

ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

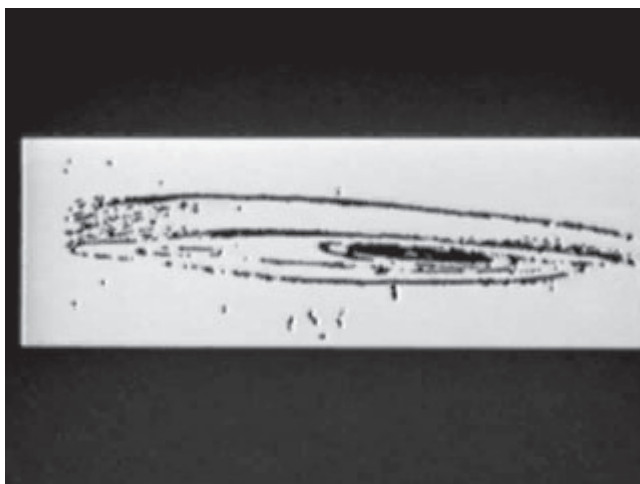
Ιστορικά

Στις αρχές του 16^{ου} αιώνα ήταν ήδη γνωστές οι αρχές της γραμμικής προοπτικής, περίπου όπως την ξέρουμε σήμερα. Την περίοδο αυτή καλλιτέχνες, γλύπτες και αρχιτέκτονες άρχισαν να πειραματίζονται με έντεχνες προοπτικές απεικονίσεις, αλλά έντονα αλλοιωμένες, παρασύροντας και εξαπατώντας την οπτική αντίληψη του θεατή. Οι εικόνες που προέκυπταν, ονομάστηκαν αναμορφωτικές εικόνες (anamorphoses) και είτε είχαν χαρακτήρα πνευματικών αλληγοριών ή πολιτικών μηνυμάτων.

Η πρώτη γνωστή προσέγγιση στο θέμα των αναμορφώσεων είναι του Piero della Francesca, αναφέρεται στη μελέτη του «De Prospetiva Pingendi» (1482) για το έργο «Η Παρθένος με το Βρέφος, Αγίους και Αγγέλους» (1474) (εικ. 1) και αναφέρεται στην αναμόρφωση του ελλειψοειδούς που αιωρείται πάνω από το κεφάλι της κεντρικής μορφής της Παρθένου. Θα περίμενε κανείς ότι ο καλλιτέχνης θα επέλεγε μια τέλεια σφαίρα -αντί για το ωοειδές- για λόγους ίσως συμβολικούς. Εάν μετακινήσουμε το σημείο οράσεως του παρατηρητή κοντύτερα στο έργο, διατηρώντας το ύψος και κρατώντας το ωοειδές μέσα στο οπτικό πεδίο του παρατηρητή, παρατηρούμε ότι το ωοειδές μετασχηματίζεται σε τέλεια σφαίρα. Μια προσπάθεια πιο έντονης αναμόρφωσης έκανε την ίδια εποχή και ο Leonardo da Vinci σ' ένα σκίτσο του, «το μάτι του Leonardo» (1485) (εικ. 2,3). Πολύ πιο χαρακτηριστικό, γνωστό κι αντιπροσωπευτικό για τις αναμορφώσεις είναι το έργο «οι Πρεσβευτές» του Hans Holbein (1533) (εικ. 4), με τον «παράδοξο» σχηματισμό στη βάση του πίνακα, ανάμεσα στις



εικ. 1 Piero della Francesca, *Η Παρθένος με το Βρέφος, Αγίους και Αγγέλους* 1474



εικ. 2



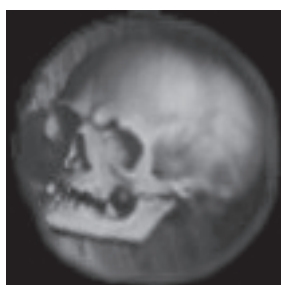
εικ. 3 «Το μάτι του Leonardo», αν παρατηρηθεί από την κατάλληλη οπτική γωνία



εικ. 5



εικ. 4 Hans Holbein, *οι Πρεσβευτές*, 1533



εικ. 6

φιγούρες των πρεσβευτών. Εάν παρατηρήσουμε τον πίνακα από την κατάλληλη οπτική γωνία (επάνω και δεξιά) (εικ. 5), παρατηρούμε ότι ο «παράδοξος» σχηματισμός είναι μια νεκροκεφαλή (εικ. 6).

Μια ακόμη από τις πιο σημαντικές αναμορφώσεις είναι εκείνη του Andrea Pozzo, στην οροφή του St. Ignazio, στη Ρώμη (1678), που σχεδιάστηκε για να «προσθέσει» εσωτερικό ύψος στην εκκλησία (εικ. 7,8).

Από τότε μέχρι σήμερα οι αναμορφώσεις έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλούς καλλιτέχνες, με πολύ ενδιαφέροντα παραδείγματα (εικ. 9,10). Χρησιμοποιούνται επίσης στη σήμανση των οδοστρωμάτων (εικ. 11,12), με σκοπό τη διευκόλυνση των οδηγών και πολύ συχνότερα στη σκηνογραφία (Teatro Olimpico). Στην αρχιτεκτονική οι αναμορφώσεις έχουν χρησιμοποιηθεί τόσο για να «διασκεδάσουν» το χώρο, όσο και για να «εξαπατήσουν» τον παρατηρητή (στοά Borromini).



εικ. 7 Andrea Pozzo, η οροφή του St. Ignazio, Ρώμη



εικ. 8 A. Pozzo, η οροφή του St. Ignazio, από «λάθος» σημείο οράσεως



εικ. 9 Julian Beever, *Swim*



εικ. 10 Julian Beever, *Swim*, από «λάθος» σημείο οράσεως



εικ. 11 Η παραμόρφωση των σημάτων στο οδόστρωμα διευκολύνει την ανάγνωση από τη θέση του οδηγού



εικ. 12

Υπάρχουν δύο κύρια είδη αναμόρφωσης:

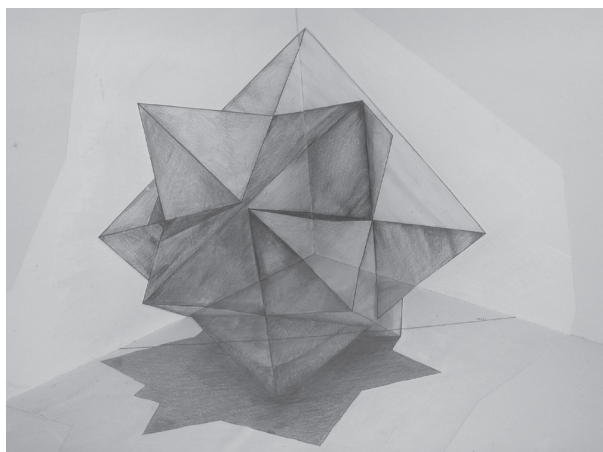
1. Προοπτική αναμόρφωση σε πολλαπλά επίπεδα
2. Κατοπτρική αναμόρφωση, με χρήση κατόπτρων διαφόρων στερεών σχημάτων ή θέσεων επιπέδων κατόπτρων

Στις αναμορφώσεις είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι επικρατούν κάποιες αρχές:

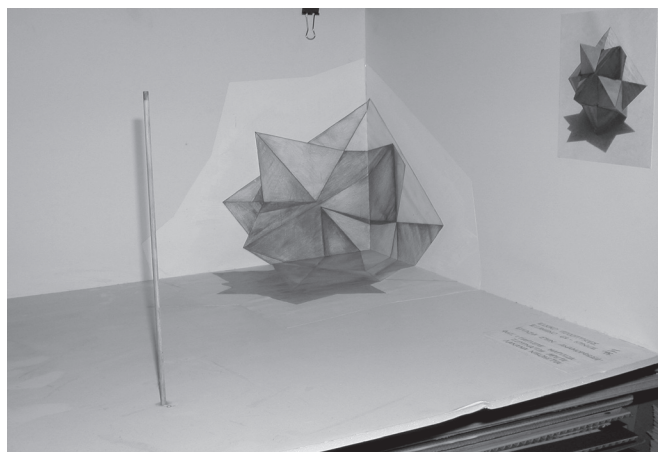
- Το σημείο οράσεως είναι μοναδικό. Εάν η θέση του σημείου οράσεως (παρατηρητή) μεταβληθεί, το οπτικό αποτέλεσμα είναι εσφαλμένο
- Ο πίνακας της αναμορφωτικής εικόνας είναι κατακόρυφος και κάθετος στην κεντρική οπτική ακτίνα του παρατηρητή

Αναμόρφωση σε πολλαπλά επίπεδα

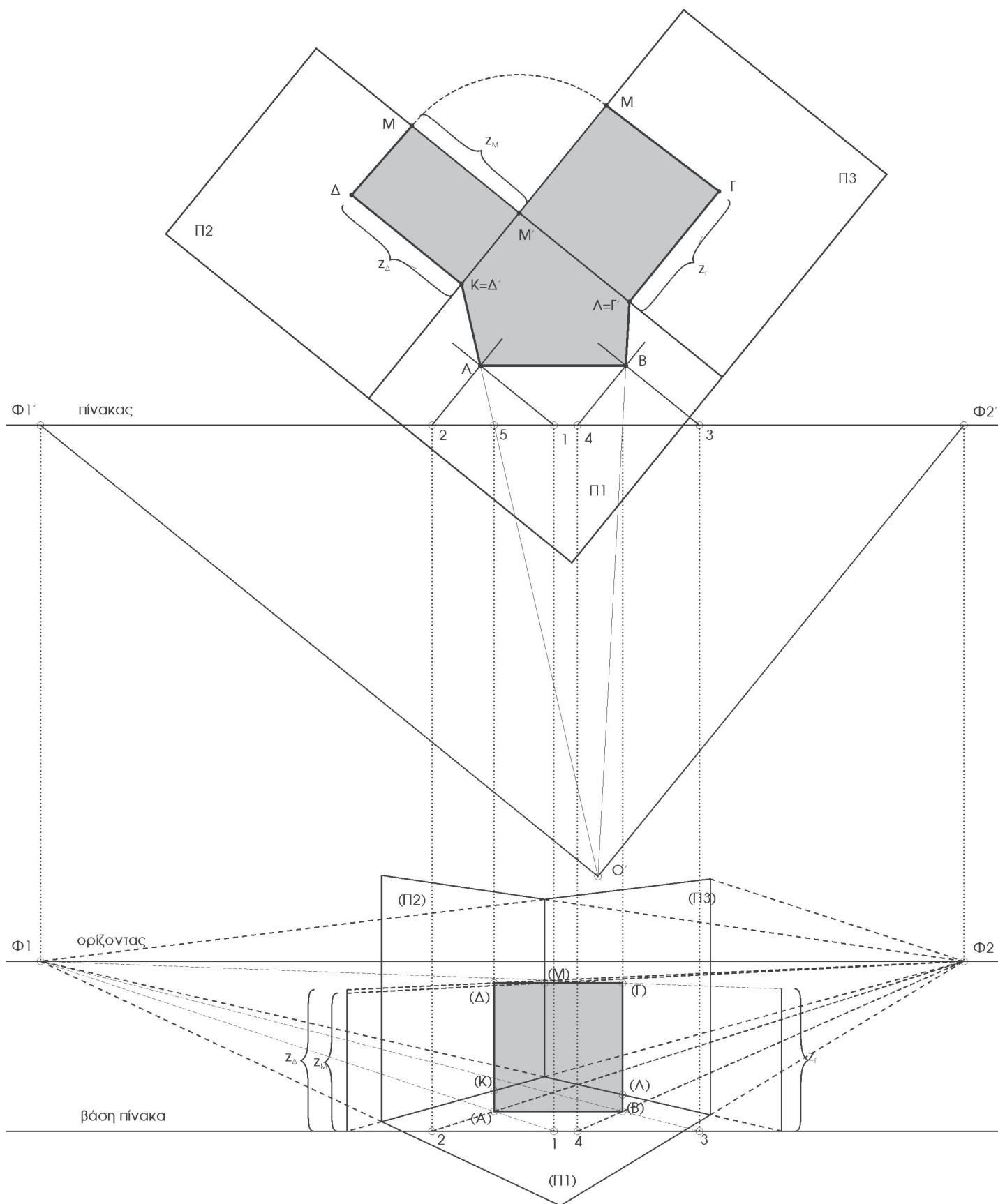
Η κατασκευή είναι μια σχετικά απλή διαδικασία, που ακολουθεί τα ίδια βήματα της προοπτικής απεικόνισης, αλλά ανάστροφα (εικ. 13,14). Τα πρώτα πράγματα που επιλέγει κανείς για τη δημιουργία αναμορφωτικής εικόνας είναι ο χώρος (σε προοπτική απεικόνιση) της αναμόρφωσης και η εικόνα (σε ορθή προβολή) που θα τοποθετηθεί στις έδρες του χώρου.



