

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της παραστατικής Γεωμετρίας είναι η απεικόνιση των δισδιάστατων και των τρισδιάστατων αντικειμένων στο επίπεδο, δηλαδή στο χαρτί σχεδίασης.

Αναλύοντας τα δισδιάστατα και τα τρισδιάστατα αντικείμενα στα γεωμετρικά στοιχεία που τα αποτελούν, το πρόβλημα επικεντρώνεται στην απεικόνιση των σημείων των ευθειών και των επιπέδων διαμέσου των πιο κοινών γραφικών μεθόδων: την **Προοπτική**, την **Αξονομετρία** και τις **Ορθές προβολές**.

Κοινό στοιχείο γραφικής απεικόνισης των τριών μεθόδων είναι η αρχή της κοινής προβολικής. Η παραστατική γεωμετρία επιτρέπει την κατασκευή ενός γραφικού μοντέλου αναπαράγοντας όχι μόνο την φόρμα και τις διαστάσεις του πρωτοτύπου, αλλά και την θέση του στο χώρο σε σχέση με ένα προεπιλεγμένο σύστημα αναφοράς.

Για να επιτύχουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, θα πρέπει να θεωρήσουμε ένα χώρο «προβολής» διαφορετικό από εκείνον της επίπεδης γεωμετρίας, με την προσθήκη των «**κατ' εκδοχήν**» στοιχείων του χώρου, η θέση των οποίων θεωρείται το άπειρο και κατ' επέκταση μη δυνάμενων να μετρηθούν με τους κανόνες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το σύνολο των εξειδικευμένων κανόνων, αξιωμάτων και θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται για τις ανάγκες αυτής της γεωμετρίας, που ονομάζεται ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ. Είναι μία επιστήμη σχετικά πρόσφατη, αφού συγκεκριμενοποιήθηκε μόλις τον προηγούμενο αιώνα.

Η γνώση των κανόνων της παραστατικής γεωμετρίας, θα μας οδηγήσει στην θεωρητικο-επιστημονική κατανόησή της, και ταυτόχρονα στην ικανότητα να χρησιμοποιούμε τις εφαρμογές της, ο σκοπός των οποίων είναι η ακριβής και κατανοητή απεικόνιση των τρισδιάστατων μορφών.

Γίνεται κατανοητό ότι, μόνον όταν ο σπουδαστής φθάσει σε ένα επαρκές επίπεδο γνώσης της επιστήμης της Παραστατικής Γεωμετρίας, θα μπορεί να εκφράσει συγκεκριμένα (σχεδιαστικά) την σκέψη του, διαθέτοντας ένα εργαλείο που θα του το επιτρέπει. Αυτό που η παραστατική γεωμετρία αναπτύσσει, και είναι ίσως η πιο σημαντική προσφορά της, είναι η *αντίληψη* του τρισδιάστατου χώρου.

Ισοδυναμεί δηλαδή η γνώση της παραστατικής γεωμετρίας για ένα αρχιτέκτονα, με την γνώση της γλώσσας για ένα συγγραφέα.

Πράγματι σε μια αρχική φάση, ο αρχιτέκτων θα προσπαθήσει να μεταφράσει τις ιδέες του διαμέσου σκαριφημάτων, σημειώσεων κλπ. Σαν τελικό προϊόν όμως, τα σχέδια θα πρέπει να γίνουν πιο συγκεκριμένα μέχρι να επιτευχθεί ικανό επίπεδο αντίληψης και ακρίβειας. Μαθαίνουμε σιγά σιγά να αντιλαμβανόμαστε τα αντικείμενα στον τρισδιάστατο χώρο, απεικονίζοντας τα στις δύο διαστάσεις.

Γενικά στις αρχιτεκτονικές μελέτες, μετά την αρχική φάση αναπτύσσεται η οριστική σύνθεση που αποτελείται από μια σειρά σχεδίων, σύμφωνα με τα οποία πρέπει να αντιλαμβανόμαστε απόλυτα το προς υλοποίηση αντικείμενο. Το σύνολο της μελέτης συμπληρώνεται με τεχνικές εκθέσεις και διάφορους υπολογισμούς.

Αν λοιπόν ο μελετητής έχει εισάγει στοιχεία ιδιαίτερος σύνθετα, είναι αναγκαίο αυτά να απεικονίζονται σωστά και όχι κατά προσέγγιση. Αυτό σημαίνει ότι οι παραστάσεις θα πρέπει να έχουν σχεδιαστεί σύμφωνα με τους κανόνες της Παραστατικής Γεωμετρίας, η οποία όχι τυχαία θεωρείται και η «επιστήμη των απεικονίσεων».

Η ικανότητα «*να απεικονίζεις*», αποκτάται ταυτόχρονα και με την ικανότητα να αντιλαμβάνεσαι τις απεικονίσεις που έχουν ήδη σχεδιαστεί.

Δεν συμβαίνει όμως και το αντίθετο: η ικανότητα να «*διαβάζεις*» σχέδια δεν σημαίνει ταυτόχρονα και ικανότητα «*να απεικονίζεις*».

Η γνώση της παραπάνω ικανότητας είναι απαραίτητη για τους φοιτητές και για έναν ακόμη λόγο: Η μελέτη της αρχιτεκτονικής βασίζεται κυρίως σε κείμενα με πολλές εικόνες και αναπαραστάσεις. Είναι προφανές ότι η μη κατανόηση των παραπάνω λόγω αδυναμίας ανάγνωσης, καθιστούν αδύνατη ή τουλάχιστον περιορίζουν την επιτυχή ολοκλήρωση των σπουδών του αρχιτέκτονα.

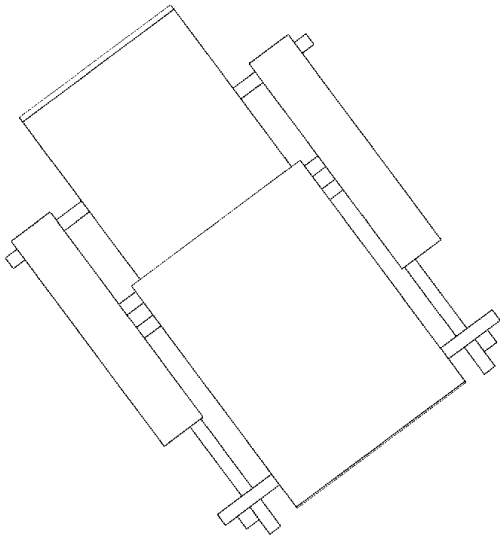
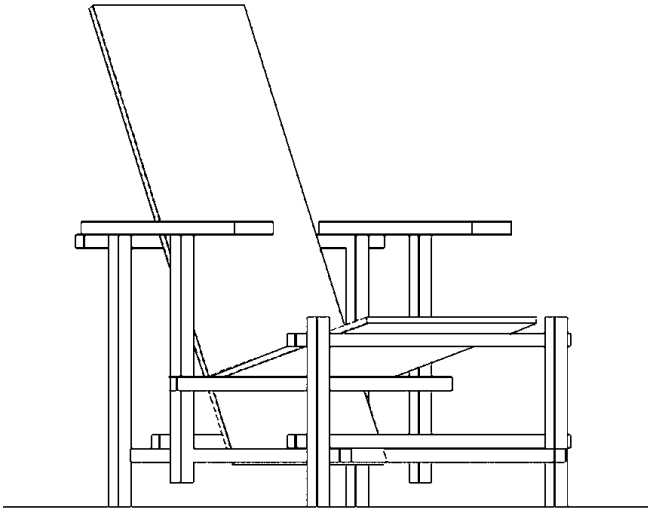
Ολοκληρώνοντας αυτό το εισαγωγικό σημείωμα, δεν θα πρέπει να ξεχνάμε την σημασία της Παραστατικής Γεωμετρίας σε θέματα ελέγχου ανάλυσης ή μελέτης τεκμηρίωσης ήδη υπαρκτών έργων

αρχιτεκτονικής που η γραφική δισδιάστατη ή και τρισδιάστατη αναπαράστασή τους θεωρείται απαραίτητη. Τέτοια έργα είναι π.χ. οι αρχαιολογικοί χώροι, κ.α.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την κ. Ελένη Γούναρη (ΕΤΕΠ-Εργαστήριο Μορφολογίας –Ρυθμολογίας, ΔΠΘ) για την βοήθεια στη σχεδίαση με το ACAD πολλών σχημάτων του κειμένου, καθώς και τη συνάδελφο και υποψήφια διδάκτωρ του Τμήματος μας κ. Εμму Ανδρισπούλου για την ουσιαστική συμβολή της στην ολοκλήρωση των παραπάνω σημειώσεων.

Επ. Καθηγητής Δρ. Ν. Λιανός,

Ξάνθη 9-2004



ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Σύστημα Προβολής

“Σύστημα Προβολής”, είναι ένα σύστημα απεικόνισης που μας επιτρέπει τη σχεδίαση επί χάρτου δηλαδή σε δύο διαστάσεις μίας 3/διάστατης κατασκευής.

Το σύστημα προβολής ορίζεται από το κέντρο προβολής (σημείο K) και ένα επίπεδο προβολής (επίπεδο Π). Τυχόν σημείο A του χώρου «προβάλλεται από το K στο Π » και A' είναι η προβολή του (σχ. 1)

Παρατηρούνται οι παρακάτω περιπτώσεις:

σχ. 1

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α' περίπτωση: το Κ είναι σημείο συγκεκριμένο, τότε ονομάζεται σημείο «καθ' υπόσταση» και η προβολή είναι **κεντρική** (ή κωνική) με κέντρο το Κ. Η **κεντρική προβολή**, ενός αντικειμένου (Α), μας δίνει την **προοπτική** απεικόνισή του (Α') (σχ. 2). Το σύστημα της κεντρικής προβολής εφαρμόζεται στην προοπτική απεικόνιση των αντικειμένων.

Β' περίπτωση: το Κ δεν είναι σημείο συγκεκριμένο, θεωρούμε ότι βρίσκεται στο άπειρο («κατ' εκδοχή σημείο»), αλλά γνωρίζουμε την κατεύθυνση προβολής που σημειώνεται με ∞ (π.χ. K^∞). Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι έχουμε παράλληλη ή κυλινδρική προβολή (σχ. 3). Η **παράλληλη προβολή**, ενός αντικειμένου, μας δίνει την **παραστατική μέθοδο** απεικόνισης ή μέθοδο Monge (σχ. 4), καθώς και την **αξονομετρική μέθοδο** (σχ. 5). Η **παραστατική** και η **αξονομετρική μέθοδος** προβολής είναι αυτές που χρησιμο-ποιούνται κατ' εξοχήν στην αρχιτεκτονική, διότι τα σχέδια φέρουν τις πραγματικές διαστάσεις των αντικειμένων που απεικονίζουν υπό κάποια κλίμακα. Κατ' επέκταση μέσω των σχεδίων αυτών μπορούν να υλοποιηθούν τα πραγματικά αντικείμενα στο χώρο.

σχ. 2

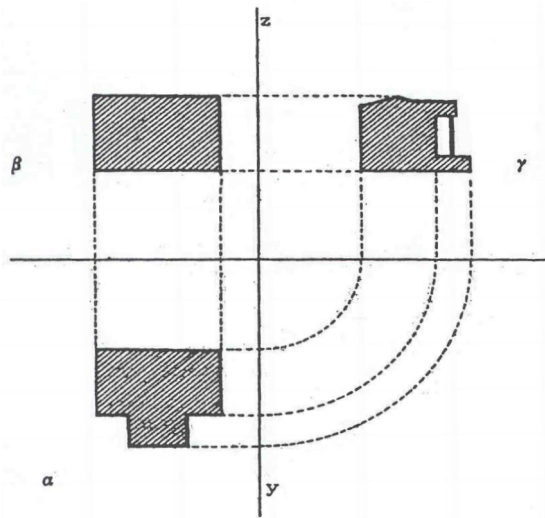
σχ. 3

Παράλληλη προβολή

Γενικά.

Απεικόνιση στο σύστημα δύο επιπέδων προβολής.

Το σύστημα δύο επιπέδων προβολής αποτελείται από ένα οριζόντιο (Π_1) και ένα κατακόρυφο (Π_2) επίπεδο. Σύμφωνα με τη μέθοδο που επινοήθηκε από τον G. Monge (1746-1818), στο σύστημα αυτό προβάλλεται κάθε σχήμα του χώρου μέσω ορθών προβολών. Δηλαδή κάθε σχήμα του χώρου έχει μία ορθή προβολή στο Π_1 (πρώτο επίπεδο προβολής) που ονομάζεται πρώτη ή οριζόντια προβολή (A_1) και μία δεύτερη ή κατακόρυφη προβολή (A_2) στο Π_2 (δεύτερο επίπεδο προβολής) (σχ. 6).

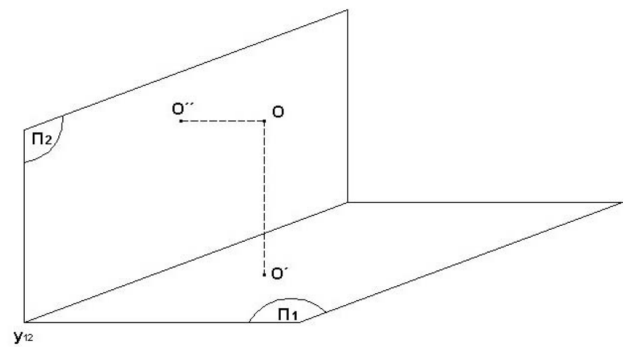


σχ. 4 Απεικόνιση αντικειμένου με τη μέθοδο των ορθών προβολών.

