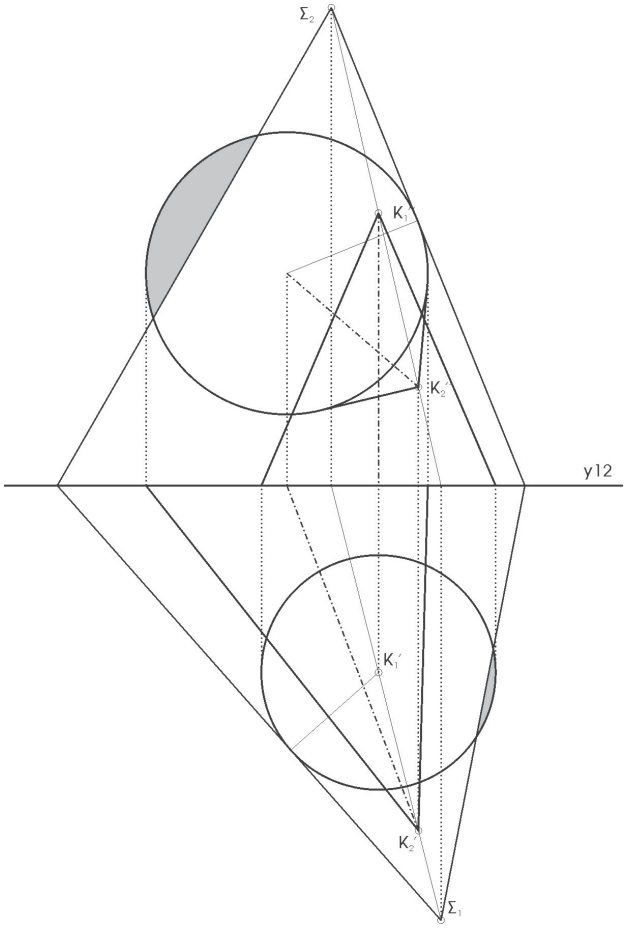
σχ. 166


σειρά σημείων:
I-V-IX-IV-X-VI-II-VIII-XII-III-XI-VII-I
K_1''
K_2''
O_2''
O''
K_1'''
K_2'''
O_2'''
K'
K_2'
Σ_3
Σ_1
y12
y13
1'''
2'''
3'''
4'
3',4'
1',2'
5',6'
7',8'
9',10'
11',12'
5''',7'''
6''',8'''
9''',11'''
10''',12'''
3''',4'''