εικ. 13 Επίπεδη τριέδρη αναμόρφωση (σπουδαστική εργασία ΕΜΓ)



εικ. 14



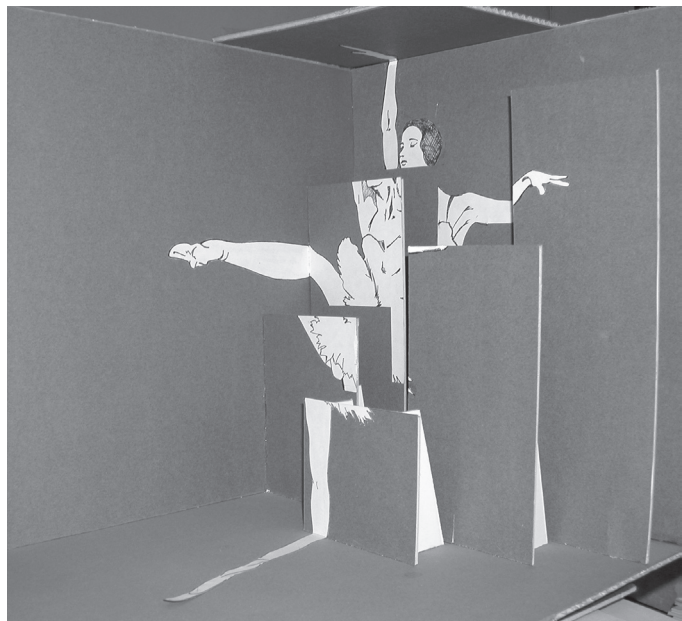
Στο παράδειγμα του σχήματος 15 θα τοποθετήσουμε σχεδιαστικά το τετράγωνο ΑΒΓΔ στις τρεις εσωτερικές έδρες ενός χώρου. Σχηματίζουμε την προοπτική εικόνα του χώρου, ορίζοντας το μοναδικό σημείο οράσεως Ο'. Για ν' αποκτήσουμε στο τέλος μια ολοκληρωμένη εικόνα των σχημάτων που θα πρέπει να σχεδιαστούν στις έδρες του χώρου, είναι καλό ν' απεικονίσουμε όχι μόνο την οριζόντια προβολή (κάτοψη) του χώρου που υποδέχεται την αναμόρφωση, αλλά όλες τις έδρες αναφοράς, κάνοντας -όπου χρειάζεται- κατάκλιση. Στην προοπτική εικόνα τοποθετούμε στην κατάλληλη θέση το τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως θέλουμε τελικά να το δούμε. Τώρα θεωρούμε ότι τα σημεία (Α), (Β), (Γ), (Δ), αλλά και τα (Κ), (Λ) και (Μ) είναι πραγματικά σημεία των εδρών του χώρου. Έτσι, για να ορίσουμε την πραγματική θέση του σημείου (Α) στο χώρο, σχηματίζουμε τις προοπτικές εικόνες των καθέτων φορέων του (Α), δηλαδή ενώνουμε το (Α) με τα Φ1 και Φ2, προεκτείνουμε τις ευθείες έως ότου τμήσουν τη βάση του πίνακα στα σημεία 1 και 2 αντίστοιχα, μεταφέρουμε τα σημεία 1 και 2 στη γραμμή του πίνακα και από μεν το σημείο 1 φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ο'Φ1', από δε το σημείο 2 φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ο'Φ2'. Στην τομή των τελευταίων ευθειών βρίσκεται το σημείο Α στην πραγματική του θέση στο χώρο.

Η πραγματική θέση στο χώρο του σημείου (Δ) είναι στην αριστερή κατακόρυφη επιφάνεια και για να οριστεί, θα χρησιμοποιηθεί η κατακόρυφη από το σημείο (Δ), που ορίζει την προβολή του Δ στο οριζόντιο επίπεδο (στην κάτοψη). Αρκεί λοιπόν να οριστεί η πραγματική θέση του σημείου (Κ). Επειδή το σημείο Κ βρίσκεται στην ακμή των εδρών του χώρου, ο φορέας του είναι γνωστός, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οπτική ακτίνα για τον ορισμό του Κ στον πραγματικό χώρο. Έτσι, από το σημείο (Κ) φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη, μέχρι να τμήσει τον πίνακα στο σημείο 5. Σχηματίζουμε την οπτική ακτίνα Ο'5 και προεκτείνουμε μέχρι να τμηθεί η ακμή των εδρών Π1 και Π2, στο σημείο Κ. Κατόπιν φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη στο χώρο, δηλαδή κάθετη στην ακμή των Π1 και Π2. Στην ευθεία αυτή θα ορίσουμε το πραγματικό υψόμετρο του Δ. Επιστρέφουμε στην προοπτική εικόνα του χώρου και ενώνουμε το (Δ) με το Φ2, για να προσδιορίσουμε το υψόμετρό του. Το σχήμα ΑΒΛΓΜΔΚ είναι αυτό που πρέπει να σχεδιαστεί τελικά στις έδρες Π1, Π2 και Π3, ώστε να δούμε ένα τετράγωνο από το σημείο οράσεως Ο'.

Η αναμόρφωση σε πολλαπλά επίπεδα έχει χρησιμοποιηθεί με πολύ ενδιαφέρουσες κατασκευές, που εκτείνονται σε σχήματα του χώρου, όπως στα παραδείγματα των εικόνων 16-21. Η αναμόρφωση πραγματοποιείται με δύο τρόπους: είτε αν παρατηρήσουμε τα επίπεδα από την κατάλληλη θέση, είτε αν στη θέση του σημείου οράσεως τοποθετήσουμε



εικ. 16 Αναμόρφωση σε παράλληλα επίπεδα
(σπουδαστική εργασία ΕΜΠ)



εικ. 17



εικ. 18



εικ. 19



εικ. 20



εικ. 21 Η αναμόρφωση αφορά το ίδιο το αντικείμενο

φωτεινή πηγή, που παράγει τη σκιά της αναμόρφωσης *στερεού σχηματισμού* σε κατακόρυφο πίνακα πίσω από τα επίπεδα της αναμόρφωσης (εικ. 22,23).

Με τον όρο «πολλαπλές επιφάνειες», θα μπορούσε να χαρακτηριστεί και το «άθροισμα» των επιφανειών ενός εκ περιστροφής στερεού σχήματος, όπως ο κώνος. Τα στερεά σχήματα που «προσφέρονται» για ν' αναλάβουν αναμορφώσεις είναι ο κώνος, ο κύλινδρος, η πυραμίδα κλπ.

Στο παράδειγμα του σχήματος 24 στην επιφάνεια του κώνου που παριστάνεται με ορθές προβολές (κατά Monge), θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα σχήμα, ώστε αν κοιτάξουμε την