Επειδή ενδιαφερόμαστε για την απεικόνιση ενός αντικειμένου σε μία επιφάνεια, π.χ. στο χαρτί σχεδίασης, στρέφουμε το επίπεδο Π_2 , του ορθογωνίου συστήματος προβολής Π_1 και Π_2 , μέχρι να συμπίπτει με το Π_1 (σχ. 6,7). Με τον τρόπο αυτό που ονομάζεται *κατάκλιση* του Π_2 στο Π_1 , οι δύο προβολές μεταφέρονται σε ένα επίπεδο, που ταυτίζεται με το επίπεδο σχεδίασης (σχ. 7). Τον άξονα περιστροφής τον ονομάζουμε y_{12} .

ΑΠ ΕΙΚ ΟΝΙ ΣΗ ΣΗ ΜΕΙ ΟΥ

Σύμ
φ
ω



σχ. 8 Ορισμός σημείου O του χώρου σε 3D.

να με τα παραπάνω, κάθε σημείο O του χώρου μπορεί να οριστεί μέσω της απεικόνισης της πρώτης O' και της δεύτερης O'' προβολής του (σχ. 8,9).

Δηλαδή υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του σημείου O στο χώρο και των δύο προβολών του. Αυτό σημαίνει ότι με τις δύο προβολές O' και O'' μπορούμε να ορίσουμε το O .

Από το σύνολο των προβολών των σημείων ενός αντικειμένου του χώρου, προκύπτουν στα Π_1 και Π_2 οι δύο προβολές του.

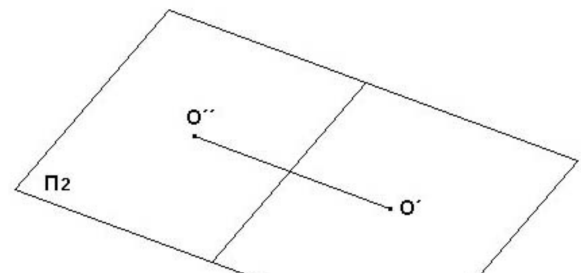
Η απεικόνιση ενός σημείου με τη μέθοδο Monge πραγματοποιείται μέσω των συντεταγμένων του στο προβολικό σύστημα των δύο επιπέδων Π_1 και Π_2 .

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε πάνω στην τομή y_{12} των επιπέδων προβολής Π_1 και Π_2 ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$, έτσι ώστε ο άξονας των x να βρίσκεται πάνω στο Π_1 και ο άξονας των z να βρίσκεται πάνω στο Π_2 και ο άξονας των y να ταυτίζεται με τον y_{12} (σχ. 10).

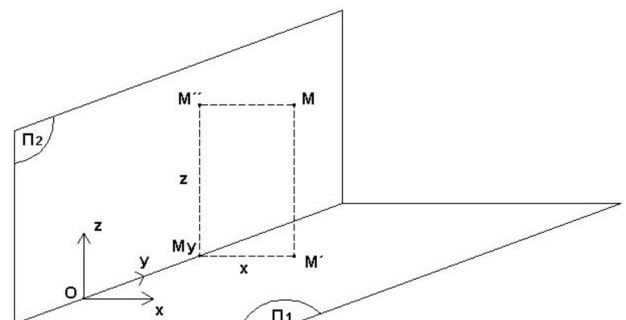
Σε κάθε σημείο M του χώρου, που έχει προβολές τα M' και M'' στο Π_1 και Π_2 αντίστοιχα, αντιστοιχεί μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) που αποτελούν τις συντεταγμένες του για το σύστημα των αξόνων $Oxyz$.

Το μέγεθος x είναι η απόσταση $M'M_y$, ορίζει τη θέση του M' πάνω στο Π_1 και ονομάζεται **απόσταση**.

Η απόσταση $M''M_y$ είναι το μέγεθος z , που ονομάζεται **υψόμετρο**.

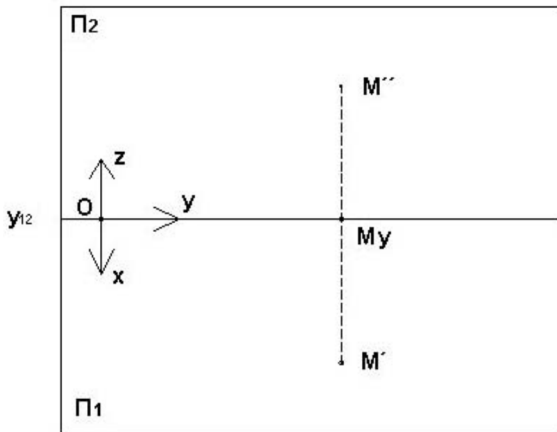


σχ. 9 Απεικόνιση σε 2D μετά την κατάκλιση.



σχ. 10 Απεικόνιση σημείου με διάταξη των επιπέδων στο χώρο.

Η απόσταση OM_y από την αρχή των αξόνων O είναι η y (σχ. 10).



Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της κατάκλισης του Π_2 στο Π_1 έχουμε το σχήμα 11.

Οι συντεταγμένες κάθε προβαλλόμενου σημείου, μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές, ανάλογα με τη θέση του σημείου στο χώρο ως προς τα επίπεδα προβολής. Θεωρούμε θετικά y τα ευρισκόμενα δεξιά του O , θετικά x τα κάτω από τον y_{12} και θετικά z τα σημεία πάνω από τον y_{12} .

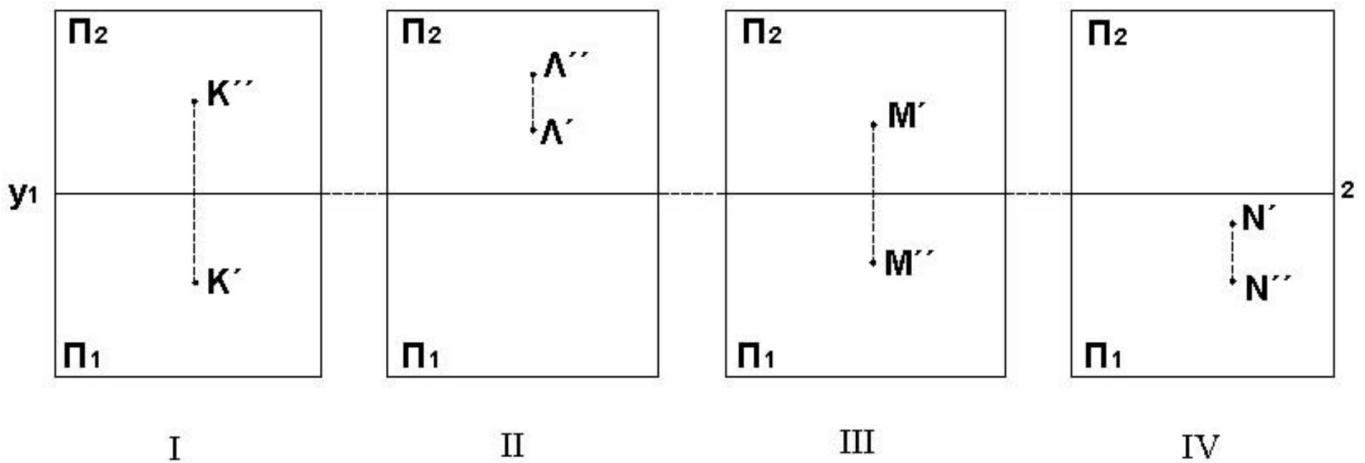
Παρατηρώντας τα επίπεδα Π_1 και Π_2 διαπιστώνουμε ότι χωρίζουν το χώρο σε τέσσερις περιοχές - δίδερα (σχ. 12):

Στην περιοχή I, τυχόν σημείο K έχει την 1^η προβολή του κάτω από y_{12} και την 2^η επάνω, $x(+)$ και $y(+)$.

- Στην περιοχή II, τυχόν σημείο L έχει τις 1^η και 2^η προβολές του επάνω από τον y_{12} , $x(-)$ και $y(+)$.
- Στην περιοχή III, τυχόν σημείο M έχει την 1^η προβολή του πάνω από τον y_{12} και τη 2^η προβολή του κάτω από τον y_{12} , $x(-)$ και $y(-)$.
- Στην περιοχή IV, τυχόν σημείο N έχει τις 1^η και 2^η προβολές του να βρίσκονται κάτω από τον άξονα y_{12} , $x(+)$ και $y(-)$ (σχ. 13,14).

Δίδεδρο	X	Z
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

σχ. 1 Δίδεδρα και αντίστοιχες θετικές και αρνητικές συντεταγμένες απεικόνισης σημείου.



σχ. 14 Απεικόνιση ευθείας στα 4 δίδρα.

Επειδή, ως γνωστό, δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία, οι προβολές δύο σημείων $A(A', A'')$ και $B(B', B'')$ ευθείας α στα επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2 αντίστοιχα θα ορίζουν τις προβολές α' και α'' της ευθείας.

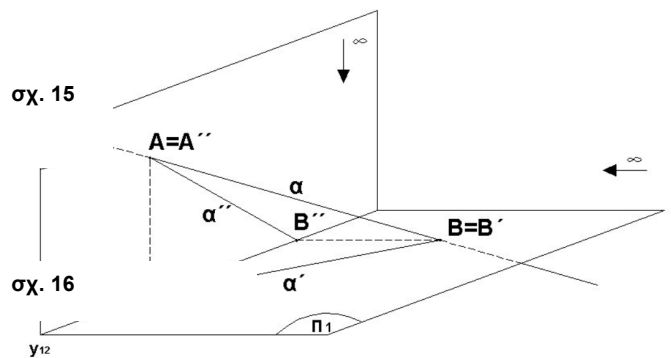
Κατ' επέκταση μπορούμε να εκφράσουμε τη συνθήκη: **Ένα σημείο K ανήκει σε μία ευθεία α όταν οι προβολές του K' και K'' ανήκουν στις αντίστοιχες προβολές α' και α'' της ευθείας** (σχ. 15)

Ή αντίστροφα, **όταν οι προβολές K' και K'' ενός σημείου K βρίσκονται πάνω στις αντίστοιχες προβολές α_1 και α_2 μίας ευθείας, το σημείο ανήκει στην ευθεία** (σχ. 15).

Τα σημεία τομής $B \equiv B'$ και $A \equiv A''$ ευθείας α (α' , α'') με τα επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2 αντίστοιχα ονομάζονται **ίχνη ευθείας** (σχ. 16,17).

Το σημείο τομής $B \equiv B'$ της ευθείας α με το 1^ο επίπεδο προβολής Π_1 ονομάζεται **1^ο ίχνος ευθείας**.

Το σημείο τομής $A \equiv A''$ της ευθείας α με το 2^ο επίπεδο προβολής Π_2 ονομάζεται **2^ο ίχνος ευθείας**.



σχ. 17

Επειδή τα A και B είναι οι τομές της ευθείας με τα Π_1 και Π_2 είναι προφανές ότι $A \equiv A'$ και $B \equiv B'$.

Χαρακτηριστικές ευθείες.

Είναι οι ευθείες που τέμνουν κάθετα ή παράλληλα τα επίπεδα προβολής Π_1 , Π_2 ή ανήκουν στα επίπεδα συμμετρίας και συμπτώσεως.

Οι χαρακτηριστικές ευθείες είναι:

κατακόρυφες ευθείες
οριζόντιες ευθείες
παράλληλες ευθείες
εγκάρσιες ευθείες
ευθείες επιπέδων συμμετρίας

1. Κατακόρυφες ευθείες

Είναι οι κάθετες στο Π_1 ευθείες (σχ. 18,19). Η κάθετη α προβάλλεται στο Π_1 σαν σημείο. Η 2^η προβολή της στο Π_2 είναι η ευθεία α'' κάθετη στον y_{12} .

2. Πρόσθιες ευθείες

Ονομάζονται οι κάθετες ευθείες στο Π_2 (σχ. 20,21). Η 1^η προβολή στο Π_1 είναι η ευθεία β' και η 2^η προβολή είναι το σημείο B'' .

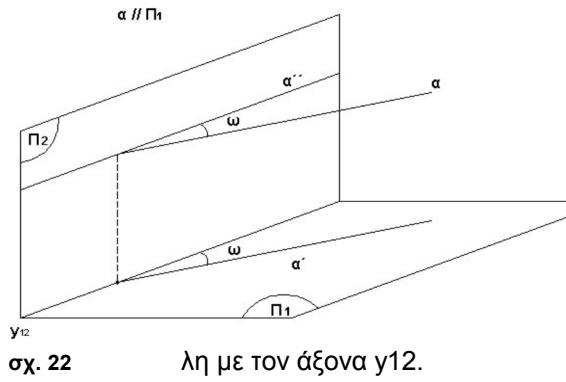
3. Οριζόντιες ευθείες

Καλούνται οι ευθείες παράλληλες με το Π_1 . Η προβολή α' της α στο Π_1 είναι προφανώς παράλληλη με την α ενώ η προβολή α'' στο Π_2 είναι παράλληλη με τον άξονα y_{12} (σχ. 22,23).