σχ. 167



σχ. 168

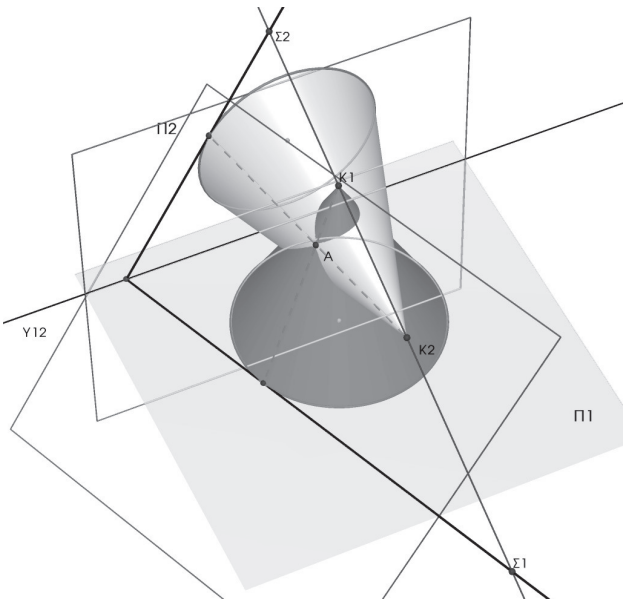


σχ. 169

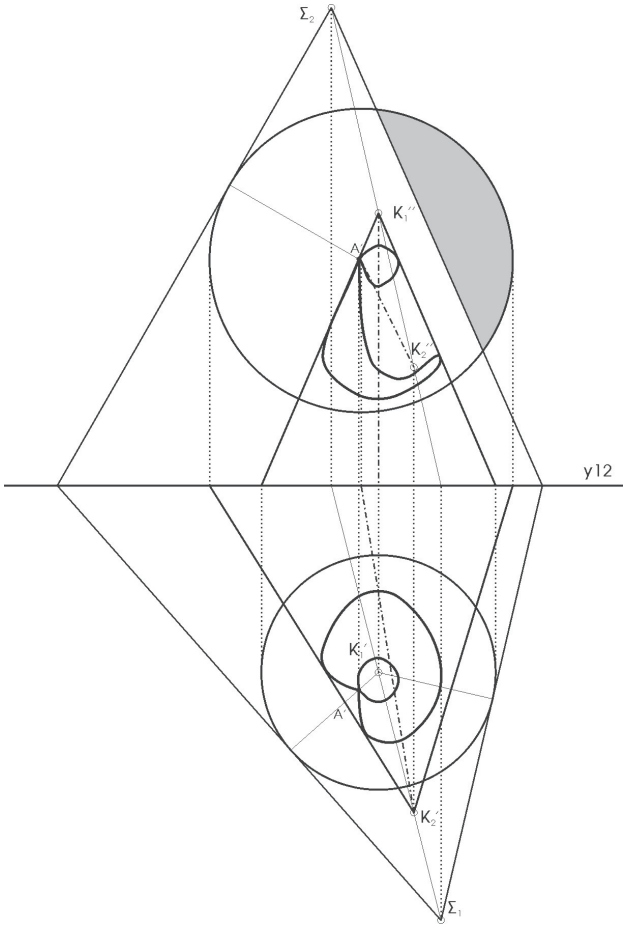
βάση του 2ου κώνου στο διπλό σημείο (3''',4''') στην 3η προβολή, ορίζουμε τα σημεία 3′ και 4′ στη βάση του πρώτου κώνου και προσδιορίζουμε άλλο ένα *νεκρό τόξο*, τη φορά αυτή στον 1ο κώνο. Καθένα από τα ενδιάμεσα βοηθητικά επίπεδα ορίζει από 2 σημεία σε καθεμία από τις βάσεις των κώνων. Για παράδειγμα ένα από τα βοηθητικά επίπεδα του σχήματος 167 ορίζει στον 1ο κώνο τα σημεία (5,6) και (7,8). Το *ίδιο* επίπεδο ορίζει στον 2ο κώνο τα σημεία (5,7) και (6,8). Έχουν χρησιμοποιηθεί σκόπιμα οι ίδιοι αριθμοί, αλλά με διαφορετική σειρά στους δύο κώνους, για να προκύψουν μονοσήμαντα τα σημεία της αλληλοτομίας τους. Δηλαδή από την τομή των γενετειρών K_1(5,6) και K_2(5,7) θα προκύψει το σημείο αλληλοτομίας V, κ.ο.κ.

Από εδώ και πέρα η διαδικασία προσδιορισμού της αλληλοτομίας των κώνων είναι ακριβώς ίδια μ' εκείνη της αλληλοτομίας πυραμίδων, όπως περιγράφηκε παραπάνω.

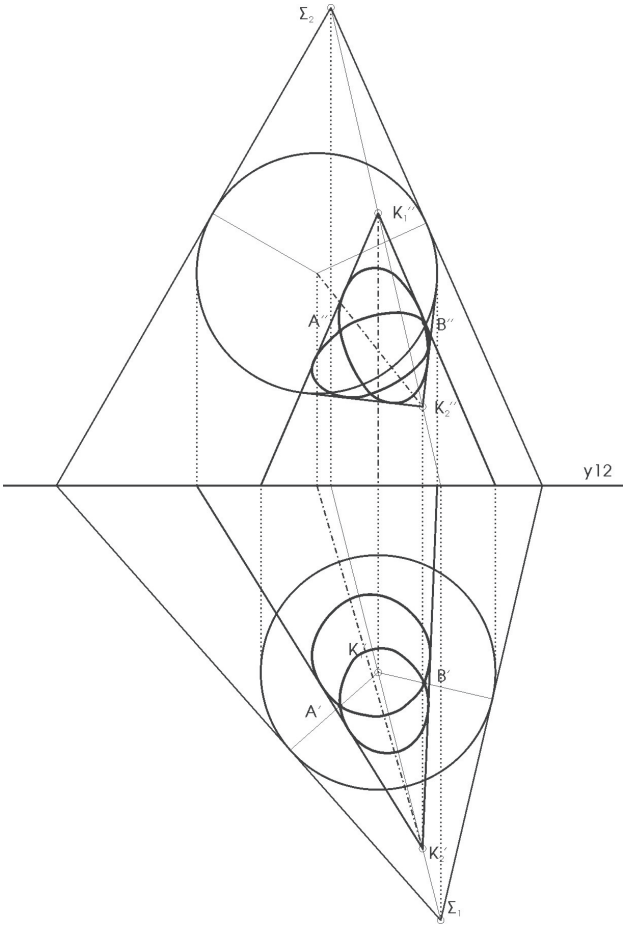
Στη γενική περίπτωση αλληλοτομίας κώνων εάν τα ορικά επίπεδα ορίζουν νεκρά τόξα στον ίδιο κώνο, η αλληλοτομία τους ονομάζεται *τομή κατά διείσδυση*