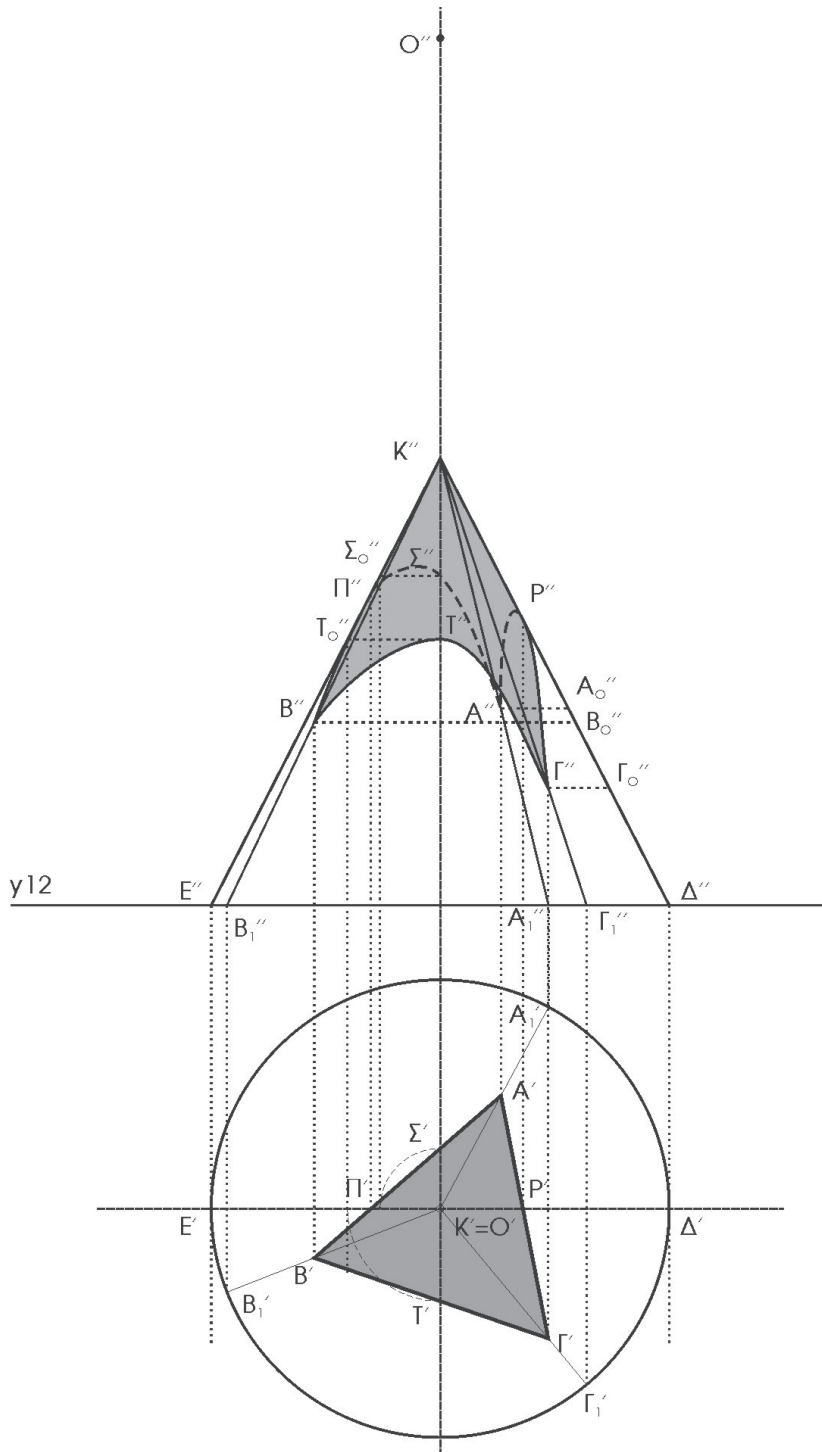


εικ. 22



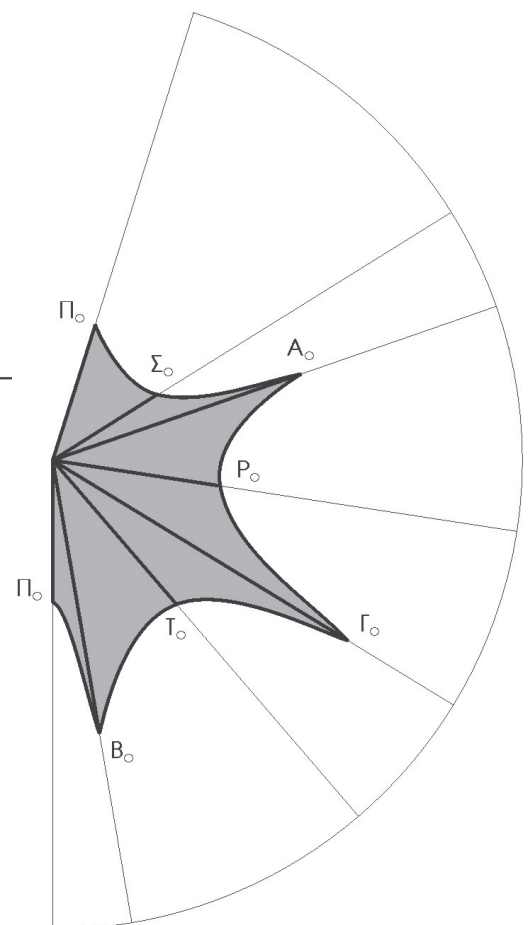
εικ. 23

επιφάνεια του κώνου από το σημείο $O(O', O'')$, να εμφανιστεί το ισόπλευρο τρίγωνο $A'B'T'$. Προσδιορίζουμε τη 2^η προβολή του τριγώνου, χρησιμοποιώντας τα βοηθητικά σημεία Π , P , Σ και T . Κατόπιν προσδιορίζουμε το ανάπτυγμα του κώνου¹ (σχ. 25).

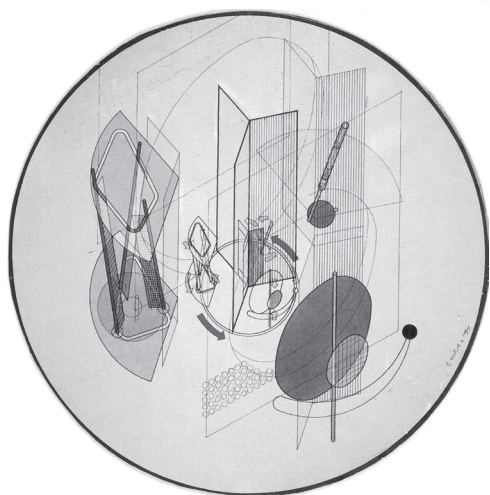
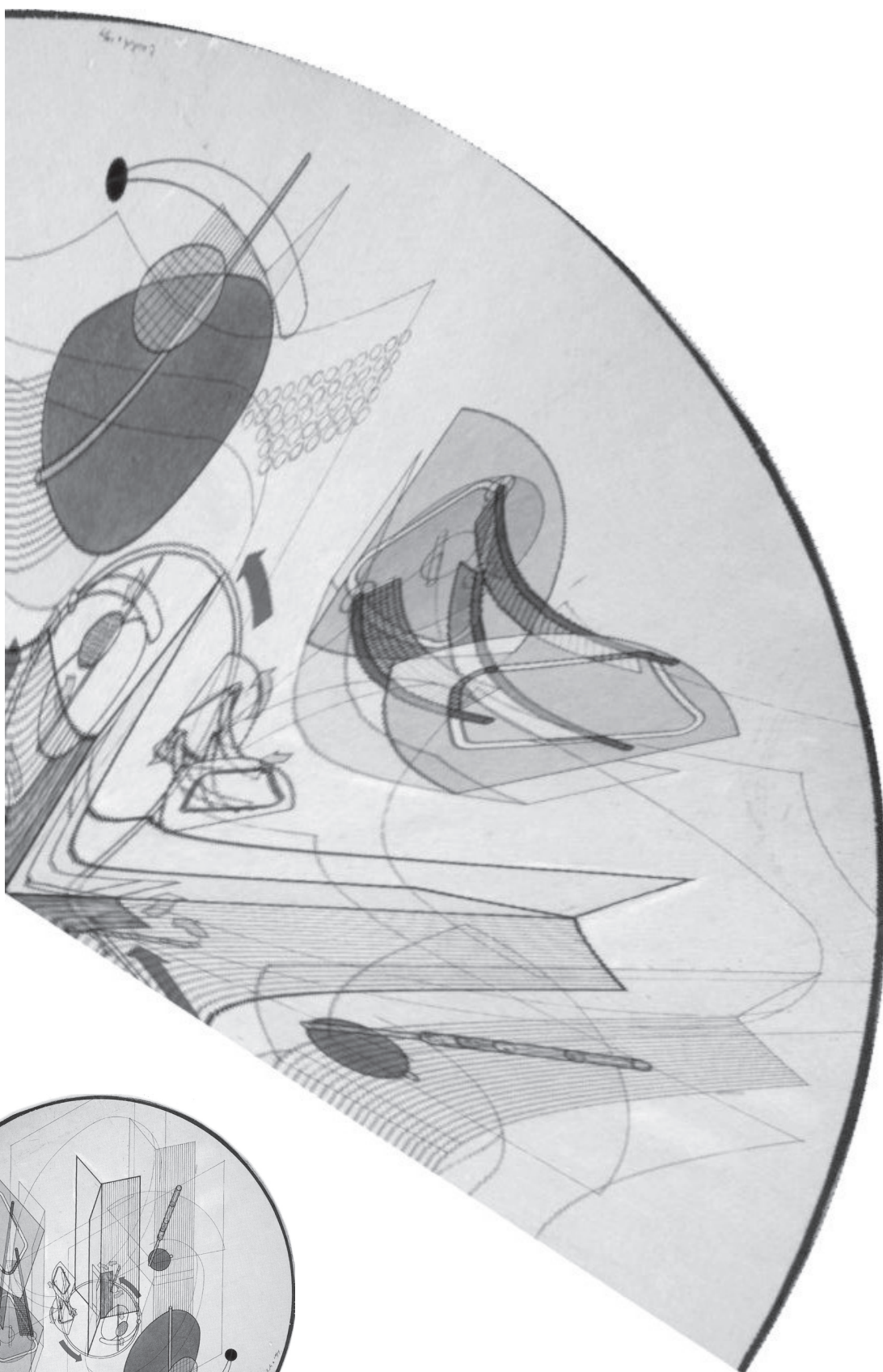


σχ. 24

1. βλ. Παραστατική γεωμετρία



σχ. 25



εικ. 26 Αναμόρφωση σε ορθό κώνο του έργου *The mechanics of the light-requisite*

εικ. 27 László Moholy-Nagy, *The mechanics of the light-requisite*, 1930



εικ. 28 Αναμόρφωση σε τετραγωνική πυραμίδα του έργου
Violet

εικ. 29 Vassily Kandinsky, *Violet*, 1923



Κατοπτρική αναμόρφωση

Η μέθοδος αυτή είναι μεταγενέστερη της αναμόρφωσης σε πολλαπλά επίπεδα (ξεκίνησε περίπου τον 16^ο αιώνα), αλλά χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα, όχι μόνο για καλλιτεχνικούς σκοπούς, αλλά πολύ περισσότερο για μεταφορά μηνυμάτων, μια και –όπως θα δούμε στη συνέχεια– αποστολέας και παραλήπτης έπρεπε να χρησιμοποιήσουν το ίδιο ακριβώς κάτοπτρο για να αποκωδικοποιήσουν το μήνυμα (εικ. 30).

Τα σχήματα των κατόπτρων που χρησιμοποιούνται στις κατοπτρικές αναμορφώσεις είναι πολλά και διαφορετικά, αλλά αυτά που έχουν επικρατήσει είναι τα επίπεδα κάτοπτρα σε διάφορες θέσεις και κατευθύνσεις, όπως η πυραμίδα (εικ. 31) και τα ορθά κωνικά και κυλινδρικά κάτοπτρα.

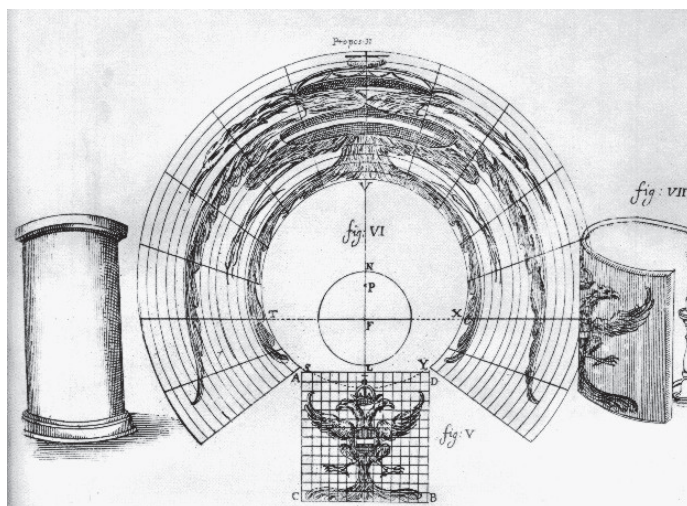
Στις κατοπτρικές αναμορφώσεις εφαρμόζεται η αρχή των κατόπτρων, κατά την οποία η γωνία πρόσπτωσης στην επιφάνεια ανάκλασης της οπτικής/φωτεινής ακτίνας είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Γωνία πρόσπτωσης: Η γωνία ω που σχηματίζει η οπτική/φωτεινή ακτίνα με την κάθετη στην επιφάνεια ευθεία, στο σημείο τομής της ακτίνας με την επιφάνεια.

Γωνία ανάκλασης: Η γωνία ϕ που σχηματίζει η οπτική/φωτεινή ακτίνα, αφού ανακλαστεί, με την κάθετη στην επιφάνεια ευθεία στο σημείο τομής της ακτίνας με την επιφάνεια (σχ. 32).

Επίπεδα κάτοπτρα

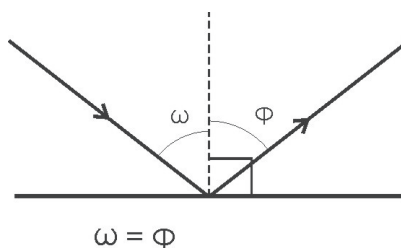
Μ' αυτή τη μέθοδο έχουμε τη δυνατότητα να «σπάσουμε» μια εικόνα σε τμήματα και να την ανασυνθέσουμε, χρησιμοποιώντας επίπεδα κάτοπτρα. Η παρατήρηση του οπτικού τεχνάσματος γίνεται από ένα και μοναδικό σημείο οράσεως, σαφώς ορισμένο. Εάν η θέση του παρατηρητή (σημείου οράσεως) μεταβληθεί, το οπτικό αποτέλεσμα είναι εσφαλμένο.