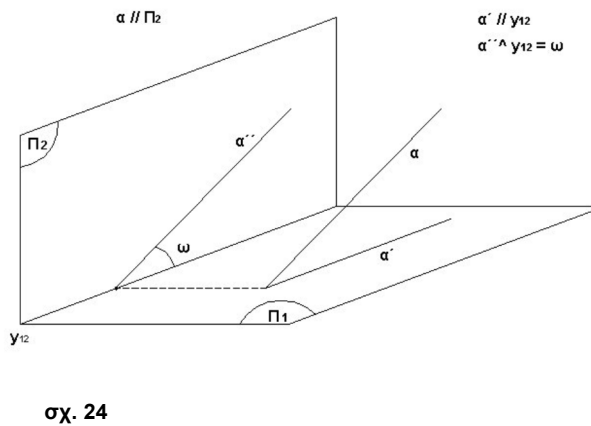
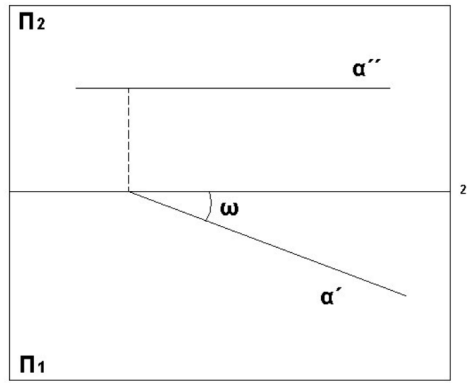
Η γωνία ω που σχηματίζεται από την 1^η προβολή α' και τον άξονα y_{12} , μας δίνει τη γωνία κλίσης της α με το Π_2 .

4. Μετωπικές ευθείες

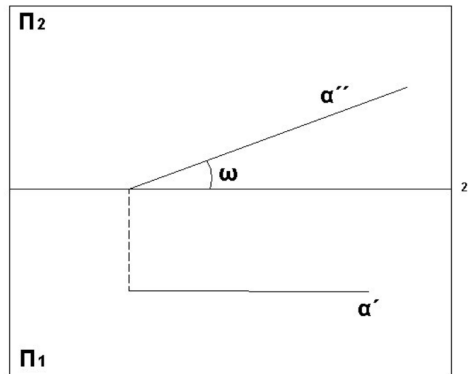
Λέγονται οι ευθείες που είναι παράλληλες προς το Π_2 (σχ.24,25).



Σύμφω
να με
τ ο
σχήμα,
η 1η
προβολ
ή α' της
ευθείας
α, είναι
παράλλ
η



Η
γ
ωνία φ
π ο υ
σχηματίζ
ει η α''
με τον
y12 μας
δίνει την
κ λ ί σ η
της α με
το Π1.
Τ υ χ ό ν
μ ε



γέθη επί της α είναι ίσα με τα πραγματικά στη 2η

5. Ευθείες παράλληλες στον άξονα y12

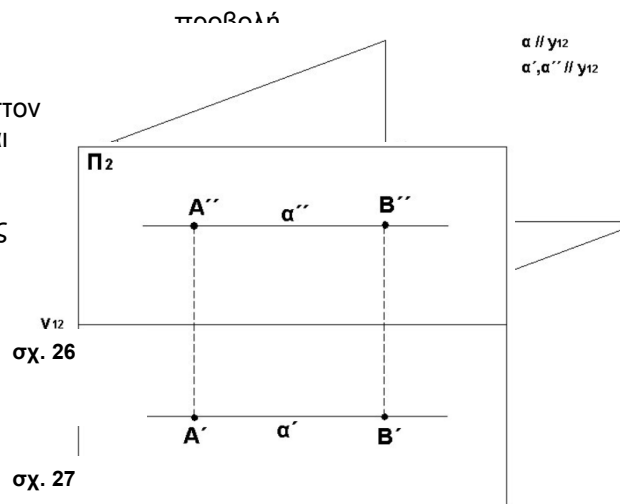
Σύμφωνα με το σχήμα 26, κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα y12 έχει και τις προβολές της α' και α'' στα Π1 και Π2 αντίστοιχα παράλληλες στον άξονα αυτό.

Τυχόν μεγέθη επί της α είναι ίσα με τις προβολές τους επί των α' και α'' (σχ. 26,27).

6. Ευθείες εγκάρσιες στον άξονα y12

Σύμφωνα με το σχήμα είναι οι κάθετες ευθείες στον άξονα y12 (σχ. 28,29).

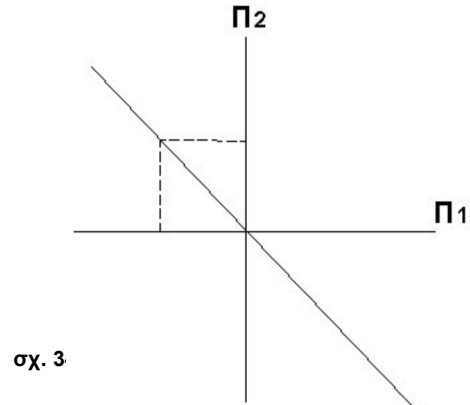
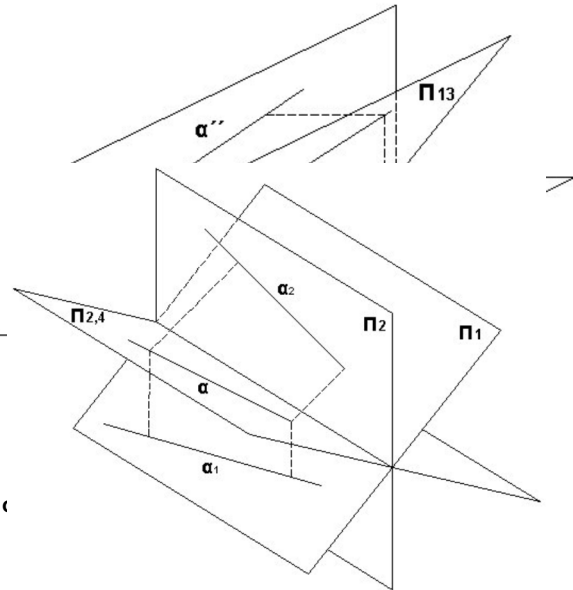
Επειδή άπειρες ευθείες μπορεί να έχουν την ίδια προβολή, γι' αυτό είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός των προβολών δύο σημείων A και B της α και η κατάκλιση της ευθείας (σχ. 28) προκειμένου να γίνει αντιληπτή η θέση της.



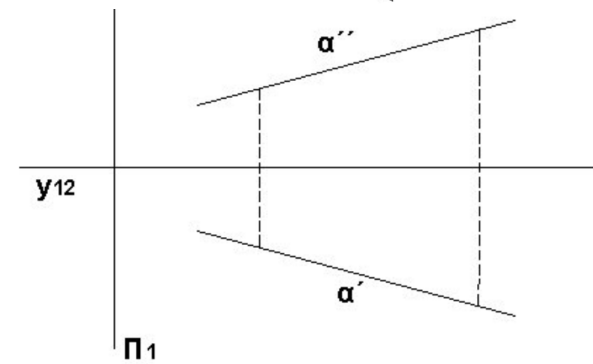
Οι γωνίες ω και φ είναι οι γωνίες που σχηματίζει η α με τα Π_2 και Π_1 αντίστοιχα.

7. Ευθείες που ανήκουν στο επίπεδο συμμετρίας Π_{13} .

Θεωρούμε τυχαία ευθεία α που ανήκει στο επίπεδο συμμετρίας Π_{13} . Οι προβολές της ευθείας α στα Π_1 και Π_2 είναι οι α' και α'' αντίστοιχα. Οι ευθείες αυτές έχουν προβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα y_{12} (σχ. 30,31,32).



σχ. 3

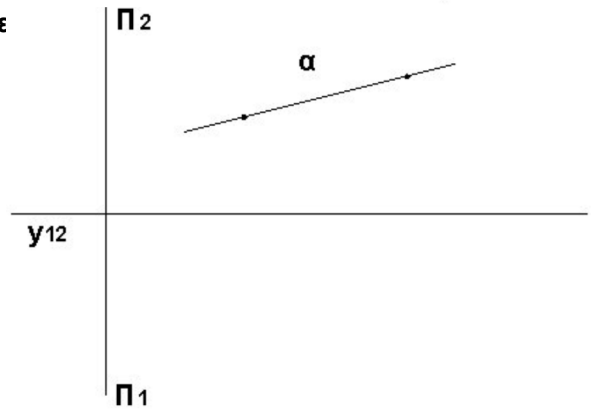


σχ. 32

Ευθείε
συμ
πτ
ώσ
εως
 Π_{24}

Οι
προ
βολ
ές
έ
ς

των ευθειών αυτών είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y_{12} . Μετά την κατάκλιση του Π_2 στο Π_1 οι προβολές α' και α'' ταυτίζονται (σχ. 33,34,35).



Απεικόνιση επιπέδων στο προβολικό σύστημα

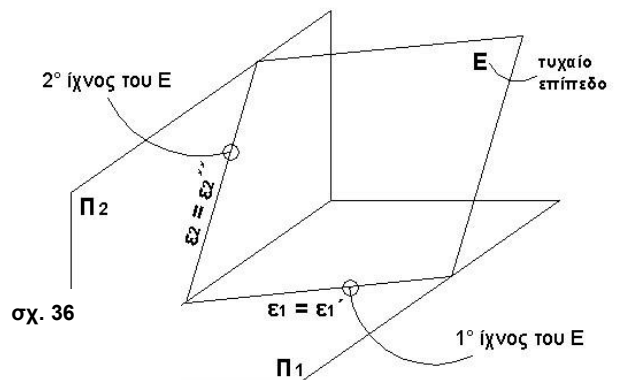
Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα επιπέδων Π_1 και Π_2 επίπεδο E που τέμνει τα επίπεδα προβολής κατά τις ευθείες ϵ_1' και ϵ_2'' (σχ. 36).

Οι ευθείες αυτές ονομάζονται ίχνη του επιπέδου E . Η ϵ_1' , τομή του E με το οριζόντιο Π_1 , είναι το 1° ίχνος του επιπέδου. Η ϵ_2'' , τομή του E με το κατακόρυφο επίπεδο Π_2 , είναι το 2° ίχνος του επιπέδου.

Μετά την κατάκλιση του Π_2 στο Π_1 το επίπεδο E απεικονίζεται από τα δύο ίχνη του ϵ_1 και ϵ_2 στα Π_1 και Π_2 αντίστοιχα σύμφωνα με το σχήμα 37.

καθώς και τυχαίο

σχ. 35

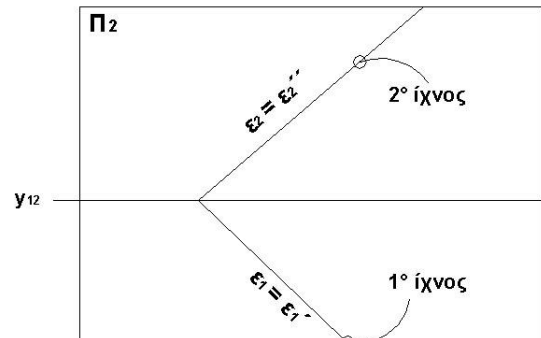


σχ. 36

Απεικόνιση τυχαίας ευθείας, που ανήκει σε τυχαίο επίπεδο

Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα δύο επιπέδων Π_1 και Π_2 , τυχαίο επίπεδο E και τυχαία ευθεία β που ανήκει στο E . Τα ϵ_1' και ϵ_2'' είναι τα 1° και 2° ίχνη του επιπέδου στα Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Τα β' και β'' είναι οι προβολές της ευθείας β στο Π_1 και Π_2 αντίστοιχα (σχ. 38,39).

Παρατηρούμε ότι τα ίχνη της ευθείας τέμνουν τα ίχνη του επιπέδου. Κατ' επέκταση συμπεραίνουμε ότι **μια τυχαία ευθεία β ανήκει σ' ένα τυχαίο επίπεδο E όταν τα ίχνη της ευθείας στο προβολικό σύστημα τέμνουν τα αντίστοιχα ίχνη του επιπέδου.**



σχ. 37

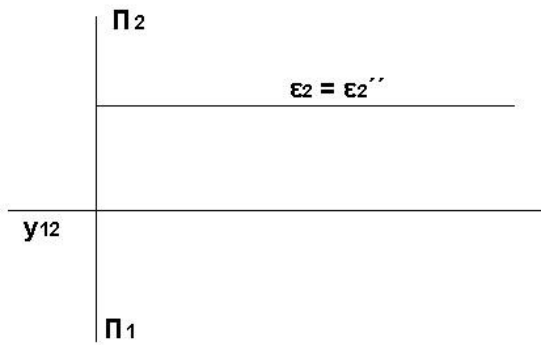
Χαρακτηριστικές θέσεις επιπέδων

1. Οριζόντια Επίπεδα

Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα επιπέδων Π_1 και Π_2 και επίπεδο E παράλληλο προς το οριζόντιο επίπεδο Π_1 (σχ. 40).

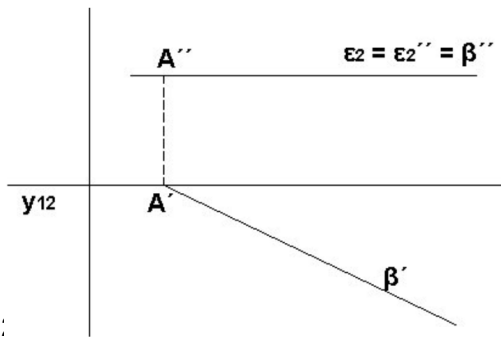
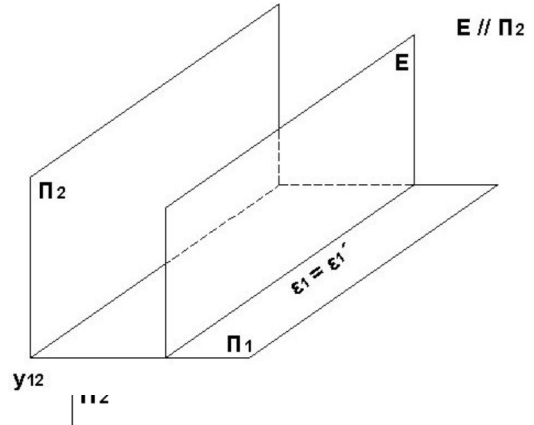
Παρατηρούμε ότι το οριζόντιο επίπεδο E τέμνει το Π_2 κατά το ίχνος $\epsilon_2 = \epsilon_2''$ που είναι παράλληλο προς τον άξονα y_{12} και αποτελεί το 2^ο ίχνος του επιπέδου (σχ. 41).