σχ. 170



σχ. 171

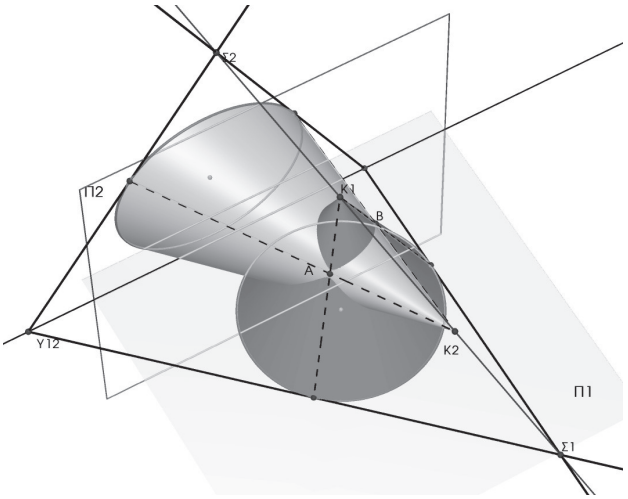


σχ. 172

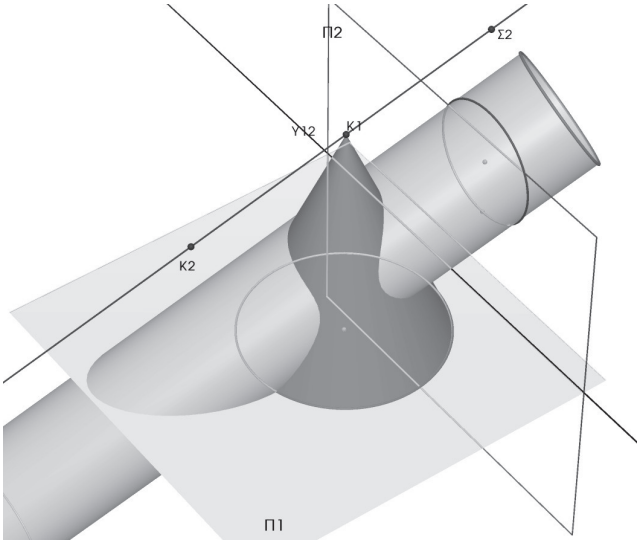
(σχ. 168). Εάν τα ορικά επίπεδα δημιουργούν από ένα νεκρό τόξο σε κάθε κώνο, η αλληλοτομία τους ονομάζεται *τομή κατά διάσπαση* (σχ. 169).

Εάν η μορφολογία και θέση των κώνων είναι τέτοια, που το ένα από τα δύο ορικά επίπεδα να εφάπτεται και στους δύο κώνους (σχ. 170), τότε η καμπύλη της αλληλοτομίας του παρουσιάζει ένα σημείο τομής A(A′,A″), που ονομάζεται *διπλό σημείο* (σχ. 171).

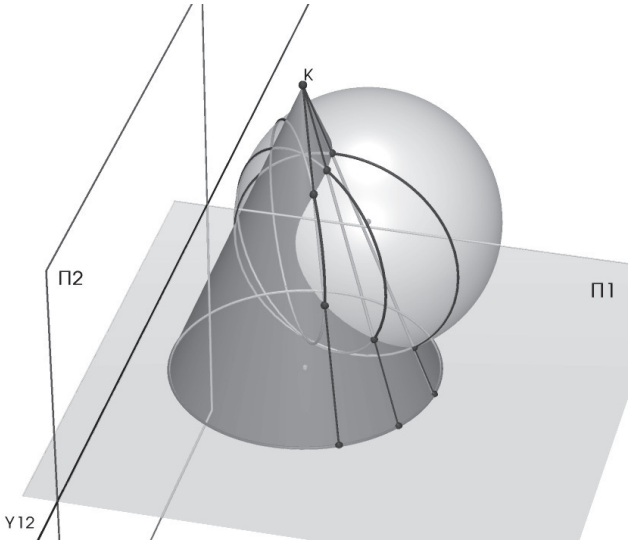
Εάν η μορφή και η θέση των κώνων είναι τέτοια, που και τα δύο ορικά επίπεδα να εφάπτονται και στους δύο κώνους (σχ. 172), τότε δεν υπάρχει νεκρό τόξο, εμφανίζονται δύο διπλά σημεία και η καμπύλη της αλληλοτομίας μετασχηματίζεται σε δύο καμπύλες 2ου βαθμού, δηλαδή επίπεδες καμπύλες (σχ. 173). Η σειρά που θα ενωθούν τα σημεία της αλληλοτομίας προκύπτει όταν για τη μία καμπύλη κινηθούμε με την ίδια φορά (έστω δεξιόστροφα) και στους δύο κύκλους βάσεων και για τη δεύτερη καμπύλη κινηθούμε με αντίστροφες φορές (δεξιόστροφα στον έναν και αριστερόστροφα στον άλλο) στους δύο κύκλους βάσεων.