εικ. 30



εικ. 31 István Orosz, *Theseus*. Στο κέντρο του λαβυρίνθου έχει τοποθετηθεί κατοπτρική πυραμίδα για την αναμόρφωση του «Θησέα». Η περιοχή του λαβυρίνθου δεν συμμετέχει ολόκληρη στην αναμόρφωση (βρίσκεται εκτός της περιοχής του αντικατοπτρισμού)

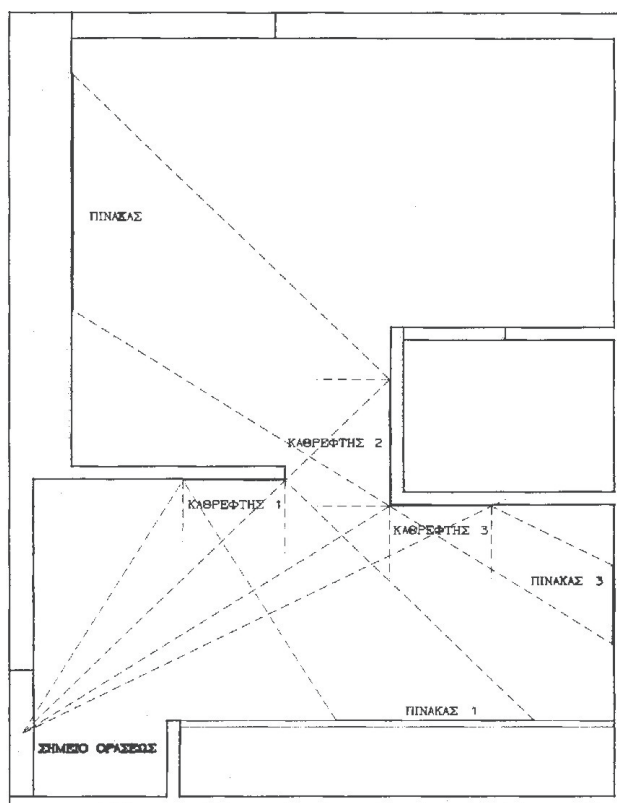


σχ. 32

Αφότου οριστεί το σημείο οράσεως και επιλεγεί το θέμα (ο πίνακας) που θέλουμε ν' απεικονίσουμε, ορίζουμε μέσα στο χώρο που διαθέτουμε τις θέσεις των κατόπτρων και τις θέσεις των τμημάτων της εικόνας που θέλουμε να απεικονίσουμε, που εδώ θα ονομάσουμε πινακίδες (σχ. 33).

Υπάρχουν μερικά στοιχεία που ζητούν προσοχή κατά την τοποθέτηση των κατόπτρων και των πινακίδων:

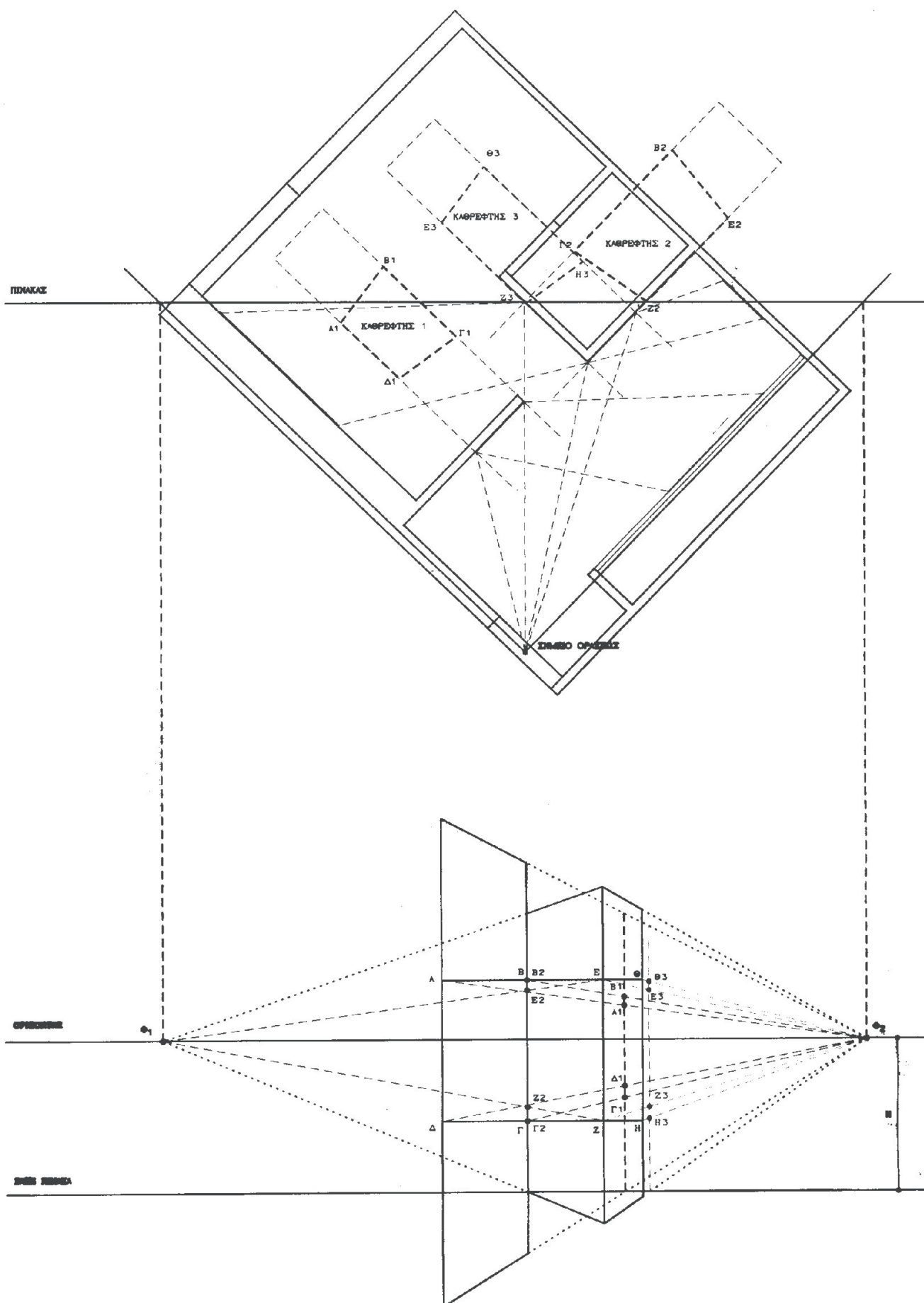
- Το σημείο οράσεως θα πρέπει να βρίσκεται σε πλάγια θέση σε σχέση με τα κάτοπτρα. Στην αντίθετη περίπτωση είτε η πινακίδα πρέπει να τοποθετηθεί ανάμεσα στον καθρέφτη και τον παρατηρητή, οπότε τότε ο παρατηρητής δεν βλέπει το είδωλο της πινακίδας πάνω στον καθρέφτη, είτε ο παρατηρητής να βρεθεί ανάμεσα στον καθρέφτη και την πινακίδα, οπότε τότε το είδωλο του παρατηρητή εμφανίζεται μέσα στην αναμόρφωση.



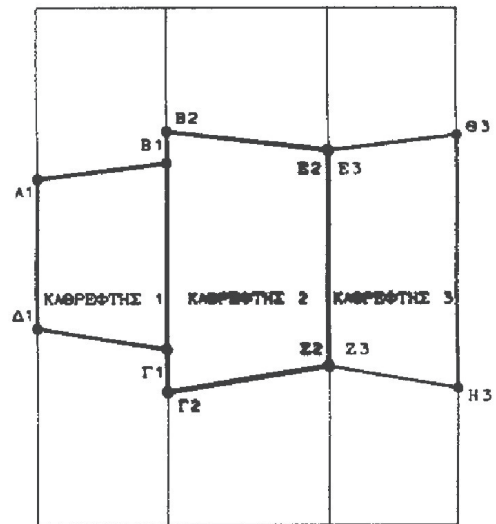
σχ 33

- Οι πινακίδες και τα κάτοπτρα πρέπει να τοποθετούνται σε θέσεις που δεν επικαλύπτουν η μια την άλλη.
- Οι πινακίδες και τα κάτοπτρα πρέπει να τοποθετούνται σε τέτοιες θέσεις, ώστε να μην εμποδίζονται άλλες οπτικές ακτίνες.
- Μέσα στο οπτικό πεδίο του παρατηρητή πρέπει να περιλαμβάνονται μόνο κάτοπτρα και όχι πινακίδες.
- Θα πρέπει οι οπτικές ακτίνες που περνούν από το τέλος του ενός καθρέφτη να ταυτίζονται με εκείνες που περνούν από την αρχή του επόμενου καθρέφτη, για να επιτύχουμε φαινομενική συνέχεια του ειδώλου από τον ένα καθρέφτη στον επόμενο.
- Το οπτικό πεδίο του παρατηρητή (οπτικός κώνος) δεν πρέπει να έχει γωνία μεγαλύτερη των 60° , ώστε να μην έχουμε παραμορφώσεις.

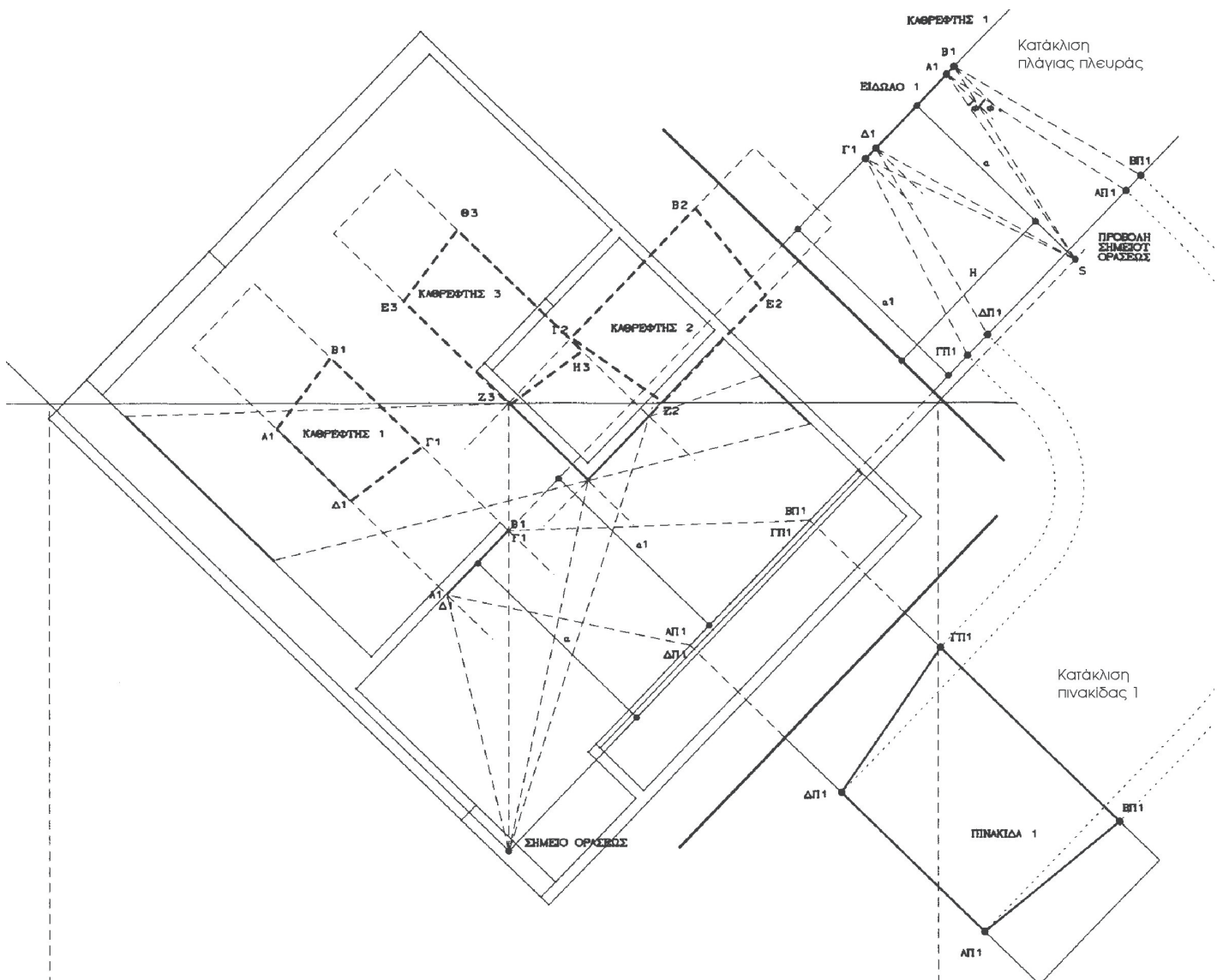
Αφότου κατασκευάσουμε την προοπτική εικόνα του χώρου που διαθέτουμε από το σημείο οράσεως που έχουμε ορίσει (σχ. 34), τοποθετούμε μέσα στη περιοχή των κατόπτρων το περίγραμμα της εικόνας που θέλουμε να εμφανίσουμε τελικά. Σε κάθε καθρέφτη σχηματίζουμε το πλαίσιο του ειδώλου κάθε τμήματος της εικόνας. Για παράδειγμα στον καθρέφτη 1 θα εμφανιστεί το είδωλο του τμήματος ΑΒΓΔ της εικόνας μας. Είναι προφανές ότι η οριζόντια ευθεία ΑΒ της προοπτικής εικόνας θα πρέπει να δημιουργηθεί από μια πλάγια στο χώρο ευθεία Α1Β1, η οποία υπολογίζεται ως εξής: ενώνουμε το σημείο Α με το αντίστοιχο σημείο φυγής Φ2 και ορίζουμε πάνω στην ευθεία μέτρησης υψών το σημείο Α1. αντίστοιχα κάνουμε και για τα υπόλοιπα σημεία Β, Γ και Δ. Κατόπιν μεταφέρουμε τις πραγματικές θέσεις των σημείων Α1, Β1, Γ1 και Δ1 στο ανάπτυγμα των κατόπτρων, δηλαδή στο σύστημα Monge (σχ. 35). Στο ανάπτυγμα του σχήματος 35 λαμβάνουμε την παραμόρφωση του ειδώλου που πρέπει ν' απεικονιστεί, για να μπορούμε από το σημείο οράσεως να δούμε τα ευθύγραμμα τμήματα Α1Β1, Β2Ε2 και Ε3Θ3 ως μια οριζόντια γραμμή.