Τυχούσα ευθεία β που ανήκει στο E παρατηρούμε ότι



σχ. 41

άλλεται στο Π_1 διατηρώντας το σχήμα της ενώ η προβολή της



σχ. 43

Λαμβάνουμε προβολικό σύστημα επιπέδων Π_1 και Π_2 και τυχαίο επίπεδο E παράλληλο προς το κατακόρυφο επίπεδο Π_2 (σχ. 44,45).

Παρατηρούμε ότι το κατακόρυφο επίπεδο E τέμνει το Π_1 κατά μία ευθεία $\epsilon_1 = \epsilon_1'$, παράλληλη προς τον άξονα y_{12} , που αποτελεί το 1^ο ίχνος του κατακόρυφου επιπέδου, ενώ στο επίπεδο Π_2

στο Π_2 Επειδή οι ευθείες αυτές

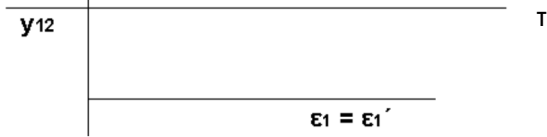
είναι παράλληλες με το Π_1 δεν έχουν 1^ο ίχνος, αλλά η 1^η προβολή τους αποτελεί πραγματικό μέγεθος της ευθείας (σχ. 42,43).

Μετωπικά Επίπεδα

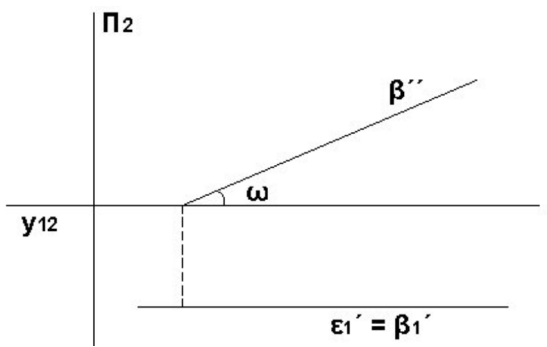
δεν υπάρχει ϵ_1 ίχνος.

Παρατηρούμε ότι τυχασία ευθεία β που ανήκει στο επίπεδο E, προβάλλεται στο Π_1 κατά μία ευθεία ($\beta_1 = \beta_1'$)

που ανήκει στο 1^ο ίχνος του



σχ. 45



σχ. 47

σχ. 46

επιπέδου. Η προβολές της ευθείας β στο Π_2 αποτελούν πραγματικά μεγέθη. Μετά την κατάκλιση (σχ. 46,47) η γωνία ω υποδεικνύει την κλίση της ευθείας ως το Π_1 .

3. Κατακόρυφο επίπεδο

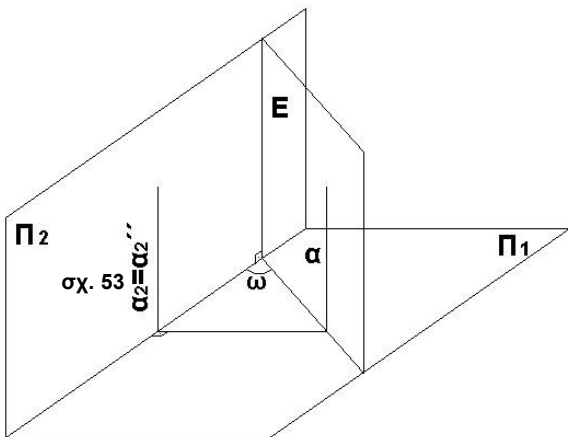
Λαμβάνουμε το προβολικό σύστημα των επιπέδων Π_1 και Π_2 καθώς επίσης και τυχαίο επίπεδο E που είναι:

- α) κάθετο προς το οριζόντιο επίπεδο Π_1 και
- β) σχηματίζει γωνία ω με το Π_2 .

Παρατηρούμε ότι το επίπεδο E τέμνει το Π_1 κατά μία ευθεία $\epsilon_1 = \epsilon_1'$ που είναι το 1^ο ίχνος του επιπέδου και σχηματίζει με τον άξονα y_{12} γωνία ω . Επίσης τέμνει το Π_2 κατά την ευθεία $\epsilon_2 = \epsilon_2''$ κάθετη στο y_{12} (σχ. 48). Μετά την κατάκλιση του Π_2 στο Π_1 έχουμε το σχήμα 49, σύμφωνα με το οποίο η ένδειξη της γωνίας ω είναι απαραίτητη για την απεικόνιση του E .

Τυχούσα ευθεία β που ανήκει στο επίπεδο E προβάλλεται στο Π_1 πάνω στο 1^ο ίχνος $\epsilon_1 = \epsilon_1'$ του επιπέδου E ενώ στο Π_2 προβάλλεται κατά την $\beta_2 = \beta_2'$ (σχ. 50). Μετά την κατάκλιση (σχ. 51) παρατηρούμε ότι το 1^ο ίχνος του E στο Π_1 εμπεριέχει την 1^η προβολή της β και τέμνει τον άξονα y_{12} κατά γωνία ω . Το 2^ο ίχνος του E στο Π_2 είναι κάθετο στον άξονα y_{12} και η ευθεία β προβάλλεται σαν $\beta_2 = \beta_2''$.

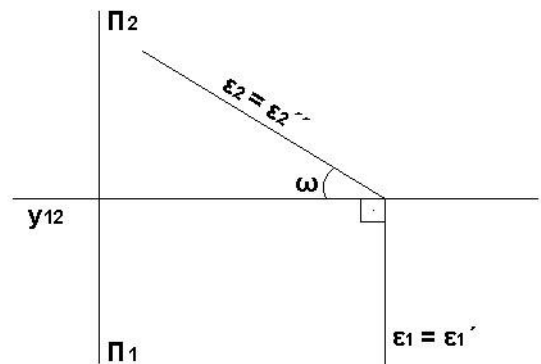
Αν τυχούσα ευθεία α του επιπέδου E είναι κάθετη στο Π_1 , τότε αυτή προβάλλεται κατά ευθύγραμμο τμήμα α_2' παράλληλο προς το 2^ο ίχνος του E (σχ. 52,53).



σχ. 52

Π_2 καθώς επίσης και τυχαίο επίπεδο E το οποίο είναι:

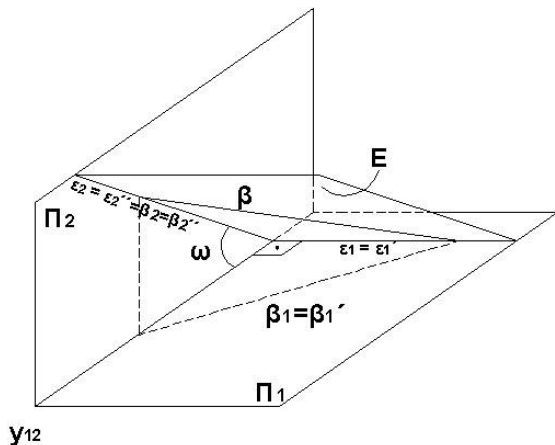
- α) κάθετο προς το κατακόρυφο επίπεδο Π_2
- β) σχηματίζει γωνία ω με το Π_1 .



σχ. 54

Λαμβάνουμε το προβολικό σύστημα επιπέδων Π_1 ,

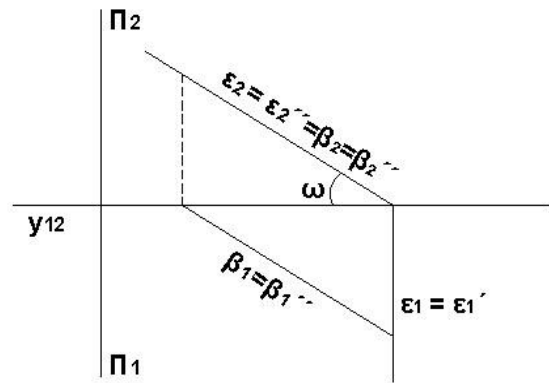
Παρατηρούμε ότι η 2^η προβολή του E στο Π₂ είναι ευθεία $\varepsilon_2 = \varepsilon_2''$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα y_{12} γωνία ω (σχ. 54,55).



y_{12}

σχ. 56

Η 1^η προβολή του E στο Π₁ είναι ευθεία $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$ κάθετη στον άξονα y_{12} .



y_{12}

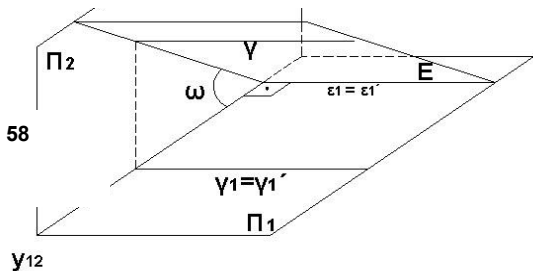
Π₁

σχ. 55

Η προβολή στο Π₂ τυχαίας ευθείας β ($\beta_2 = \beta_2''$) που ανήκει στο πρόσθιο επίπεδο E, ταυτίζεται με το 2^ο ίχνος του επιπέδου $\varepsilon_2 = \varepsilon_2''$ (σχ. 56,57).

Αν τυχούσα ευθεία γ που ανήκει στο E είναι ταυτόχρονα και κάθετη στο Π₂ προβάλλεται στο Π₁ κατά ευθύγραμμο τμήμα γ_1 παράλληλο με το 1^ο ίχνος του E ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$), ενώ στο Π₂ προβάλλεται σαν σημείο επάνω στο 2^ο ίχνος του E (σχ. 58,59).

σχ. 58



y_{12}

Ιχνοπαράλληλες επιπέδου

Στο σύστημα των επιπέδων Π₁ και Π₂, θεωρούμε το τυχαίο επίπεδο E με ίχνη ε_1' και ε_2'' (σχ. 60).

Η ευθεία i_1 ορίζεται οριζόντια, δηλαδή παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο προβολής Π₁ και ανήκει στο

επίπεδο E. Η πρώτη προβολή της ευθείας: i_1' είναι παράλληλη στο πρώτο ίχνος του επιπέδου E: ε_1' , ενώ η δεύτερη προβολή της ευθείας: i_1'' είναι οριζόντια, δηλαδή παράλληλη στον άξονα y_{12} (σχ. 61).

Ανάλογα, η ευθεία i_2 ορίζεται μετωπική, δηλαδή παράλληλη στο κατακόρυφο επίπεδο Π_2 και ανήκει

στο επίπεδο E. Η πρώτη προβολή της ευθείας: i_2' είναι παράλληλη στον άξονα γ_{12} και η δεύτερη προβολή της: i_2'' είναι παράλληλη στο δεύτερο ίχνος ϵ_2'' του επιπέδου E.

Οι ευθείες i_1 και i_2 ονομάζονται αντίστοιχα 1^η και 2^η ιχνοπαράλληλη του επιπέδου E, εξ αιτίας ακριβώς της ιδιότητάς τους να έχουν ίχνη παράλληλα με τα ίχνη του επιπέδου στο οποίο ανήκουν.

Εύρεση 2^η S προβολής σημείου M του επιπέδου E

Θεωρούμε στο σύστημα προβολής κατά Monge το τυχαίο επίπεδο E, με ίχνη ϵ_1' και ϵ_2'' . Το σημείο M ανήκει στο επίπεδο E και γνωρίζουμε έστω την πρώτη προβολή του M' (σχ. 62).

Με τη χρήση των ιχνοπαράλληλων μπορούμε να ορίσουμε το σημείο M στο χώρο, δηλαδή να βρούμε και την 2^η προβολή του.

Γνωρίζουμε ότι η 2^η προβολή M'' του σημείου M βρίσκεται σε κάποιο σημείο της κατακόρυφου που διέρχεται από το M' . Από το M' φέρνουμε ευθεία i_1' παράλληλη στο πρώτο ίχνος ϵ_1' του επιπέδου E (σχ. 63). Από το σημείο όπου η i_1' τέμνει τον άξονα γ_{12} φέρνουμε ευθεία κάθετη στον γ_{12} , μέχρι να συναντήσει το δεύτερο ίχνος ϵ_2'' του επιπέδου E και από εκεί ευθεία i_2'' παράλληλη με τον άξονα γ_{12} . Η τομή της i_2'' με την κατακόρυφη από το M' ορίζουν τη 2^η προβολή M'' του σημείου M.

σχ. 62

σχ. 63

Εύρεση των ιχνών επιπέδου του οποίου γνωρίζουμε τις ιχνοπαράλληλες.

Λαμβάνουμε το σύστημα προβολής κατά Monge, όπου γνωρίζουμε ότι οι προβολές i_1' , i_1'' , i_2' και i_2'' είναι οι ιχνοπαράλληλες επιπέδου E , του οποίου ζητούμε τα ίχνη (σχ. 64). Από το σημείο A_2'' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη i_2'' (σχ. 65), η οποία συναντά τον άξονα γ_{12} στο σημείο E_{12} . Όμοια, από το σημείο A_1' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη i_1' , η οποία τέμνει τον άξονα γ_{12} στο ίδιο σημείο E_{12} . Έτσι ορίζονται τα ίχνη ϵ_1' και ϵ_2'' του επιπέδου E .