σχ. 173



σχ. 174



σχ. 175

Αλληλοτομία κώνου και κυλίνδρου

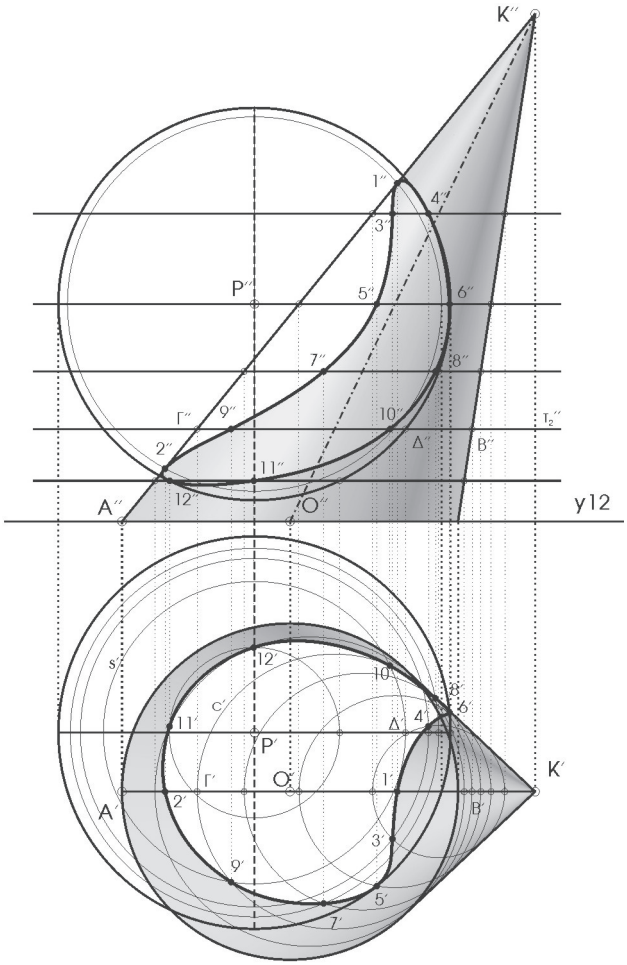
Ο κύλινδρος μπορεί να θεωρηθεί ως κώνος με κορυφή στο άπειρο. Με την έννοια αυτή η αλληλοτομία κώνου και κυλίνδρου δημιουργεί ίδιου τύπου καμπύλες αλληλοτομίας, όπως και η αλληλοτομία κώνων. Η μόνη διαφορά στη μεθοδολογία προσδιορισμού της καμπύλης αλληλοτομίας κώνου και κυλίνδρου, σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση, είναι ότι η ευθεία των κορυφών των στερεών διέρχεται από την κορυφή του κώνου και είναι παράλληλη στις γενέτειρες του κυλίνδρου (σχ. 174).

Αλληλοτομία κώνου και σφαίρας

Η παράσταση της καμπύλης αλληλοτομίας κώνου και σφαίρας μπορεί να προσδιοριστεί με δύο τρόπους.

Κατά τον πρώτο τρόπο προσδιορισμού της καμπύλης αλληλοτομίας κώνου και σφαίρας, θεωρούμε ότι τέμνουμε τη σφαίρα με ευθείες, που είναι οι γενέτειρες του κώνου (σχ. 175).

Κατά τον δεύτερο τρόπο -και μάλλον πιο απλό από σχεδιαστική άποψη- για τον προσδιορισμό της καμπύλης αλληλοτομίας των στερεών χρησιμοποιούμε βοηθητικά επίπεδα χαρακτηριστικής θέσης. Στο παράδειγμα του σχήματος 176 έχουν χρησιμοποιηθεί οριζόντια βοηθητικά επίπεδα. Αυτά τέμνουν τη μεν σφαίρα



σχ. 176

εικ. 177

σε οριζόντιους κύκλους, τον δε κώνο σε όμοιες μεταξύ τους κωνικές τομές[8].

Για παράδειγμα, για τον προσδιορισμό των σημείων αλληλοτομίας 9 και 10 χρησιμοποιήθηκε το οριζόντιο επίπεδο τομής Τ, με 2ο ίχνος το $τ_2''$ (σχ. 176). Το ίχνος $τ_2''$ τέμνει τον κώνο στα σημεία Β και Γ και ορίζει οριζόντιο κύκλο με διάμετρο ΒΓ(Β΄Γ΄,Β΄΄Γ΄΄) και τη σφαίρα στα σημεία Δ και Ε και ορίζει οριζόντιο κύκλο με διάμετρο ΔΕ(Δ΄Ε΄,Δ΄΄Ε΄΄). Στην 1η προβολή οι κύκλοι αυτοί είναι αντίστοιχα οι c΄ και s΄. Στην τομή των c΄ και s΄ ορίζονται τα σημεία 9΄ και 10΄, με 2ες προβολές 9΄΄ και 10΄΄ στο ίχνος $τ_2''$.