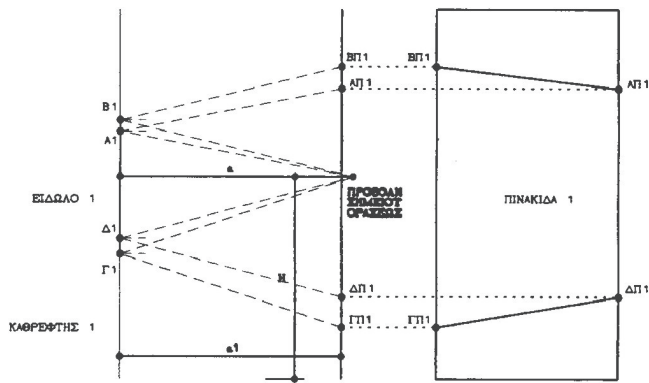
Αυτό που μένει να κάνουμε τώρα είναι να βρούμε τα σημεία ΑΠ1, ΒΠ1, ΓΠ1 και ΔΠ1 αντίστοιχα των σημείων Α1, Β1, Γ1 και Δ1 στην πινακίδα 1. Εργαζόμαστε στο σύστημα Monge (όψη-κάτοψη). Στην πρώτη προβολή του χώρου (κάτοψη) βρίσκουμε τα σημεία ΑΠ1 και ΔΠ1 του πίνακα 1 (σχ. 36) έτσι, ώστε οι γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες ΣΑ1 και Α1ΑΠ1 (όπου Σ το σημείο οράσεως) με την κάθετη στην επιφάνεια του καθρέφτη 1 να είναι ίσες (γωνία πρόσπτωσης και ανάκλασης αντίστοιχα). Κατασκευάζουμε την κατάκλιση της πινακίδας 1 (όψη της πινακίδας), όπως επίσης και την κατάκλιση της πλευράς του χώρου από την οποία μπορούμε να πάρουμε τις αποστάσεις α και α1. Στο σχήμα της κατάκλισης της πλάγιας πλευράς (σχ. 36) βρίσκουμε τις θέσεις του καθρέφτη 1, του ειδώλου Α1Β1Γ1Δ1, τη θέση της πινακίδας 1 και την προβολή S του σημείου οράσεως.



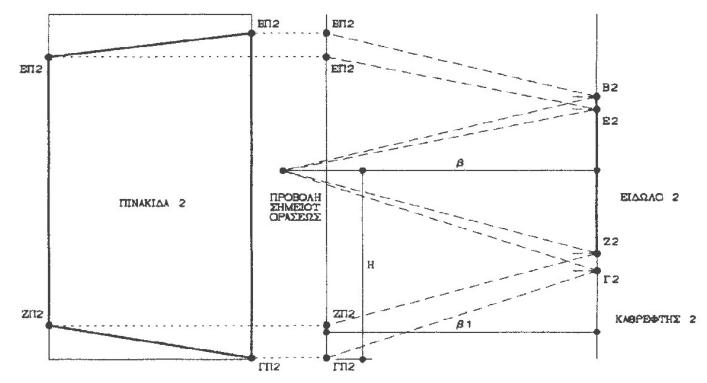
σχ. 35



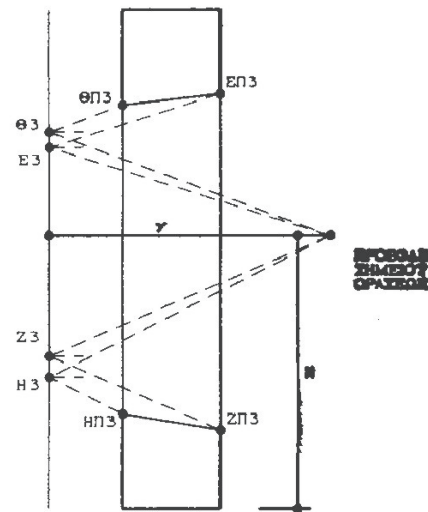
σχ. 36



σχ. 37



σχ. 38

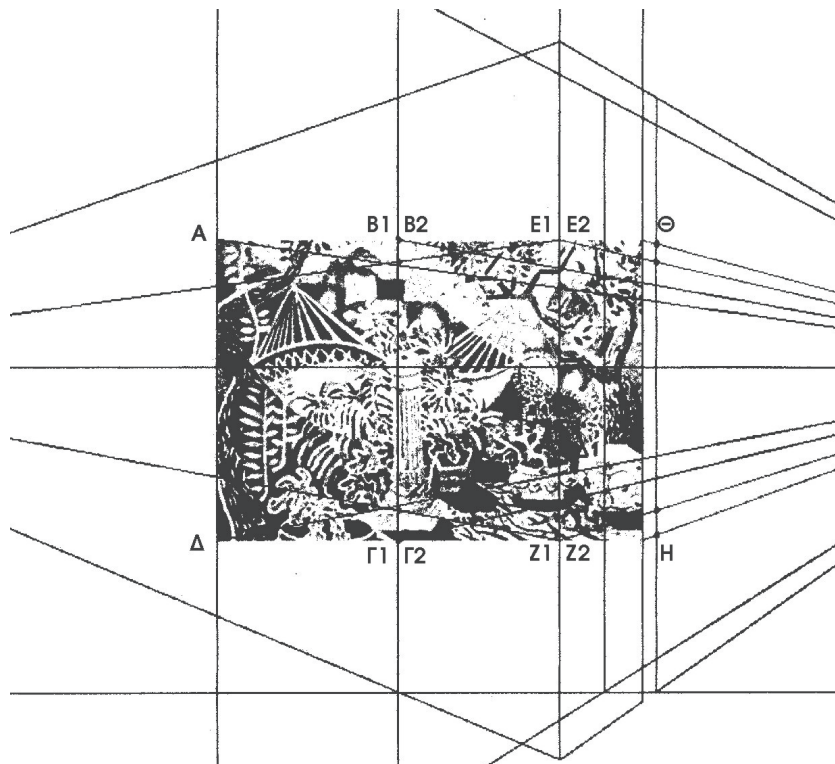


σχ. 39

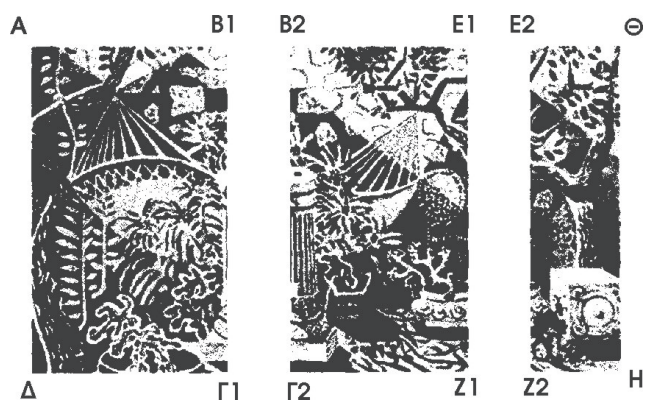
Σχηματίζουμε τις κάθετες στην επιφάνεια του καθρέφτη 1 στα σημεία Α1, Β1, Γ1 και Δ1 και ενώνουμε με την προβολή του σημείου οράσεως S. Η γωνία φ που σχηματίζεται από την προβολή της οπτικής ακτίνας SA1 και την κάθετη στην επιφάνεια του καθρέφτη στο σημείο Α1, είναι η προβολή της γωνίας πρόσπτωσης ω της οπτικής ακτίνας στο σημείο Α1. Σχηματίζουμε μια ίση με την ω γωνία φ, που είναι η προβολή της γωνίας ανάκλασης. Σημειώνεται ότι οι γωνίες ω και φ δεν είναι οι πραγματικές, αλλά οι προβολές των ίσων γωνιών πρόσπτωσης και ανάκλασης. Επειδή οι πραγματικές γωνίες είναι συνεπίπεδες και ίσες και οι προβολές τους σχηματίζουν γωνίες ίσες. Προεκτείνουμε την προβολή της ανάκλασης της οπτικής ακτίνας SA1 μέχρι να τμήσει την προβολή της πινακίδας 1 και ορίζουμε το σημείο ΑΠ1. Μεταφέρουμε το σημείο ΑΠ1 στο σχήμα της κατάκλισης της πινακίδας 1 και έχουμε την πραγματική θέση του σημείου ΑΠ1.

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τα υπόλοιπα σημεία και για τις άλλες δύο πινακίδες (σχ. 37,38,39).