Τομή επιπέδων

Όπως είναι γνωστό, η τομή δύο επιπέδων είναι ευθεία. Στην παραστατική γεωμετρία πρέπει να ορίσουμε την ευθεία τομής α των δύο επιπέδων E και Σ μέσω των δύο προβολών της α' και α'' (σχ. 66).

Εφ' όσον η ευθεία α είναι η τομή των επιπέδων E και Σ , ανήκει και στα δύο επίπεδα E και Σ . Τα δε ίχνη A_1 και A_2 της ευθείας α θα πρέπει να βρίσκονται πάνω στα ίχνη των επιπέδων E και Σ . Επομένως η 1^η προβολή A_1' του πρώτου ίχνους της α βρίσκεται στην τομή των πρώτων ιχνών των δύο επιπέδων

ϵ_1' και σ_1' και η 2^η προβολή A_1'' , πάνω στον άξονα y_1z_2 (σχ. 67). Όμοια, η 2^η προβολή A_2'' του

δευτέρου ίχνους της α , βρίσκεται στην τομή των δευτέρων ιχνών ϵ_2'' και σ_2'' των E και Σ και η 1^η προβολή A_2' , επίσης πάνω στον άξονα y_1z_2 .

Ενώνοντας το σημείο A_1' με το A_2' και το σημείο A_1'' με το A_2'' βρίσκουμε αντίστοιχα την 1^η και 2^η προβολή α' και α'' της ευθείας τομής των E και Σ .

σχ. 69

ίχνη ε_1' και σ_1' (σχ. 68). Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, όπως και στη γενική περίπτωση, με τη διαφορά ότι η τομή των πρώτων ίχνών των επιπέδων E και Σ βρίσκεται στο άπειρο. Επομένως ολόκληρη η πρώτη προβολή α' της ευθείας τομής α των δύο επιπέδων E και Σ είναι παράλληλη με τα πρώτα ίχνη των επιπέδων (σχ. 69). Εφ' όσον το πρώτο ίχνος της α βρίσκεται στο άπειρο, συνεπάγεται ότι και οι δύο προβολές του θα βρίσκονται στο άπειρο (άρα και το σημείο A_2''). Συμπεραίνουμε επομένως ότι η δεύτερη προβολή α'' είναι παράλληλη στον άξονα $\gamma_1 2$. Από τις προβολές α' και α'' καταλαβαίνουμε ότι η ευθεία α είναι οριζόντια ευθεία.

Τομή ευθείας και επιπέδου

Η σχετική θέση μιας ευθείας κι ενός επιπέδου παρουσιάζει τρεις περιπτώσεις:

- Η ευθεία ανήκει εξ ολοκλήρου στο επίπεδο (άπειρα σημεία τομής)
- Η ευθεία είναι παράλληλη με το επίπεδο (η τομή της ευθείας και του επιπέδου είναι στο

σχ. 70

άπειρο)

- Η ευθεία τέμνει το επίπεδο και το σημείο τομής είναι μοναδικό

Λαμβάνουμε τα επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2 , το τυχαίο επίπεδο E , με ίχνη ϵ_1' και ϵ_2'' και την ευθεία α , με προβολές α' και α'' (σχ. 70) και ζητούμε το σημείο τομής T της ευθείας α με το επίπεδο E .

Στο σχήμα 71 παρουσιάζονται το επίπεδο E μέσω των ιχνών του ϵ_1' και ϵ_2'' , οι προβολές α' και α'' της ευθείας α και οι προβολές του πρώτου και δεύτερου ίχνους της α .

Θεωρούμε ένα βοηθητικό κατακόρυφο επίπεδο Σ τέτοιο ώστε να περιέχει την α . Τότε το πρώτο ίχνος του σ_1' θα ταυτίζεται με την πρώτη προβολή α' της ευθείας α (σχ. 72). Το 2^ο ίχνος σ_2'' του επιπέδου Σ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα γ_2 και περνά από το σημείο

σχ. 71

A_2'' . Σημειώνεται ότι το επίπεδο Σ είναι τελικά το μοναδικό επίπεδο το οποίο περιέχει την ευθεία α και είναι κατακόρυφο. Βρίσκουμε την τομή των δύο επιπέδων E και Σ : η τομή των πρώτων ιχνών μας δίνει το σημείο Λ_1 (Λ_1' και Λ_1'') και η τομή των δευτέρων ιχνών μας δίνει το σημείο Λ_2 (Λ_2' και Λ_2''), όπως φαίνεται στο σχήμα 73.

Η ευθεία λ (σχ. 74) με προβολές λ' και λ'' είναι η ευθεία τομής των δύο επιπέδων E και Σ . Σαν ευθεία τομής, η λ ανήκει στο επίπεδο Σ , επομένως είναι συνεπίπεδη με την α .

Μπορούμε άρα να βρούμε την τομή των ευθειών α και λ . Στο επίπεδο Π_1 οι προβολές α' και λ' των ευθειών α και λ ταυίζονται (σχ. 75). Στο επίπεδο Π_2 όμως οι δεύτερες προβολές α'' και λ'' τέμνονται στο σημείο T'' , από το οποίο βρίσκουμε την 1^η προβολή του πάνω στην λ' .

Το σημείο T (T', T'') είναι το ζητούμενο σημείο τομής του επιπέδου E και της ευθείας α , διότι είναι σημείο της ευθείας α και του επιπέδου E , μια και βρίσκεται στην ευθεία λ , που είναι ευθεία του επιπέδου E .

σχ. 75

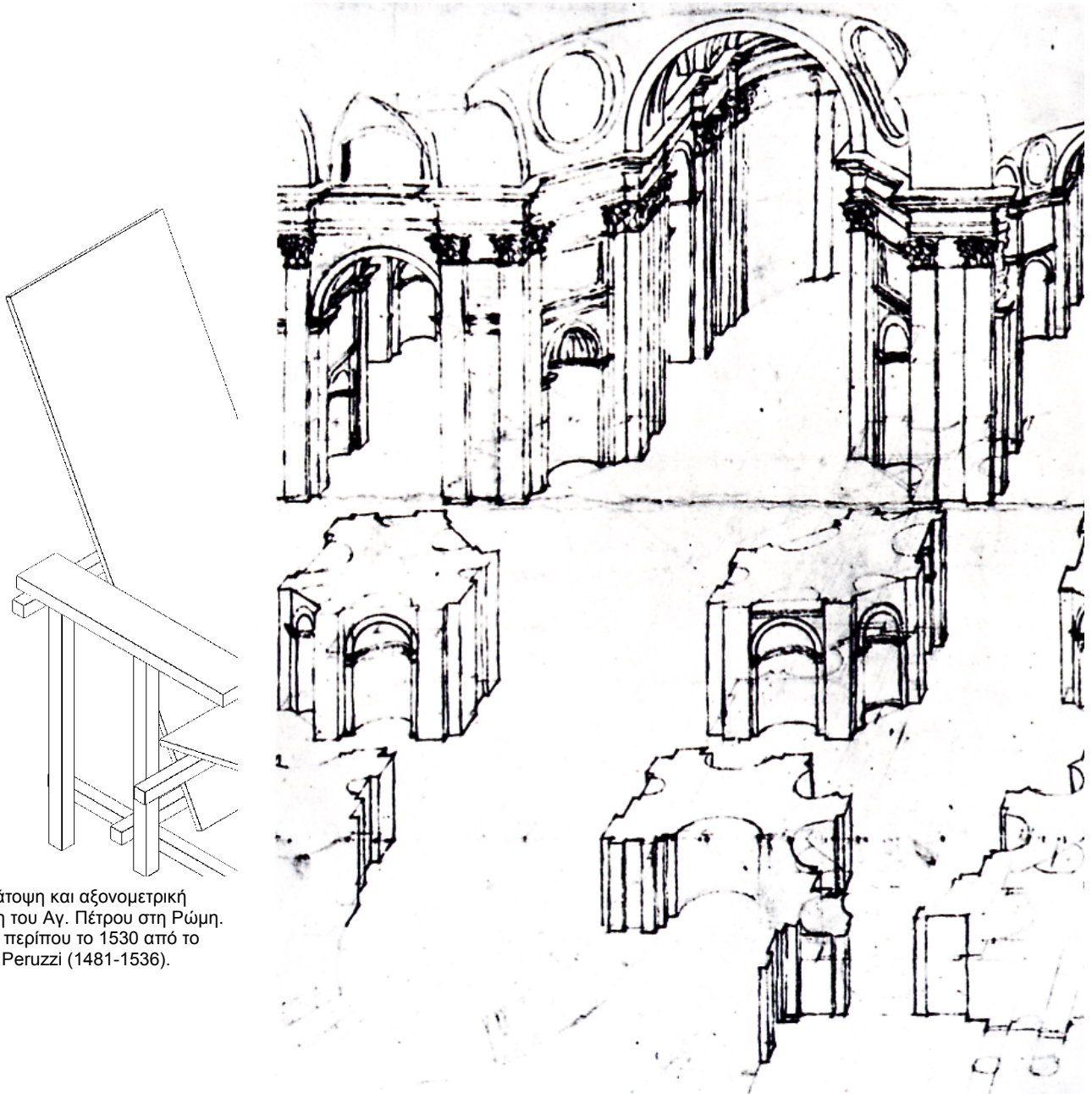
ΑΞΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Εισαγωγή

Η προβολή τρισδιάστατου αντικειμένου πάνω σε δισδιάστατη επιφάνεια αποτέλεσε μια από τις βασικές αναζητήσεις μεθόδων απεικόνισης και απασχόλησε από πολύ παλιά τους ανθρώπους. Ως γνωστό με την απλή παράλληλη προβολή ενός αντικειμένου του χώρου επί ενός επιπέδου, δεν είναι δυνατό να καθοριστεί το σχήμα αυτό καθαυτό αλλά ούτε και η θέση του αντικειμένου στο χώρο.

Η μέθοδος της αξονομετρικής προβολής επιτρέπει την απεικόνιση στερεών σε ένα σχέδιο διατηρώντας τις μετρητικές σχέσεις των τριών διαστάσεων του στερεού καθώς και την παραλληλία των πλευρών του (σε αντίθεση με την προοπτική), με τροποποίηση όμως των επιφανειών του.

Η Αξονομετρία ουσιαστικά επιτρέπει μια τρισδιάστατη (αλλά αφηρημένη) απεικόνιση του χώρου με κέντρο προβολής το άπειρο, και σύμφωνα με την κατεύθυνση προβολής. Είναι δε ιδιαίτερα χρήσιμη για απεικονίσεις κτηρίων καθώς και κατασκευαστικών ή τεχνικών λεπτομερειών καθώς επιτρέπει την απεικόνιση αντικειμένων με διαφορετικούς τρόπους προβάλλοντας τα ταυτόχρονα από διαφορετικές



εικόνα 1 Κάτοψη και αξονομετρική απεικόνιση του Αγ. Πέτρου στη Ρώμη. Σχεδιάστηκε περίπου το 1530 από το Baldassare Peruzzi (1481-1536).

πλευρές και διευθύνσεις, από ψηλά ή χαμηλά, ενώ ταυτόχρονα αποδεικνύεται ιδανική για την μελέτη και διερεύνηση των όγκων των κατασκευών. Παράλληλα μπορεί να συνδυαστεί με τις ορθές προβολές για τη μελέτη αντικειμένων ή κτηρίων τεμνομένων σε διαφορετικά σημεία επιτυγχάνοντας την ταυτόχρονη απεικόνιση του εσωτερικού και του εξωτερικού χώρου. Η αξονομετρική απεικόνιση ενός κτηρίου από ψηλά, μας δίνει τη δυνατότητα απεικόνισής του σαν πρόπλασμα, ενώ αντίθετα η απεικόνισή του από κάτω μας επιτρέπει την απεικόνιση σαν το αντικείμενο ή το κτήριο να είναι τοποθετημένο σε διάφανη βάση.

Σύστημα προβολής

Το σύστημα της αξονομετρικής προβολής έχει άμεση σχέση με το σύστημα Monge και τις ίδιες αρχές. Είναι το σύστημα κατά το οποίο μας δίνεται η δυνατότητα να δούμε τρισδιάστατες εικόνες των σχημάτων του χώρου, χωρίς όμως να έχουμε προοπτική.

Είδαμε στην παραστατική γεωμετρία ότι χρησιμοποιούμε ένα σύστημα αξόνων $Oxyz$, τέτοιο ώστε ο άξονας των y παριστάνεται σαν οριζόντια γραμμή (άξονας y_1), η περιοχή κάτω από τον άξονα y_1 είναι εκείνη των θετικών αποστάσεων και η περιοχή πάνω από τον y_1 είναι η περιοχή των θετικών υψομέτρων (σχ. 1).