Αλληλοτομία κυλίνδρων

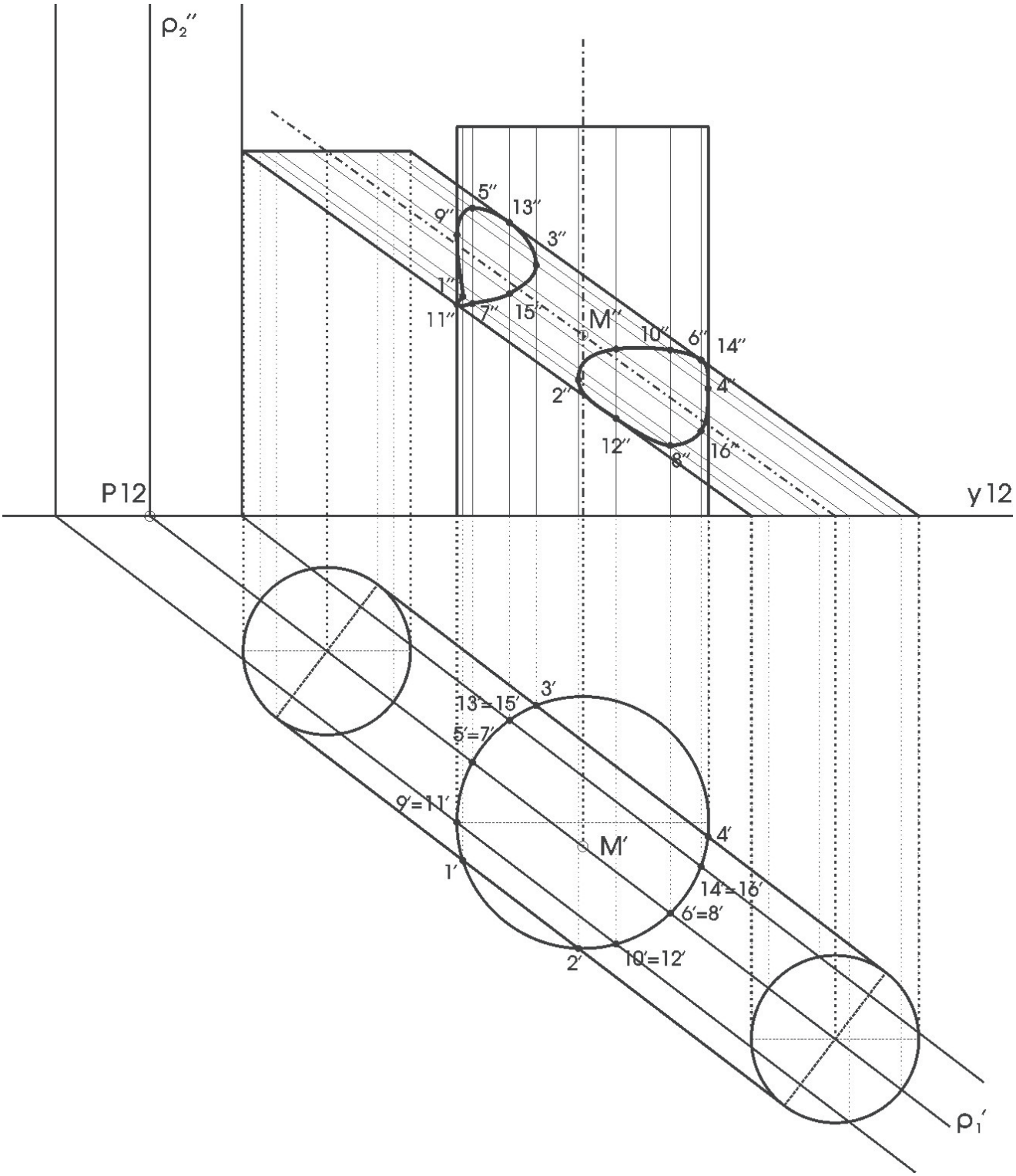
Αυτή η περίπτωση αλληλοτομίας επιφανειών είναι η πιο διαδεδομένη όσον αφορά την εφαρμογή της στις αρχιτεκτονικές κατασκευές[9], αλλά και σε πολλές ακόμη εφαρμογές –μηχανολογικές,

εικ. 178

8. Για τα σημεία αλληλοτομίας επί της ΚΑ χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος τομής σφαίρας με ευθεία
9. βλ. Θολωτές κατασκευές

ναυπηγικές, σε αντικείμενα καθημερινής χρήσης κλπ (εικ. 177, 178).

Στη γενική περίπτωση, για τον προσδιορισμό της καμπύλης αλληλοτομίας κυλίνδρων χρησιμοποιούμε σημεία αλληλοτομίας, που προσδιορίζονται με τη σειρά τους μέσω βοηθητικών επιπέδων. Εάν οι άξονες των κυλίνδρων είναι τεμνόμενες μεταξύ