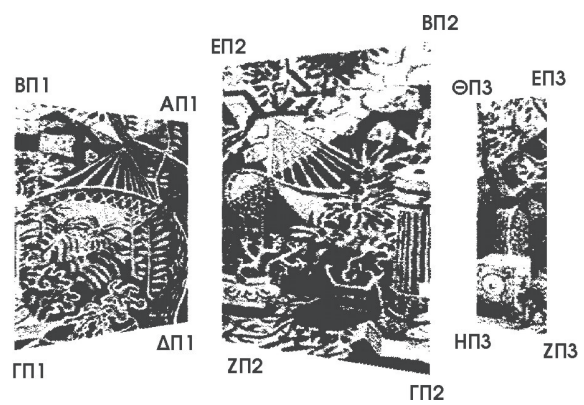
Έχοντας τα ακριβή σχήματα των πινακίδων 1, 2 και 3 δε μένει παρά να ορίσουμε τα αντίστοιχα τμήματα της εικόνας. Επιστρέφουμε στην πραγματική εικόνα του χώρου (σχ. 40) κι απεικονίζουμε στο ορθογώνιο ΑΘΗΔ την εικόνα μας, σημειώνοντας τα σημεία Β1 & Β2, Γ1 & Γ2, Ε1 & Ε2 και Ζ1 & Ζ2. Τέμνουμε τον πίνακα ΑΘΗΔ με τις ευθείες Β1Γ1 και Ε1Ζ1 και παίρνουμε τα τρία τμήματα της αρχικής εικόνας που πρέπει να «περάσουμε» στα αντίστοιχα σχήματα των πινακίδων 1, 2 και 3 (σχ. 41).



σχ. 40



σχ. 41



σχ. 42



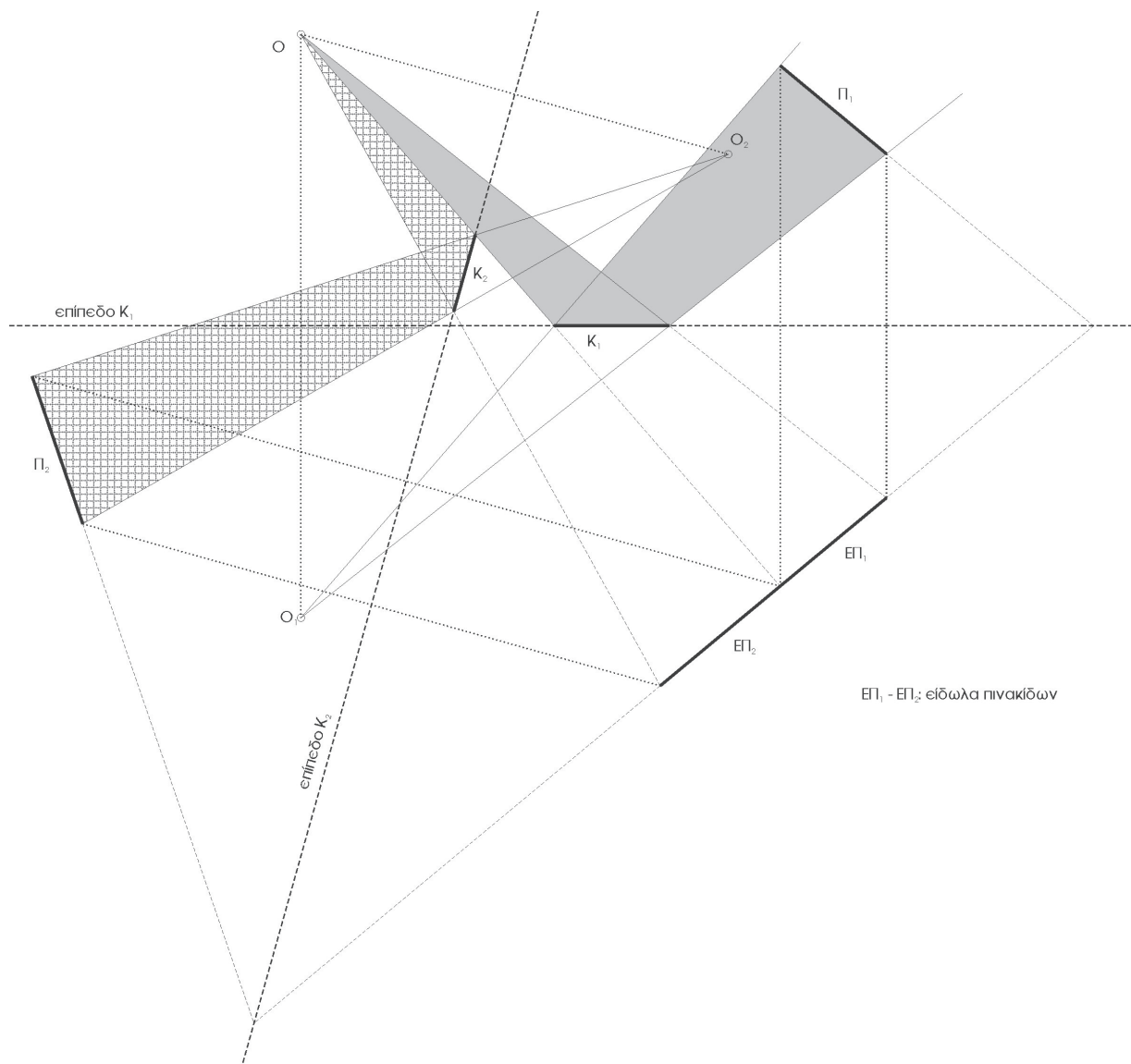
εικ. 43 Η κατοπτρική αναμόρφωση από το «σωστό» σημείο οράσεως

Ταυτίζουμε αντίστοιχα τα σημεία: το Α με το ΑΠ1, το Β1 με το ΒΠ1, το Γ1 με το ΓΠ1 κ.ο.κ. Οι εικόνες πάνω στις πινακίδες είναι όχι μόνο παραμορφωμένες, αλλά και αντεστραμμένες κατά κατακόρυφο άξονα σε σχέση με τα αρχικά τμήματα (σχ. 42).

Η παραμόρφωση των εικόνων μπορεί να γίνει με τη μέθοδο του κανάβου, είτε ηλεκτρονικά με οποιοδήποτε πρόγραμμα επεξεργασίας εικόνας (εικ. 43).

Ένας άλλος τρόπος για να προσδιορίσουμε το πλάτος της πινακίδας σε σχέση με τη θέση της και το πλάτος και τη θέση του κατόπτρου, είναι να χρησιμοποιήσουμε συμμετρικό σημείο οράσεως, ως προς το επίπεδο του κατόπτρου, όπως φαίνεται στο σχήμα 44. Τα γνωστά στοιχεία είναι: α) η θέση του παρατηρητή, β) η θέση του κατόπτρου K_1 , γ) το πλάτος του κατόπτρου K_1 και δ) η διεύθυνση της πινακίδας Π_1 και ζητούμενο στοιχείο είναι το πλάτος της πινακίδας Π_1 .

Ορίζουμε τις ακραίες οπτικές ακτίνες που θα προσπέσουν στο κάτοπτρο K_1 και με άξονα συμμετρίας τη διεύθυνση του κατόπτρου K_1 , ορίζουμε το συμμετρικό σημείο O_1 του σημείου οράσεως O . Κατόπιν ενώνουμε το συμμετρικό O_1 με τα άκρα του κατόπτρου, μέχρι να τμηθεί η ευθεία διεύθυνσης της πινακίδας Π_1 και έτσι ορίζουμε το πλάτος της



σχ. 44

Κωνικές κατοπτρικές αναμορφώσεις

Στην κωνική κατοπτρική αναμόρφωση το σημείο οράσεως τοποθετείται σχεδόν πάντοτε στην προέκταση του άξονα της κωνικής κατοπτρικής επιφάνειας, ώστε να επιτυγχάνεται η μέγιστη δυνατή εποπτεία της επιφάνειας του κωνικού κατόπτρου.

Η αναμόρφωση σχεδιάζεται έξω από την περιφέρεια της βάσης του κώνου και αντικατοπτρίζεται μέσα στην κυκλική περιοχή που καταλαμβάνει η βάση του κωνικού κατόπτρου. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι στη κωνική κατοπτρική αναμόρφωση τα στοιχεία του ειδώλου του σχήματος που βρίσκονται πιο κοντά στο κέντρο του κώνου, θα εμφανίζονται πιο κοντά στην περιφέρεια της αναμόρφωσης κι επομένως αναλαμβάνουν μεγαλύτερη παραμόρφωση (εικ. 45).



εικ. 45

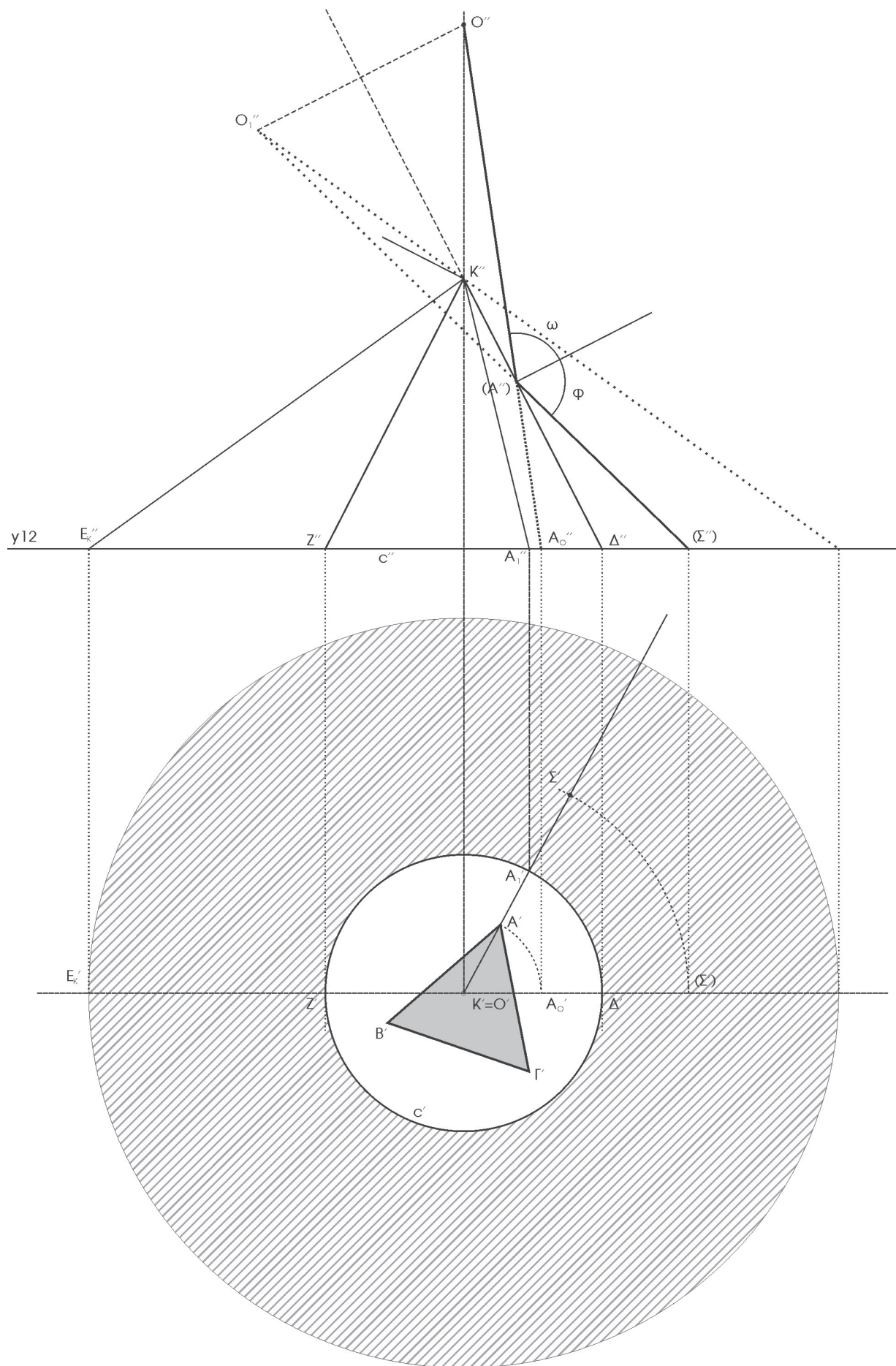
Στο σχήμα 46 έχει παρασταθεί ο κατοπτρικός κώνος $Kc(K'c', K''c'')$ και από το σημείο οράσεως $O(O', O'')$ ζητούμε τα δούμε το είδωλο του τριγώνου $A'B'Γ'$, που θα σχεδιαστεί αναμορφωμένο σε περιοχή εκτός του όγκου του κώνου (διαγραμμισμένη περιοχή).