O +z

+y

y_1

Το τρισσορθώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ αλλάζει θέση στην αξονομετρία και υπάρχουν διάφοροι τρόποι διάταξής του:

- **Ισομετρική αξονομετρική προβολή.** Είναι η πιο αληθοφανής προβολή. Οι άξονες xyz σχηματίζουν μεταξύ τους ίσες γωνίες 120° και τα μοναδιαία διανύσματα απεικονίζονται από σχέση 1:1:1 (σχ. 2). Μπορούμε να στρέψουμε τους άξονες x και y το πολύ μέχρι 18° και να διατηρήσουμε τα μοναδιαία διανύσματα με τη σχέση 1:1:1 (σχ. 3).
- **Πλάγια διμετρική αξονομετρική προβολή (Cavalière).** Στη μετωπική διμετρική προβολή οι άξονες y και z είναι κάθετοι μεταξύ τους, ενώ ο άξονας x σχηματίζει με τον z γωνία ω , που μπορεί να είναι 30° , 45° ή 60° (σχ. 4). Στην οριζόντια διμετρική προβολή οι άξονες x και y είναι κάθετοι μεταξύ τους, ενώ ο άξονας z σχηματίζει με τον $-x$ γωνία ω , ίση με 30° , 45° ή 60° (σχ. 5). Και στις δύο περιπτώσεις οι αναλογίες των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι 1:1:1/2.
- **Τριμετρική αξονομετρική προβολή.** Στην τριμετρική προβολή οι άξονες x , y , z σχηματίζουν μεταξύ τους τυχαίες χωνίες, τα δε μοναδιαία διανύσματα είναι μεταξύ τους διάφορα (σχ. 6). Συνήθως δεν στρέφουμε τον περισσότερο από 18° από την κατακόρυφη, για να μην έχουμε παράδοξες απεικονίσεις.

+x

σχ. 2

σχ. 1

T η

σχ. 3

σχ. 4

άξονα z

σχ. 5

Απεικόνιση βασικών σχημάτων

Απεικόνιση ευθειών και πολυέδρων

Η κατασκευή μιας αξονομετρικής προβολής είναι θέμα απλό, όταν γνωρίζουμε τις ορθές προβολές (προβολές Monge) ενός αντικειμένου (σχ. 7).

Κατ' αρχήν τοποθετούμε το σημείο έναρξης μετρήσεων, το σημείο O , τόσο στην ορθή, όσο και στην αξονομετρική προβολή και ορίζουμε τις θέσεις και τα μεγέθη των αξόνων x , y , z της αξονομετρικής προβολής. Με τον τρόπο αυτό, κάθε σημείο της ορθής απεικόνισης ορίζεται μέσω των τριών συντεταγμένων του. Μεταφέρουμε τα διανύσματα κάθε σημείου στους αντίστοιχους άξονες της αξονομετρικής προβολής. Στα σχήματα 8 και 9 παρουσιάζονται οι αξονομετρικές απεικονίσεις ενός παραλληλεπιπέδου και μιας ευθείας σε μετωπική διμετρική και ισομετρική αξονομετρική προβολή.

Απεικόνιση κύκλου

Ένας κύκλος κατασκευάζεται στην αξονομετρία μέσω του περιγεγραμμένου του τετραγώνου (σχ. 10). Τα σημεία A , B , Γ , Δ είναι τα μέσα των πλευρών του περιγεγραμμένου τετραγώνου, όπως αυτό έχει μετασχηματιστεί σε πλάγιο παραλληλόγραμμο στην αξονομετρική του προβολή. Οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι συζυγείς διάμετροι της έλλειψης που αναπαριστά τον κύκλο στην αξονομετρία. Μέσω των συζυγών διαμέτρων μπορούμε να κατασκευάσουμε την καμπύλη της έλλειψης*¹.

Για τα στερεά εκ περιστροφής που έχουν έδρες κυκλικές (κύλινδρος και κώνος) κατασκευάζουμε **σχ. 10**

σχ. 9

πρώτα τις αξονομετρικές προβολές των κυκλικών βάσεων και προσδιορίζουμε τις ακραίες γενέτειρες μέσω της ευθείας Pascal*² (σχ 11).

Απεικόνιση σφαίρας

Μία σφαίρα απεικονίζεται αξονομετρικά σαν κύκλος, ανεξάρτητα από το αξονομετρικό σύστημα συντεταγμένων. Ειδικά στην τριμετρική προβολή η απεικόνιση της σφαίρας ως κύκλου είναι το κριτήριο για τον ορθό προσδιορισμό των αξόνων και των μοναδιαίων διανυσμάτων.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 12 μπορούμε να προσδιορίσουμε αξονομετρικά τον οριζόντιο και κύκλους της σφαίρας και με κέντρο τα κέντρα περιβάλλοντα κύκλο, τον κύκλο δηλαδή που Πιο απλά, μπορούμε να προσδιορίσουμε την ενός μέγιστου κύκλου και να κατασκευάσουμε τον κύκλο που προσδιορίζει τη σφαίρα με κέντρο το κέντρο της έλλειψης και διάμετρο ίση με τον μεγάλο άξονα της έλλειψης AB (σχ. 13).

σχ. 11

σχ. 12

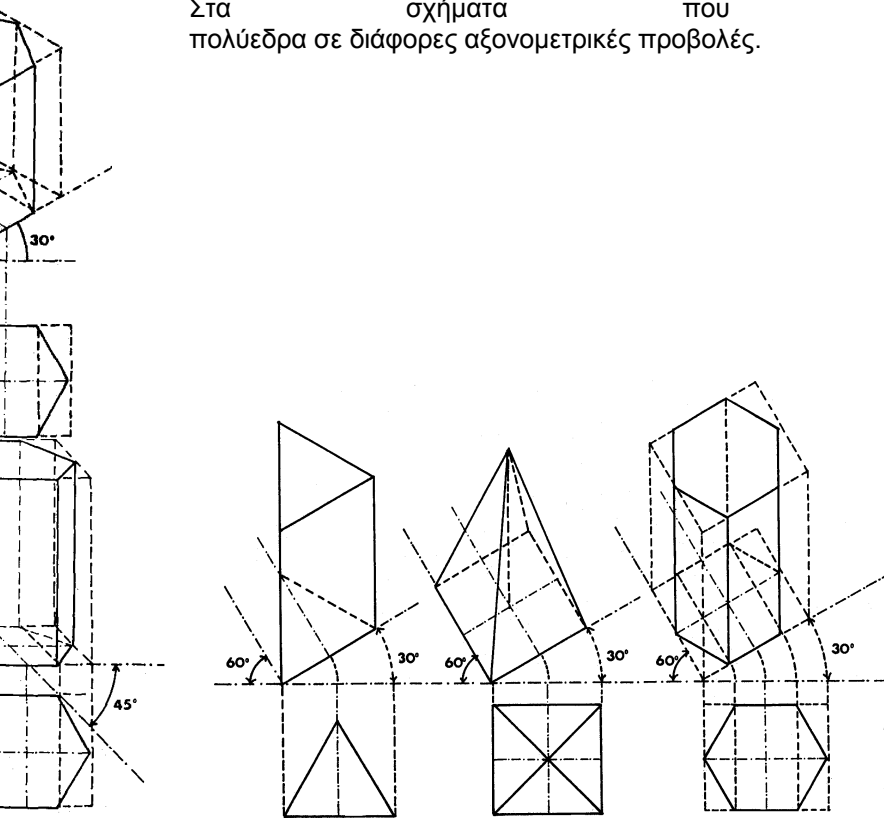
τους δύο κατακόρυφους μέγιστους των ελλείψεων να φέρουμε τον εφάπτεται και στις τρεις ελλείψεις. αξονομετρική προβολή μόνο του

σχ. 13

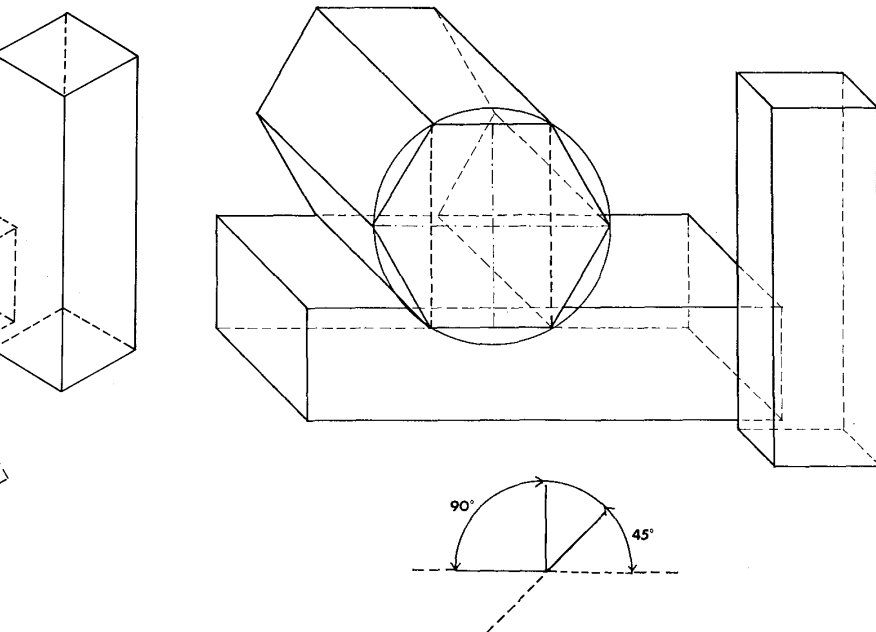
Στα σχήματα που ακολουθούν, παριστάνονται πολύεδρα σε διάφορες αξονομετρικές προβολές.

ακολουθούν,

παριστάνονται



σχ. 16 Ισομετρική στρατιωτική προβολή



σχ. 18 Διμετρική μετωπική προβολή

ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ

Εισαγωγή

Αυτό που στην τέχνη ονομάζουμε συχνά «γραμμική» προοπτική είναι ένα σύστημα αναπαράστασης του τρισδιάστατου χώρου σε επιφάνεια δύο διαστάσεων. Η μέθοδος αυτή απεικόνισης έχει πολλά κοινά με την εμπειρική προοπτική, τον τρόπο δηλαδή που οι άνθρωποι αντιλαμβανόμαστε το χώρο και τα αντικείμενα μέσα σ' αυτόν. Στην πραγματικότητα, επειδή η προοπτική απεικόνιση βασίζεται στη στατική άποψη του ενός σημείου οράσεως και σε γεωμετρικούς υπολογισμούς, επιτυγχάνει μια προσέγγιση μόνο του σύνθετου τρόπου της λειτουργίας της όρασης.

Η προοπτική σαν επιστήμη σχετίζεται με την οπτική, δηλαδή τη μελέτη των νόμων της όρασης, επιστήμη που άρχισε και άνθισε στην αρχαία Ελλάδα και τη Ρώμη. Το προοπτικό σύστημα απεικόνισης όμως αναπτύχθηκε και οριστικοποιήθηκε στις αρχές του 15^{ου} αιώνα, με



ένα μετακινούμενο στόχαστρο. Είναι ο πιο απλός τρόπος κατασκευής ενός προοπτικού.



εικόνα 2 Η εφεύρεση του ντε Κέιζερ

Ένα άλλο σύστημα κατασκευής προοπτικού, με τη χρήση μιας ειδικής ακίδας στην άκρη ενός νήματος, στερεωμένου στον τοίχο. Διατηρείται μ' αυτό τον τρόπο σταθερή η ορθική γωνία του



τους πρωτοποριακούς πειραματισμούς του Filippo Brunelleschi (1 Alberti (1406 – 1472). Ο τελευταίος ειδικά θεωρούσε την επιφάνεια προβολής της προοπτικής εικόνας σαν «ανοιχτό παράθυρο, μέσα από το οποίο βλέπουμε το ζωγραφικό θέμα».

ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ

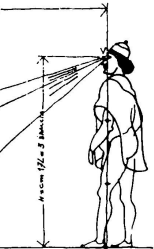
Πρώτος κατέδειξε τις αρχές της γραμμικής προοπτικής ο Brounelesci, γλύπτης και αρχιτέκτονας, που αργότερα έγινε διάσημος για το θόλο του καθεδρικού ναού της Φλωρεντίας. Αυτός όμως που ανακάλυψε και μελέτησε τη γεωμετρική βάση της γραμμικής προοπτικής ήταν ο Alberti, καλλιτέχνης, αρχιτέκτονας, αρχαιογνώστης και γενικά άνθρωπος του πνεύματος.

Βάσισε το σύστημά του στο ύψος του ανθρώπου, το οποίο όρισε να είναι τρεις πήχεις (περίπου 1,80). Καθόρισε απέναντί του μια κατακόρυφη επιφάνεια προβολής και χώρισε τη γραμμή του εδάφους, τη γραμμή δηλαδή τομής της επιφάνειας του πίνακα προβολής και του εδάφους, σε μέρη ανάλογα με τους πήχεις. Έπειτα όρισε ένα σημείο φυγής στη μεσοκάθετο της γραμμής εδάφους και σε ύψος τριών πήχεων. Ένωσε τέλος κάθε τμήμα ενός πήχη με το σημείο φυγής. Σχηματίζεται τελικά ένας τρισδιάστατος προοπτικός κτίσματος, μέσα στον οποίο μπορούν να απεικονιστούν προοπτικά τα σχήματα του χώρου.

Αργότερα και άλλοι σημαντικοί καλλιτέχνες ασχολήθηκαν με το θέμα και ανάμεσα σ' αυτούς ο Albrecht Dürer και ο Leonardo da Vinci.

Σύστημα προβολής

Η προβολή ενός αντικειμένου επάνω σε ένα επίπεδο από ένα συγκεκριμένο σημείο Ο (καθ'



υπόσταση), ονομάζεται κεντρική προβολή ή προοπτική εικόνα του αντικειμένου ή απλά προοπτικό (σχ. 1).

Το σημείο προβολής Ο, ονομάζεται κέντρο προβολής ή σημείο οράσεως ή οπτικό κέντρο.