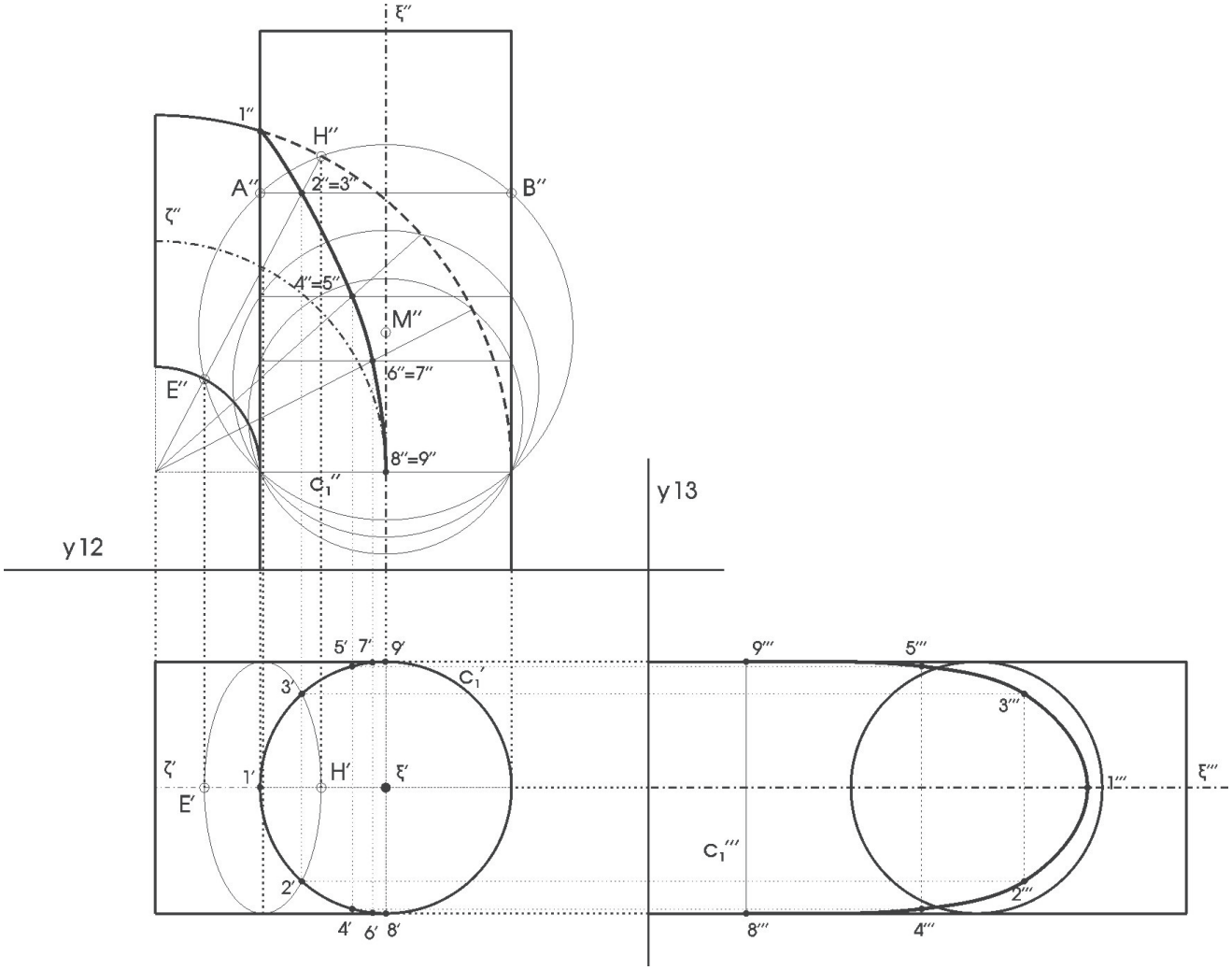


σχ. 179

τους ευθείες, χρησιμοποιούμε το βοηθητικό επίπεδο που ορίζουν. Εάν οι άξονες των κυλίνδρων είναι ασύμβατες μεταξύ τους ευθείες (σχ. 179), σχηματίζουμε το επίπεδο $P(\rho_1', \rho_2'')$ που περιέχει τον έναν από τους δύο άξονες και είναι παράλληλο στον άλλο άξονα. Το επίπεδο P τέμνει και τους δύο κυλίνδρους κατά γενέτειρες, στις τομές των οποίων βρίσκονται τα σημεία αλληλοτομίας των επιφανειών. Χρησιμοποιώντας παράλληλα προς το P επίπεδα, προσδιορίζουμε περισσότερα σημεία αλληλοτομίας, τα οποία ενώνουμε με ελεύθερη καμπύλη στις δύο προβολές.

Αλληλοτομία κυλίνδρου και σπείρας

Οι αλληλοτομίες σπειρών μεταξύ τους, όπως και οι αλληλοτομίες σπειρών με άλλα εκ περιστροφής στερεά, χρησιμοποιούνται πάρα πολύ συχνά σε αντικείμενα καθημερινής χρήσης, με πολλούς συνδυασμούς. Στις σημειώσεις αυτές δεν θα