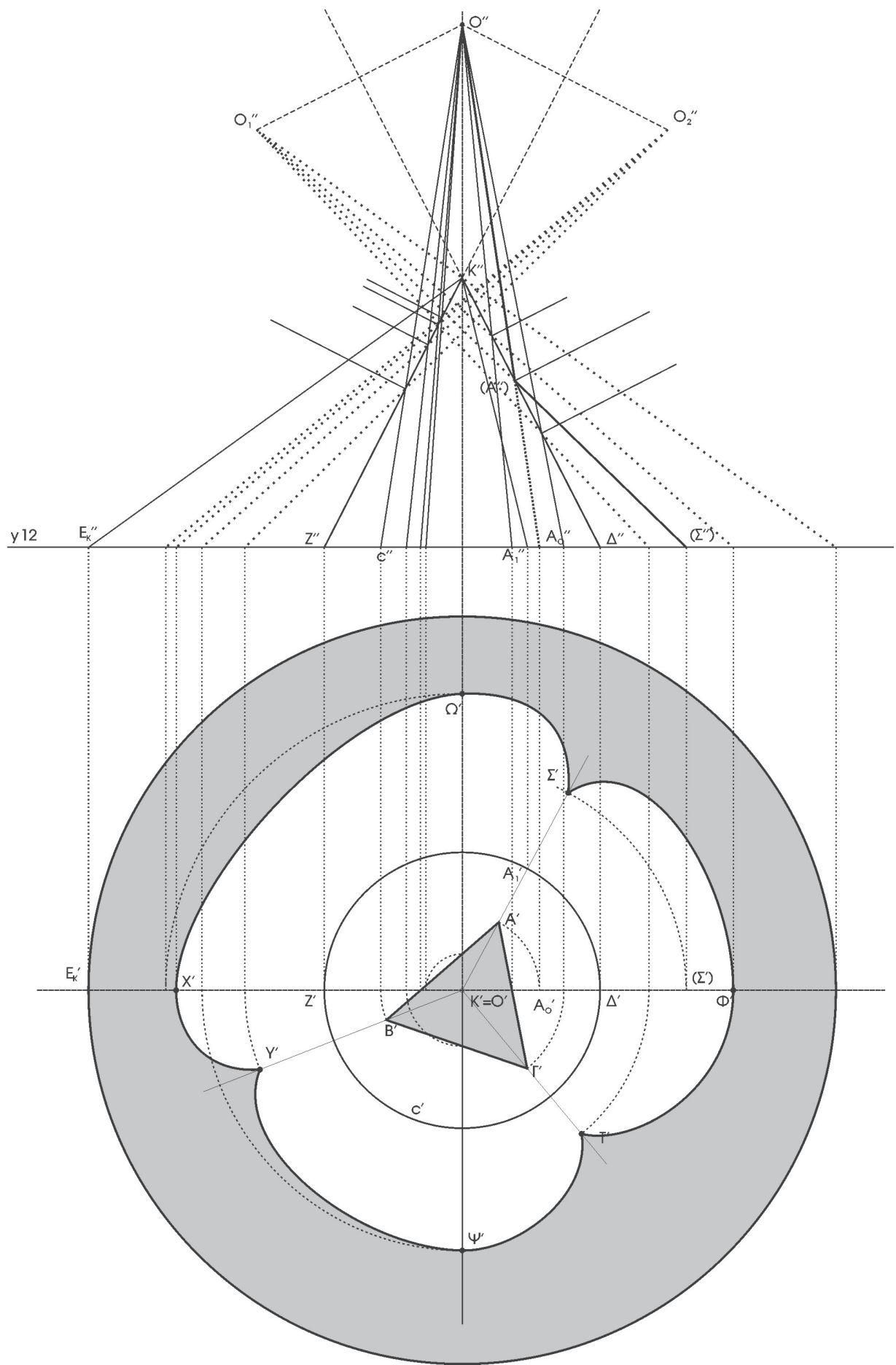
Για να ορίσουμε την περιοχή της αναμόρφωσης θεωρούμε την κεντρική οπτική ακτίνα $O''K''$. Αυτή θα ανακλαστεί στην κατοπτρική κωνική επιφάνεια στο σημείο K'' και θα προσπέσει στο σημείο E_K'' της οριζόντιας επιφάνειας της βάσης του κώνου. Ορίζουμε την ακτίνα πρόσπτωσης $K'E_K'$ στην 1^η προβολή και σχηματίζουμε τον κύκλο $(K', K'E_K')$, που ορίζει τη μέγιστη περιοχή της αναμόρφωσης. Ο δακτύλιος της αναμόρφωσης μπορεί να οριστεί και με έναν ακόμη τρόπο, αν βρούμε το συμμετρικό σημείο O_1'' του O'' , ως προς τη διεύθυνση της γενέτειρας $K''Δ''$ και κατόπιν προεκτείνουμε την $O_1''K''$ μέχρι να τμήσει τον άξονα $γ12$ στο E_K'' ή το αντιδιαμετρικό του.

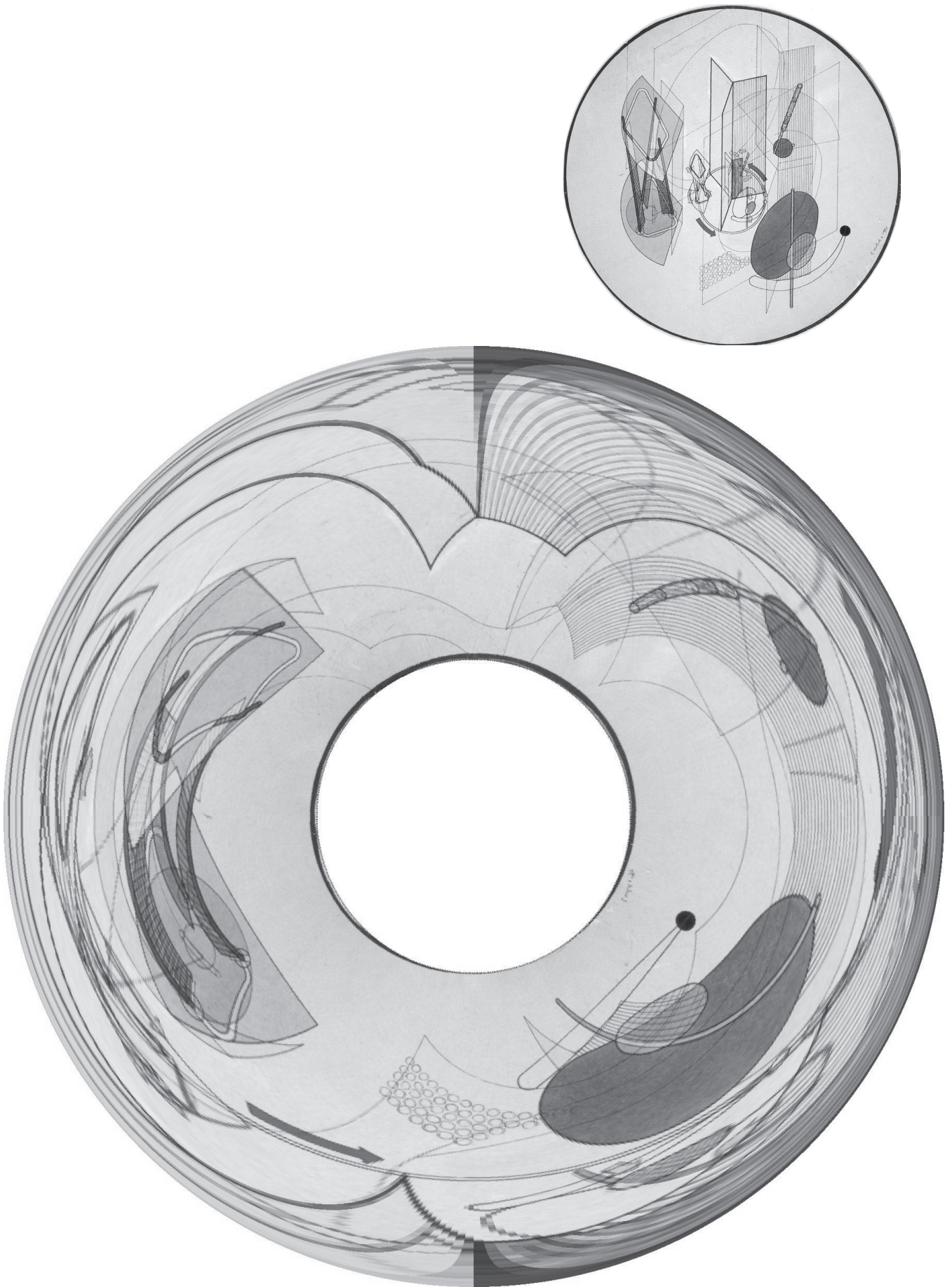
Για να είναι το τυχαίο σημείο A' είδωλο κάποιου σημείου του επιπέδου Π_1 (με σημείο οράσεως του αντικατοπτρισμού το O), θα πρέπει η γωνία πρόσπτωσης της οπτικής ακτίνας στο A να είναι ίση με την γωνία ανάκλασης από το A , ορίζοντας ως «επιφάνεια» ανάκλασης τη γενέτειρα KA_1 .

Σε παράσταση, για να γίνει δυνατό να μετρήσουμε τις γωνίες πρόσπτωσης και ανάκλασης ώστε να είναι ίσες μεταξύ τους, κάνουμε κατάκλιση του σημείου A σε επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο προβολής Π_2 , διερχόμενο από την κορυφή του κώνου. Έτσι με κέντρο K' και ακτίνα $K'A'$ διαγράφουμε τόξο κύκλου, μέχρι να τμήσει την $K'Δ'$ στο A_0' . Βρίσκουμε τη 2^η προβολή A_0'' του A_0' στον άξονα $γ12$, εφόσον θέλουμε το «επίπεδο» του ειδώλου να ταυτίζεται με το επίπεδο Π_1 . Φέρνουμε την οπτική ακτίνα $O''A_0''$ και στην τομή της με την γενέτειρα $K''Δ''$ ορίζεται το σημείο (A'') . Από το (A'') φέρνουμε ευθεία κάθετη στη γενέτειρα $K''Δ''$, για να ορίσουμε την γωνία πρόσπτωσης ω . Κατόπιν σχηματίζουμε την γωνία $\phi=\omega$, μέχρι ο φορέας της να τμήσει τον άξονα $γ12$ στο σημείο (Σ'') . Βρίσκουμε την 1^η προβολή (Σ') του Σ'' στην $K'Δ'$ και τέλος με τόξο κύκλου (με κέντρο K') ορίζουμε στην $K'A'$ το σημείο Σ' . Το σημείο Σ' λοιπόν είναι αυτό που θα πρέπει να σχεδιαστεί στο επίπεδο Π_1 , για να δούμε από το $O(O', O'')$ τον αντικατοπτρισμό του (το είδωλό του) στο σημείο A' .