Η επιφάνεια προβολής, είναι συνήθως ένα κατακόρυφο επίπεδο το οποίο ονομάζεται πίνακας.

σχ. 1

Ο πίνακας τέμνει το οριζόντιο επίπεδο του εδάφους κατά μία ευθεία που ονομάζεται **βάση του πίνακα ή γραμμή του εδάφους** ($\gamma\epsilon$) (σχ. 2).

Οι ευθείες που ξεκινούν από το κέντρο προβολής και προβάλλουν το αντικείμενο στο πίνακα, ονομάζονται **οπτικές ακτίνες**.

Το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο προβολής O και είναι παράλληλο στο οριζόντιο, ονομάζεται **επίπεδο του Οριζοντα** (σχ. 3).

σχ. 2

Η τομή του με τον πίνακα προβολής είναι μία ευθεία παράλληλη προς την γραμμή εδάφους ($\gamma\epsilon$), και την ονομάζουμε **γραμμή του οριζοντα** ($\gamma\omicron$).

Είναι προφανές ότι η απόσταση της γραμμής του εδάφους από την γραμμή του οριζοντα, ισούται με το ύψος του παρατηρητή (σχ. 4).

σχ. 3

Συμβατικά το επίπεδο-πίνακα προβολής ονομάζεται Π και το οριζόντιο επίπεδο e_1 .

Το οριζόντιο επίπεδο είναι απαραίτητο στο παραπάνω προβολικό σύστημα για τον καθορισμό του αντικειμένου στο χώρο, δηλ. τα διάφορα σημεία του αντικειμένου εξαρτώνται από το e_1 μέσω του υψομέτρου τους.

Προοπτικά βασικών σχημάτων του e_1 .

Προοπτικό ευθείας

Προκειμένου να καθορίσουμε το προοπτικό μιας ευθείας α , αρκεί να προσδιορίσουμε τα προοπτικά δύο σημείων της.

Θεωρώντας επί της ευθείας α διάφορα σημεία B, Γ, Δ, \dots , τα προοπτικά τους (B), (Γ), (Δ)..., στον πίνακα Π προσδιορίζονται αν τα προβάλουμε από το O επί του επιπέδου Π , δηλαδή στην τομή των οπτικών ακτινών $OB, O\Gamma, O\Delta$ κλπ με το Π (σχ. 5).

Παρατηρούμε ότι η τυχούσα ευθεία α του οριζοντίου επιπέδου e_1 , συναντά την βάση του πίνακα ($\gamma\epsilon$) σε ένα σημείο A το οποίο έχει προοπτικό τον εαυτό του, δηλαδή $A \equiv (A)$.

Επίσης παρατηρούμε ότι όσο απομακρυνόμαστε οπτικές ακτίνες από το O τείνουν να γίνουν σχ. 4 επί της α προς το άπειρο, οι παράλληλες προς το e_1 και την α (σχ. 6).

Έτσι, η τομή της οπτικής ακτίνας, η οποία είναι παράλληλη στην α , με τον πίνακα Π , είναι ένα σημείο της γραμμής του οριζοντα και ονομάζεται σημείο φυγής Φ_1 της α . (σχ. 7).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, προκειμένου να εντοπίσουμε το σημείο φυγής της ευθείας α , αρκεί από το O να φέρουμε παράλληλη προς την α και να τμήσουμε το Π .

Δηλαδή το σημείο φυγής Φ_1 τυχούσας ευθείας α του e_1 βρίσκεται στη γραμμή του οριζοντα ($\gamma\omicron$), και είναι η τομή της οπτικής ακτίνας (με την οποία προβάλλεται από το O το επ' άπειρον σημείο Φ^∞ της α) με το επίπεδο του πίνακα Π .

Ύστερα από την παραπάνω ανάλυση, για να βρούμε το προοπτικό ευθείας α του e_1 , που τέμνει τη βάση του πίνακα στο $A \equiv (A)$, φέρνουμε την $O\Phi_1$ παράλληλη με την α και ορίζουμε το Φ_1 στη γραμμή του οριζοντα. Ενώνουμε το Φ_1 με το $A \equiv (A)$ και η ευθεία $\Phi_1(A)$, είναι η προοπτική (α) της α (σχ. 8).

Παρατηρούμε ότι αν O' είναι η προβολή του σημείου οράσεως O στο επίπεδο e_1 , η παράλληλη από την προβολή O' του προς την ευθεία α , τέμνει τη βάση του πίνακα στο Φ_1' το οποίο είναι η προβολή του σημείου φυγής Φ_1 , στο επίπεδο του εδάφους (σχ. 9).

σχ. 10

Έτσι για να σχεδιάσουμε, πιο απλά το σημείο φυγής Φ_1 ευθείας α , μπορούμε να φέρουμε την $O'\Phi_1'$ παράλληλη στην α και από το σημείο τομής της Φ_1' με την γραμμή εδάφους κάθετη σ' αυτή. Το σημείο τομής με την γραμμή του ορίζοντα είναι το σημείο φυγής Φ_1 .

σχ. 11

Προκειμένου να κατασκευάσουμε το προοπτικό της ευθείας στο δισδιάστατο χώρο, κατακλείνουμε το Π στο e_1 περιστρέφοντάς το περί την γραμμή του εδάφους (σχ. 10).

Η προοπτική εικόνα (α) της ευθείας α κατασκευάζεται τότε ως εξής: η ευθεία α συναντά τη γραμμή του εδάφους (βάση του πίνακα) στο σημείο A το οποίο ταυτίζεται με το προοπτικό του (A). Η παράλληλη από το O' προς την α συναντάει την γραμμή εδάφους στο Φ' (προβολή του σημείου φυγής). Η κάθετη από το Φ' προς τη γραμμή του εδάφους τέμνει την γραμμή του ορίζοντα στο σημείο φυγής Φ . Η ευθεία ΦA είναι η (α), προοπτική εικόνα της ευθείας α (σχ. 11,12).

σχ. 12

Επειδή όπως είναι φανερό, όλες οι παράλληλες ευθείες έχουν κοινό επ' άπειρον σημείο, κατά συνέπεια θα έχουν κοινό σημείο φυγής (σχ. 13).

Επίσης παρατηρούμε ότι:

- Η γραμμή του ορίζοντα είναι η ευθεία φυγής του οριζοντίου επιπέδου e_1 (σχ. 13)
- Στη γραμμή του ορίζοντα ανήκουν τα σημεία φυγής όλων των οριζοντίων ευθειών. (σχ. 14)

σχ. 13

σχ. 14

- Αν ευθεία α είναι κάθετη στη $\gamma\epsilon$ (και στον πίνακα Π), το σημείο φυγής της Φ_O είναι η ορθή προβολή του O στο Π και ονομάζεται **πρωτεύον σημείο φυγής** (σχ. 15).

Παράλληλη μετατόπιση βάσης

Προκειμένου να αποφεύγουμε την επικάλυψη του αρχικού σχήματος και του προοπτικού του, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της **παράλληλης μετατόπισης της βάσης** (σχ. 16). Διατηρούμε τα δεδομένα: γραμμή εδάφους, γραμμή ορίζοντα και αρχικό σχήμα στην αρχική τους θέση και μεταφέρουμε παράλληλα το προοπτικό με τα σημεία αναφοράς του σε νέα θέση.

Η απόσταση γραμμής εδάφους και γραμμής πίνακα δεν μεταβάλλεται. Η παράλληλη μεταφορά γίνεται αποκλειστικά και μόνο για λόγους ευκρίνειας του προοπτικού. Μετά την παράλληλη μεταφορά η αρχική γραμμή του ορίζοντα δεν είναι απαραίτητο να σχεδιάζεται.

Προοπτικό σημείου

Αν θεωρήσουμε ότι τυχαίο σημείο A είναι η τομή δύο ευθειών ρ και σ του e_1 , τότε η τομή των δύο προοπτικών ευθειών (ρ) και (σ) μας δίνουν την προοπτική εικόνα του A (σχ. 17).

Για να σχεδιάσουμε λοιπόν το προοπτικό τυχαίου σημείου A , σχεδιάζουμε πρώτα τα προοπτικά δύο ευθειών που περνούν από το A και η τομή τους μας δίνει το (A) .

**ΟΠΤΙ
ΚΕΣ
ΑΚΤΙ
ΝΕΣ**

Μ ι α
εντελ
ώ ς
διαφο
ρετικ
ή
μέθο
δο ς

σχεδίασης του προοπτικού του σημείου A είναι αυτή των **οπτικών ακτινών** (σχ. 18).

Οπτικές ακτίνες είναι οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο οράσεως O και κάποιο σημείο A . Προβάλλουν δε τα σημεία του χώρου στον πίνακα Π .

σχ. 18

Η οπτική ακτίνα OA και η προβολή της $O'A$ στο e_1 , ορίζουν ένα κατακόρυφο επίπεδο $OA O'$, το οποίο τέμνει τον πίνακα Π κατά την κατακόρυφη ευθεία $A_1(A)$, που διέρχεται από το προοπτικό του A , δηλαδή το (A) (σχ. 18). Παρατηρούμε ότι η προβολή $O'A$ της οπτικής ακτίνας OA , τέμνει τη γραμμή του εδάφους σ' ένα σημείο A_1 . Η κάθετη από το A_1 στην $\gamma\epsilon$ περνάει από το προοπτικό (A) του A (σχ. 19).

Επισημαίνεται ότι η μέθοδος προσδιορισμού ενός σημείου μέσω οπτικής ακτίνας προαπαιτεί να έχει προσδιοριστεί η προοπτική εικόνα του φορέα του σημείου, δηλαδή η προοπτική εικόνα μιας ευθείας στην οποία ανήκει το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος αυτή σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του μετωπικού προοπτικού, που θα μελετήσουμε παρακάτω, αλλά και στις περιπτώσεις κατά τις οποίες κάποιο από τα σημεία φυγής βρίσκεται έξω από τη σχεδιαστική επιφάνεια.

Προοπτικό τυχαίου σχήματος του επιπέδου

Σχεδιάζουμε στο e_1 τυχαίο σχήμα π.χ. ένα σχ. 19
 τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου ζητάμε την προοπτική εικόνα.

Π ρ
 οεκ
 τείν
 ο υ

σχ. 20

με τις πλευρές του σχήματος $AB\Gamma$ μέχρι να συναντήσουν τη βάση του πίνακα ($\gamma\epsilon$) στα σημεία 1, 2, και 3, τα οποία σύμφωνα με τα προηγούμενα συμπίπτουν με τις προοπτικές εικόνες τους. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα προοπτικά των ευθειών αυτών, ενώνοντας τα σημεία 1 και Φ_1 , 2 και Φ_3 , 3 και Φ_2 . Το προοπτικό του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζεται από τις τομές των ευθειών αυτών (σχ. 20).

Προοπτικό παραλληλογράμμου

Προκειμένου να κατασκευαστεί το προοπτικό σχήμα παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αρκεί να σχεδιάσουμε τα προοπτικά των τεσσάρων ευθειών των πλευρών του σχήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, προεκτείνουμε όσες πλευρές του σχήματος δεν τέμνουν ήδη τη γραμμή εδάφους και ορίζουμε τα σημεία 1, 2, 3 και 4. Από το σημείο οράσεως O' φέρνουμε ευθείες παράλληλες στις πλευρές του παραλληλογράμμου και προσδιορίζουμε τα σημεία φυγής Φ_1 και Φ_2 .

Προβάλλοντας τα σημεία 1 και 4 από το Φ_1 και 2, 3 από το Φ_2 , προκύπτει το προοπτικό του σχήματος ΑΒΓΔ (σχ. 21).

Προοπτικό ορθογωνίου παραλληλογράμμου - Μετωπικό προοπτικό.

Είναι μια ειδική περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου, με το σχήμα μας να έχει πλευρές παράλληλες και κάθετες προς τον πίνακα (σχ. 22). Στην περίπτωση αυτή οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ έχουν σημείο φυγής το πρωτεύον σημείο Φ_O , ενώ οι ΑΔ και ΒΓ έχουν σημείο φυγής στο άπειρο. Το προοπτικό λέγεται *μετωπικό*.

Προεκτείνουμε τις ΑΒ και ΓΔ μέχρι να συναντήσουν τη γε στα σημεία 1 και 2 αντίστοιχα. Μπορούμε επομένως να προσδιορίσουμε τις προοπτικές εικόνες των ΑΒ και ΓΔ, όμως δεν μπορούμε να ορίσουμε τα σημεία (Α), (Β), (Γ) και (Δ), παρά μόνο με τη μέθοδο των οπτικών ακτίνων.

Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε προοπτικά ίσα μέρη

Το ευθύγραμμο τμήμα AB ζητούμε να χωριστεί σε 4 ίσα μέρη στην προοπτική του εικόνα (σχ. 23). Βρίσκουμε την προοπτική εικόνα της ευθείας και με οπτικές ακτίνες προσδιορίζουμε στον φορέα της προοπτικής εικόνας της ευθείας τα προοπτικά (A) και (B) των σημείων A και B. Από το σημείο (A) σχεδιάζουμε οριζόντια ημιευθεία (A)ε και χωρίζουμε σ' αυτή τα 4 ίσα μέρη. Χρησιμοποιούμε δηλαδή την εφαρμογή στην προοπτική του θεωρήματος του Θαλή*, με τη διαφορά ότι αντί για παράλληλες ευθείες, από το σημείο (B) φέρνουμε *προοπτικά* παράλληλες ευθείες, δηλαδή συγκλίνουσες στο σημείο φυγής Φ2. Ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ2 τα υπόλοιπα τμήματα α της (A)ε και προσδιορίζουμε τα τμήματα $\bar{\alpha}$, που είναι προοπτικά ίσα μεταξύ τους. σχ. 23

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε τμήματα ανάλογα, με δοθέντα λόγο.