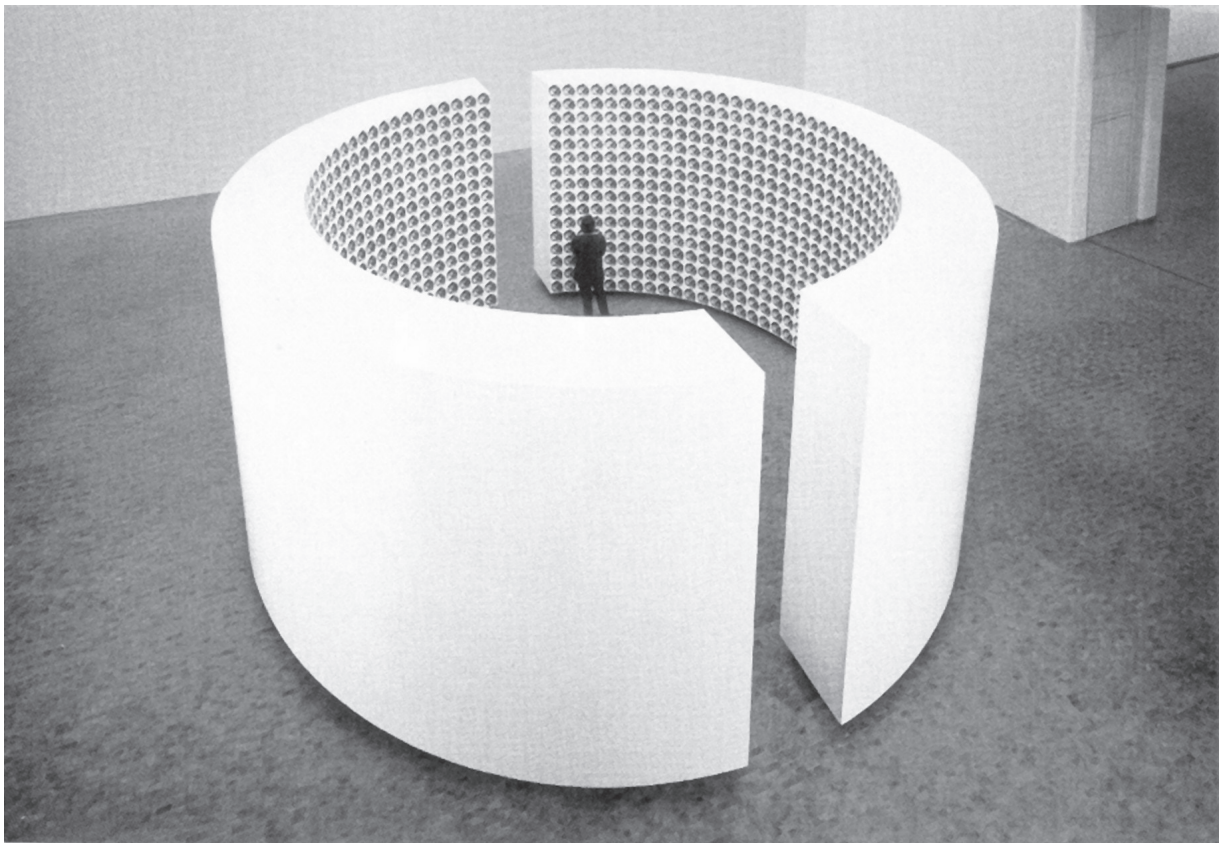


σχ. 180

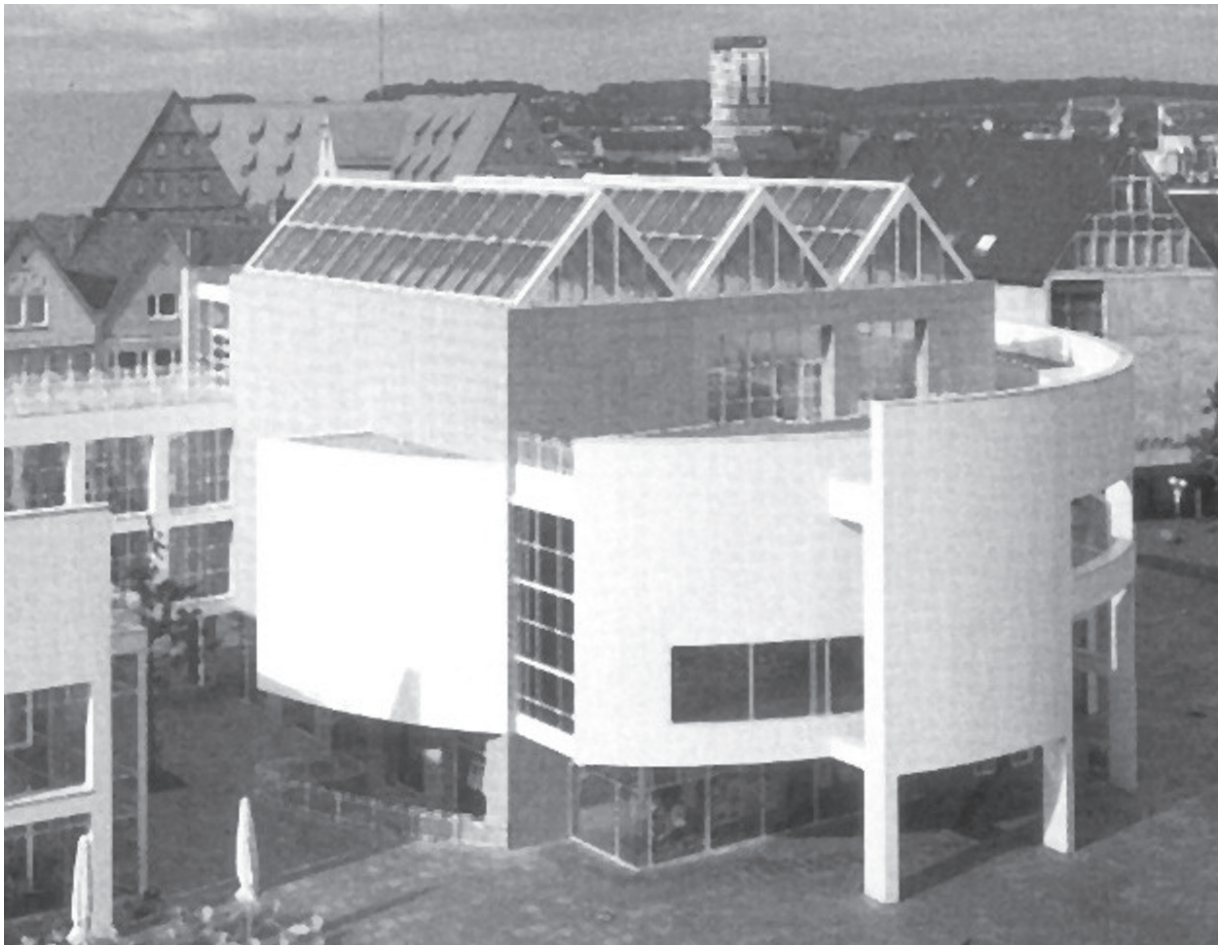
επεκταθούμε, θα παρουσιάσουμε μόνο ένα παράδειγμα, ως ένδειξη της μεθοδολογίας παράστασης αλληλοτομίας σπείρας και κυλίνδρου.