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και για τα υπόλοιπα σημεία. Το σχήμα που τελικά θ' απεικονιστεί στο οριζόντιο επίπεδο της βάσης του κώνου, ώστε ν' αντικατοπτριστεί στον κώνο στο τρίγωνο $AB\Gamma$, παριστάνεται στο σχήμα 47.







εικ. 48 Αναμόρφωση σε ορθό κατοπτρικό κώνο 30° του έργου *The mechanics of the light-requisite* (εικόνα 27)

Κυλινδρικές κατοπτρικές αναμορφώσεις

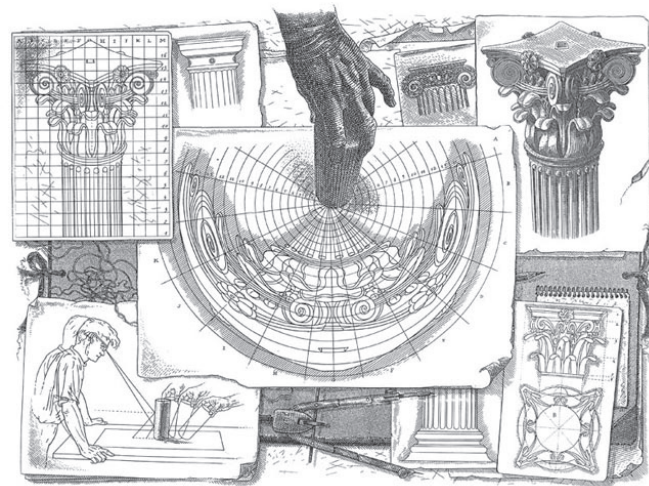
Ενώ οι κωνικές αναμορφώσεις είναι εικόνες που εκτείνονται συνήθως σε πλήρη δακτύλιο γύρω από τη βάση του κώνου, στις κυλινδρικές αναμορφώσεις υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί σχετικοί με την *περιοχή* που μπορεί να καταλάβει το είδωλο της αναμόρφωσης από τον συνολικό όγκο του κυλινδρικού κατόπτρου (εικ. 49,50). Ο πρώτος περιορισμός είναι αυτός κατά τον οποίο η εικόνα εκτείνεται σε άνοιγμα γωνίας πάντοτε μικρότερο των 180° . Οποιαδήποτε θέση κι αν έχει το σημείο οράσεως, τέτοια που να κατευθύνονται οι οπτικές ακτίνες προς την κοίλη επιφάνεια του κυλινδρικού κατόπτρου (δεν συμπεριλαμβάνεται η άνω βάση του) δεν είναι δυνατό να περιληφθεί στο οπτικό πεδίο περιοχή της κοίλης επιφάνειας του κυλίνδρου μεγαλύτερη από τη μισή. Μισό κύλινδρο θα βλέπαμε αν καθιστούσαμε τις οπτικές ακτίνες παράλληλες μεταξύ τους, οπότε το σημείο οράσεως θα βρισκόταν σε άπειρη απόσταση από τον κύλινδρο, που προφανώς είναι θεωρητική θέση. Η περιοχή του ειδώλου της αναμόρφωσης γίνεται όμως ακόμη μικρότερη, όσον αφορά τα πλευρικά της όρια (σχ. 51), διότι θεωρούμε ένα επίπεδο κατακόρυφο και εφαπτόμενο στον κύλινδρο, πάνω στον οποίο θα εμφανιστεί το είδωλο της αναμόρφωσης. Το οριακό σημείο Γ_1' επομένως θα προβληθεί στο σημείο Γ' του θεωρητικού αυτού επιπέδου και θα οριστεί το πλευρικό όριο της περιοχής του ειδώλου της αναμόρφωσης. Στο σημείο Γ καταλήγει η οπτική ακτίνα $ΟΓ(Ο\Gamma',Ο\Gamma'')$, που μας υποδεικνύει ότι το σημείο Γ έχει υψόμετρο $z_1 \neq 0$. Αντίθετα, το σημείο $M(M',M'')$ βρίσκεται στο επίπεδο Π_1 . Οι οπτικές ακτίνες που ξεκινούν από το Γ και καταλήγουν στο M διαγράφουν κοντά στη βάση του κυλίνδρου μια καμπύλη έλλειψης, που περιορίζει την περιοχή του ειδώλου της αναμόρφωσης.

Ένας ακόμη περιορισμός που τίθεται είναι σχετικά με το ύψος που επιτρέπεται να καταλαμβάνει το είδωλο της αναμόρφωσης, διότι παρουσιάζεται πρακτική δυσκολία: τα σημεία ειδώλων της αναμόρφωσης που βρίσκονται σε ύψος μεγαλύτερο από το μισό του ύψους του σημείου οράσεως, έχουν σημεία αναμόρφωσης πίσω από την προβολή του σημείου οράσεως, πίσω δηλαδή από τον παρατηρητή. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι ο παρατηρητής πρέπει να σταθεί πάνω στην αναμόρφωση για ν' αποκαταστήσει το είδωλο, αλλά σ' αυτή την περίπτωση συμμετέχει και ο ίδιος στον αντικατοπτρισμό.

Ένα τυχαίο σημείο $A(A',A'')$ του αντικατοπτρισμού της εικόνας της αναμόρφωσης, θα έχει πραγματικό είδωλο στο σημείο $P(P',P'')$, δηλαδή στο σημείο P θα προσπέσει η οπτική ακτίνα και η ανάκλασή της θα πραγματοποιηθεί με άξονα ανάκλασης την ακτίνα KP του κυλίνδρου, δημιουργώντας τη Pa . Προεκτείνουμε την OP και ορίζουμε το 1° ίχνος της $\Sigma(\Sigma',\Sigma'')$. Στην 1° προβολή σχηματίζουμε την ευθεία α' συμμετρική της $P\Sigma'$ ως προς την εφαπτόμενη τ_A' του κυλίνδρου, στο



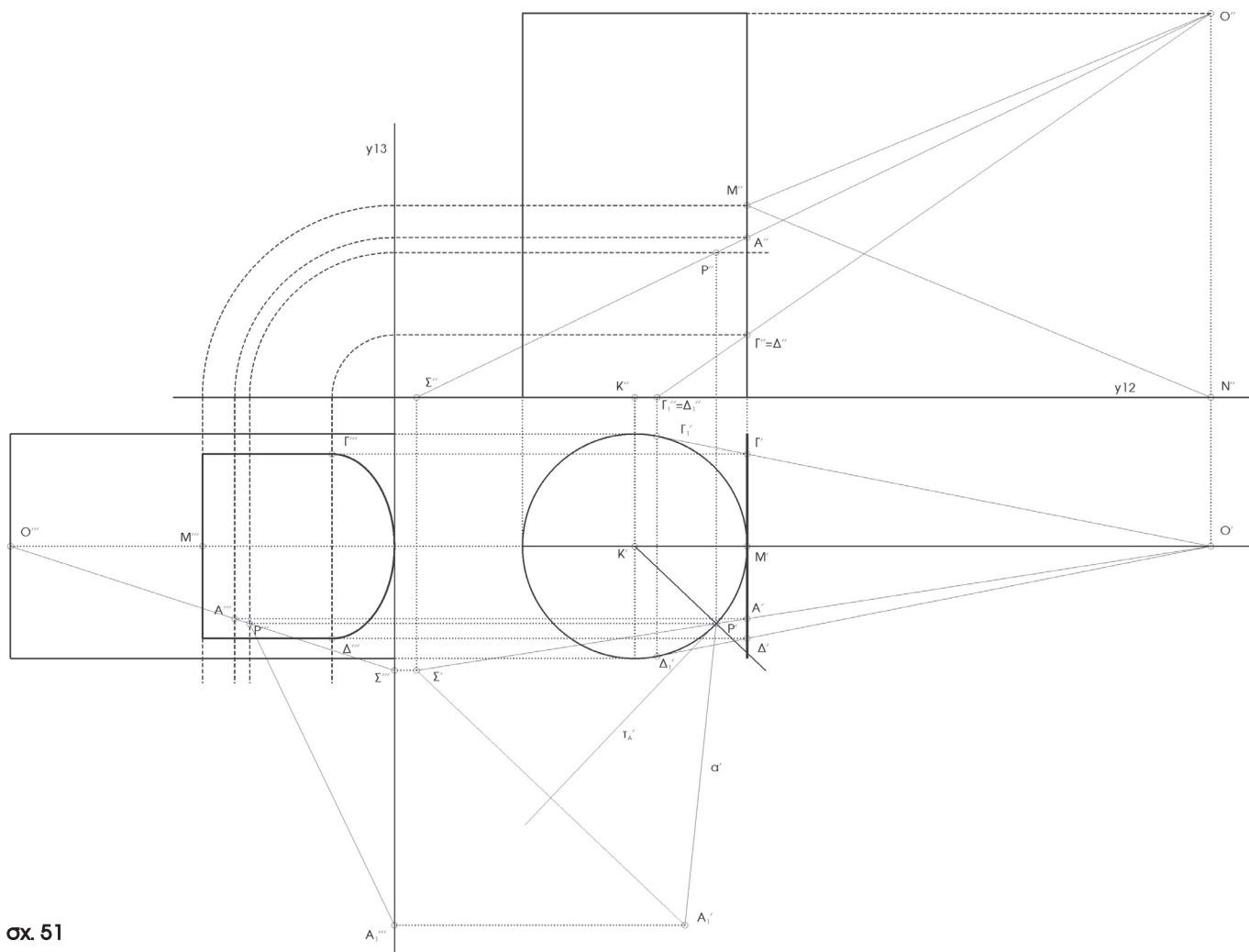
εικ. 49 István Orosz, *Column*



εικ. 50

σημείο P' , που είναι ο φορέας διεύθυνσης της ανάκλασης. Επομένως το συμμετρικό σημείο A_1' του σημείου Σ' ως προς την t_A' είναι το ζητούμενο σημείο.

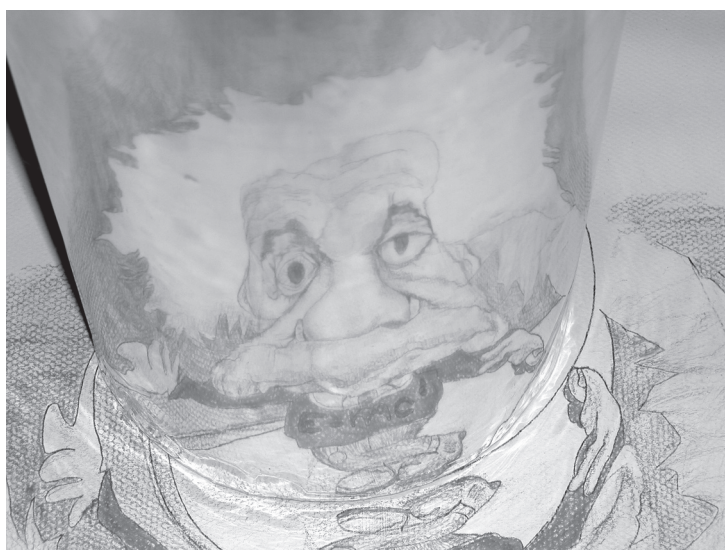
Με άλλα λόγια, εάν σχεδιάσουμε το σημείο A_1' στο επίπεδο Π_1 και το παρατηρήσουμε από το σημείο O , θα το δούμε να ανακλάται στο σημείο P και να εμφανίζεται το είδωλό του στο σημείο A (εικ. 52,53).



σχ. 51



εικ. 52



εικ. 53 Κυλινδρική κατοπτρική αναμόρφωση (σπουδαστική εργασία ΕΜΠ)