Στο σχήμα 180 έχουν παρασταθεί ορθός κύλινδρος με βάση στο επίπεδο $Π_1$ και μια σπείρα με γενέτειρα κύκλο ίσο με τον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου. Για τον προσδιορισμό της καμπύλης αλληλοτομίας των δύο στερεών χρησιμοποιούμε βοηθητικές σφαίρες, που περιέχουν τον κοινό κύκλο $c_1(c_1', c_1'')$ των στερεών. Με κέντρα διάφορα σημεία Μ του άξονα ξ του κυλίνδρου χαράσσουμε κύκλους (που απεικονίζουν στο χώρο σφαίρες). Η αλληλοτομία των βοηθητικών σφαιρών με τον κύλινδρο δημιουργεί τους κύκλους ΑΒ και με τη σπείρα τους κύκλους ΕΗ. Οι τομές των κύκλων ΑΒ και ΕΗ δημιουργούν σημεία της αλληλοτομίας του κυλίνδρου με τη σπείρα. Η καμπύλη αλληλοτομίας είναι 4ου βαθμού, αλλά στην 3η προβολή της παριστάνεται ως παραβολή.

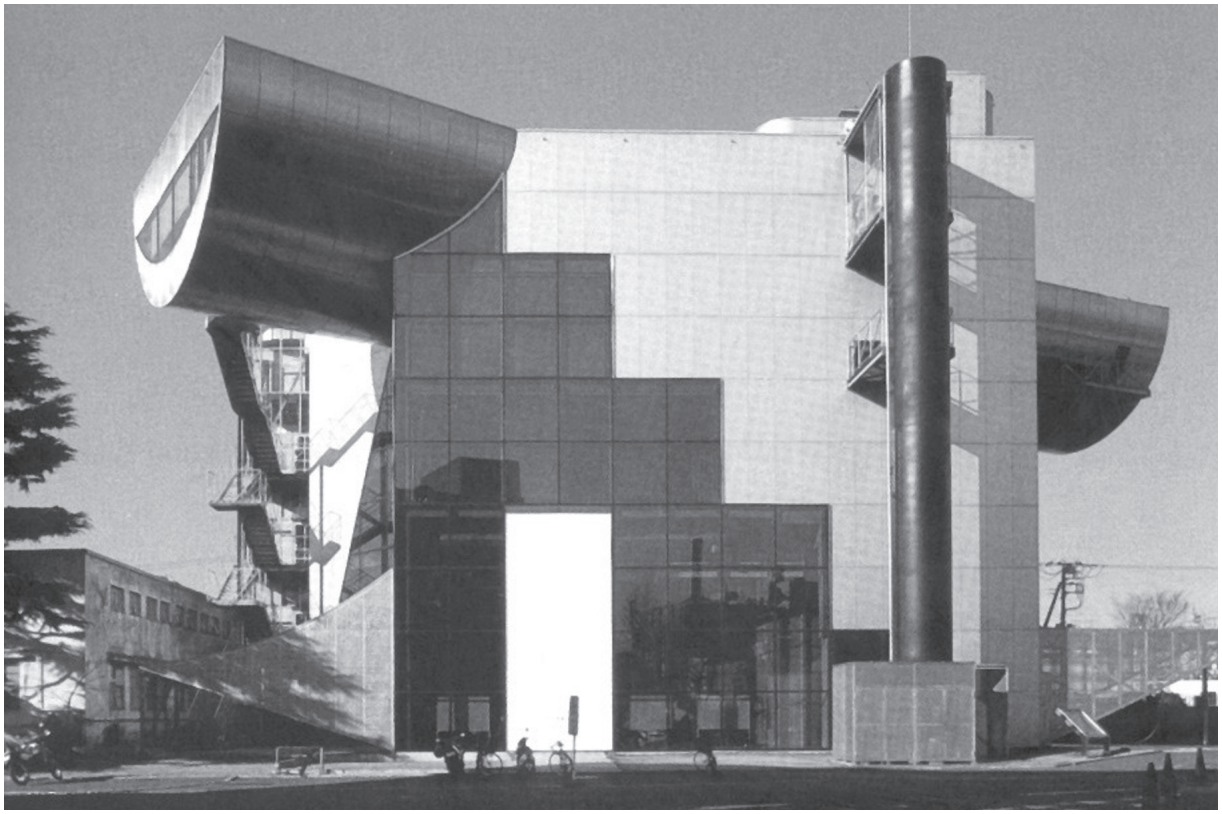
Ένας άλλος τρόπος προσδιορισμού της καμπύλης αλληλοτομίας των στερεών είναι με τη χρήση βοηθητικών επιπέδων, παραλλήλων στην ισημερινή περιφέρεια της σπείρας.



εικ. 181 Jean-Pierre Raynaud, *Human space*, Μουσείο Ludwig, Γερμανία, 1995



εικ. 182 Richard Meier, *Εκθεσιακό κέντρο*, Ulm, Γερμανία, 1993



εικ. 183 Kazuo Shinohara, *Ινστιτούτο τεχνολογίας - Centennial Hall*, Tokyo, Ιαπωνία, 1987