Προοπτικά σχημάτων σε επίπεδα παράλληλα στο e_1

Προοπτικό οριζόντιας ευθείας

Μία οριζόντια ευθεία α, που δεν βρίσκεται στο επίπεδο e_1 έχει 1^η προβολή στο επίπεδο e_1 την ευθεία α'. Οι ευθείες α και α' είναι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες στο χώρο, επομένως έχουν κοινό σημείο φυγής Φ1 (σχ. 24). Η ευθεία α' τέμνει τη γε στο σημείο 1 και η ευθεία α σημείο M. Τα σημεία M και 1 βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη ευθεία και ορίζουν το υψόμετρο της ευθείας α από το επίπεδο του εδάφους e_1 . Κατακλίνοντας το επίπεδο Π στο e_1 , το υψόμετρο zM θα παραμείνει ίσο με το πραγματικό υψόμετρο του σημείου M από το έδαφος. σχ. 25

κοινό σημείο φυγής Φ1 (σχ. 24). τέμνει το επίπεδο του πίνακα στο

Επομένως μπορούμε να προσδιορίσουμε την προοπτική εικόνα (α) της ευθείας α, ως εξής: από το σημείο 1, που είναι η τομή της προβολής α' της α με τη γραμμή του εδάφους γε, ορίζουμε κατακόρυφα το υψόμετρο zM του σημείου M (σχ. 25) και ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ1. Η ευθεία Φ1M είναι η προοπτική εικόνα (α) της ευθείας α.

Προοπτικό ορθού πρίσματος

1. Το πρίσμα εδράζεται στο e_1

Αρχικά κατασκευάζουμε το προοπτικό της κάτω βάσης του πρίσματος, ενώνοντας τα σημεία 1 και 3 με το Φ2 και τα 2 και 4 με το Φ1 (σχ. 26). Φέρνουμε κάθετες ευθείες από καθένα από τα σημεία της κάτω βάσης του πρίσματος (A'), (B'), (Γ') και (Δ'). Από οποιοδήποτε από τα 1, 2, 3 ή 4, έστω το 4, φέρνουμε ευθεία κάθετη στη γε και ορίζουμε το σημείο 5, που απεικονίζει το ύψος h1 του πρίσματος. Ενώνουμε το σημείο 5 με το Φ1. Στην τομή της κάθετης από το (Δ') και της 5Φ1 είναι το σημείο (Δ), το προοπτικό του σημείου Δ της άνω βάσης του πρίσματος. Στην τομή της Φ1(Δ) με την κάθετη από το (Γ') βρίσκεται το σημείο (Γ). Φέρνουμε την Φ2(Γ) και στην τομή της με την κάθετη από το (B') βρίσκεται το σημείο (B) κ.ο.κ.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στο πρίσμα του σχήματος 26 το ύψος του πρίσματος h_1 είναι μικρότερο από το ύψος του οριζοντα h και ως εκ τούτου ο παρατηρητής βλέπει την άνω βάση του πρίσματος, την έδρα (Α)(Β)(Γ)(Δ). Αντίθετα, στο σχήμα 27 το ύψος h του οριζοντα είναι μικρότερο από το ύψος h_2 του πρίσματος και ο παρατηρητής δεν βλέπει την άνω βάση του.

2. Το πρίσμα δεν εδράζεται στο e_1

Στην περίπτωση αυτή το πρίσμα δεν εδράζεται στο επίπεδο e_1 του εδάφους, αλλά απέχει απ' αυτό υψόμετρο h_1 και έχει ύψος h_2 (σχ. 28).

Μπορούμε να εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίζοντας το ύψος h_1 σε κάθε κάθετη από τα σημεία 1, 2, 3 και 4, όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πρίσμα εδράζεται σε ένα νέο έδαφος, που βρίσκεται σε υψόμετρο h_1 πάνω από το αρχικό. Έτσι η γε μετατοπίζεται κατά h_1 στην γε1. Από εδώ και πέρα εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, προσδιορίζοντας τα σημεία 1, 2, 3 και 4, για να κατασκευάσουμε την κάτω βάση του πρίσματος, στην γε1, αντί της γε.

σχ. 28

Προοπτικό τυχαίας ευθείας

Όπως γνωρίζουμε ήδη, όλες οι οριζόντιες ευθείες έχουν σημεία φυγής πάνω στη γραμμή του ορίζοντα. Οι ευθείες που σχηματίζουν κάποια γωνία ω με το επίπεδο του εδάφους e_1 έχουν σημεία φυγής πάνω στο επίπεδο Π του πίνακα, αλλά *όχι πάνω στον ορίζοντα*. Σε οποιαδήποτε περίπτωση ισχύει η συνθήκη που ισχύει και για τις οριζόντιες ευθείες, ότι δηλαδή **οι παράλληλες μεταξύ τους ευθείες του χώρου έχουν κοινό σημείο φυγής**.

Η τυχαία ευθεία α έχει προβολή την α' στο επίπεδο e_1 και έστω ότι τέμνει το επίπεδο του πίνακα στο σημείο 1 (σχ. 29), όπως και η προβολή της α' . Η ευθεία α σχηματίζει με το e_1 (επομένως και με την α') γωνία ω , που αναπαριστά την κλίση της ευθείας α ως προς το επίπεδο e_1 . Για να προσδιορίσουμε το επ' άπειρον σημείο της α' , το σημείο φυγής της α' , φέραμε από το O ευθεία παράλληλη στην α' , που τέμνει τον πίνακα στο σημείο Φ . Όμοια, για να βρούμε το σημείο φυγής της α , φέρνουμε από το O ευθεία παράλληλη στην α , που τέμνει τον πίνακα στο σημείο Φ_α . Η γωνία $\Phi_\alpha \hat{O} \Phi$ είναι ίση με τη γωνία ω , λόγω των παραλλήλων φορέων τους. Το σημείο Φ_α είναι το σημείο φυγής της α , η δε προοπτική εικόνα (α) της α είναι η ευθεία $\Phi_\alpha 1$.

Η γωνία ω βρίσκεται στο χώρο και δεν μπορούμε στις δύο διαστάσεις μιας σχεδιαστικής επιφάνειας να προσδιο-ρίσουμε το σημείο φυγής της α . Πρέπει επομένως να την μεταφέρουμε σε κάποιο από τα επίπεδα e_1 ή Π . Μεταφέρουμε τη γωνία $\Phi_{\alpha}\hat{O}\Phi$ στον πίνακα Π (σχ. 30), γράφοντας τόξο κύκλου με κέντρο το σημείο Φ και ακτίνα $r=\Phi O$. Το σημείο O μεταφέρεται στο σημείο T . Η γωνία ω βρίσκεται τώρα στο επίπεδο Π και είναι η $\Phi_{\alpha}T\Phi$. Προβάλλουμε το τόξο (Φ,r) και το σημείο T στο επίπεδο e_1 , στα (Φ',r) και T' .

σχ. 30

Μετά την κατάκλιση του Π στο e_1 και την παράλληλη μετατόπιση, έχουμε την εικόνα του σχήματος 31. Έχοντας την ευθεία α μέσω της προβολής της α' , βρίσκουμε το σημείο φυγής Φ της α' και την προβολή του Φ' . Με κέντρο Φ' και ακτίνα $r=\Phi'O'$ γράφουμε τόξο κύκλου, που τέμνει τη $\gamma\epsilon$ στο σημείο T' . Μεταφέρουμε το T' στη δεύτερη $\gamma\epsilon$ και σχηματίζουμε εκεί τη γνωστή γωνία ω . Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο γωνίες ω συμμετρικές, με άξονα συμμετρίας την $\gamma\epsilon$. Ο φορέας της άνω γωνίας ω τέμνει την κατακόρυφη από το σημείο φυγής Φ στο σημείο φυγής $\Phi_{\alpha 1}$ της α_1 . Η κάτω γωνία ω δίνει το σημείο φυγής $\Phi_{\alpha 2}$ της α_2 , η οποία είναι στο χώρο συμμετρική της α_1 ως προς το επίπεδο e_1 .

Θεωρήσαμε αρχικά ότι η κεκλιμένη ευθεία α έχει σημείο τομής με τον πίνακα Π ακριβώς πάνω στην $\gamma\epsilon$. Μια οποιαδήποτε ευθεία β , παράλληλη της α , θα έχει το ίδιο σημείο φυγής με την α , οπότε για τον προσδιορισμό του σημείου φυγής της β μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ευθεία α .

σχ. 31

Ο προσδιορισμός των σημείων φυγής κεκλιμένων ευθειών εφαρμόζεται όταν το αντικείμενο που θέλουμε να απεικονίσουμε προοπτικά περιλαμβάνει στέγες, ράμπες, όπως επίσης σκάλες με πολλά σκαλοπάτια, όπου είναι χρήσιμος ο προσδιορισμός του σημείου φυγής των ευθειών που ενώνουν τα άνω και κάτω σημεία των υψών (ριχτιών) των σκαλοπατιών (σχ. 32). Μια ακόμη εφαρμογή είναι σε θέματα σκιαγραφίας σε προοπτικές απεικονίσεις*.

σχ. 32

Προοπτικό κύκλου

Η προοπτική εικόνα ενός κύκλου είναι γενικά έλλειψη, αλλά αυτό εξαρτάται από τη θέση του παρατηρητή και του πίνακα.

Ορίζουμε ένα επίπεδο παράλληλο στον πίνακα, που να περνά από το σημείο οράσεως. Η τομή του με το επίπεδο του εδάφους είναι η ευθεία γπ (σχ. 33). Εάν η ευθεία γπ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο, η προοπτική εικόνα του είναι έλλειψη. Εάν η ευθεία γπ έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο (σχ. 34) είναι δηλαδή εφαπτόμενη στον κύκλο, τότε η προοπτική εικόνα του κύκλου είναι τμήμα παραβολής. Τέλος, αν η ευθεία γπ τέμνει τον κύκλο σε πάνω από ένα σημεία (σχ. 35), τότε η προοπτική εικόνα του κύκλου είναι τμήμα ενός σκέλους υπερβολής.

1. Προοπτικό κύκλου του επιπέδου e_1

Είτε εργαζόμαστε σε μετωπικό προοπτικό, είτε σε προοπτικό δύο σημείων φυγής Φ1 και Φ2, κατασκευάζουμε το περιγε-γραμμένο τετράγωνο του κύκλου ΑΒΓΔ, του οποίου προσδιορίζουμε την προοπτική εικόνα (Α)(Β)(Γ)(Δ) (σχ. 36,37). Γράφουμε τις διαγωνίους (Α)(Γ) και (Β)(Δ). Από την τομή των διαγωνίων ενώνουμε με τα σημεία φυγής (στο μετωπικό προοπτικό ενώνουμε με το Φ_Ο και φέρνουμε τη δεύτερη ευθεία παράλληλη στην γε). Μ' αυτό τον τρόπο ορίζουμε τα σημεία επαφής της έλλειψης στις πλευρές του περιγεγραμμένου προοπτικού του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Τα τέσσερα αυτά σημεία επαφής δεν είναι γενικά αρκετά, ως εκ τούτου προσδιορίζουμε και τα σημεία τομής της έλλειψης με τις διαγωνίους (Α)(Γ) και (Β)(Δ):

- Στο μετωπικό προοπτικό, όπου η (Α)(Β) είναι ευθεία παράλληλη στη γε, γράφουμε ημικύκλιο με κέντρο το μέσο της και διάμετρο το μήκος της (Α)(Β) (σχ. 35). Σχεδιάζουμε τις ακτίνες που σχηματίζουν γωνίες 45^Ο με την (Α)(Β) και φέρνουμε κάθετες στη γε ευθείες. Ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ_Ο.
- Στο προοπτικό δύο σημείων, όπου η (Α)(Β) δεν είναι παράλληλη στη γε, κατασκευάζουμε από το (Β) ευθεία παράλληλη στη γε, μέχρι να τμήσει την προέκταση της (Α)(Δ) στο σημείο Σ (σχ. 36). Γράφουμε ημικύκλιο με κέντρο το μέσο του Σ(Β) και διάμετρο Σ(Β). Σχεδιάζουμε τις ακτίνες που σχηματίζουν γωνίες 45^Ο με την Σ(Β) και φέρνουμε κάθετες στη γε ευθείες. Ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ2.

σχ. 36

Γνωρίζοντας πλέον 8 σημεία (και στις δύο περιπτώσεις) της έλλειψης, η κατασκευή της γίνεται σχετικά εύκολα με γραφικό τρόπο.

2. Προοπτικό κατακόρυφου κύκλου

Η προβολή του κύκλου και του περιγεγραμμένου σ' αυτόν τετραγώνου έχουν προβολή στο e₁ ένα ευθύγραμμο τμήμα, όπου τα σημεία Α, Δ και Β, Γ ταυτίζονται (σχ. 38). Κατασκευάζουμε την προοπτική εικόνα (Α)(Β) της κάτω πλευράς ΑΒ του περιγεγραμμένου τετραγώνου και στο σημείο 1 υψώνουμε κατά h=ΑΒ. Προσδιορίζουμε και τα σημεία (Γ) και (Δ), χαράζουμε τις διαγωνίους (Α)(Γ) και (Β)(Δ) και χρησιμοποιούμε την πλευρά (Α)(Δ) ακριβώς όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα για να προσδιορίσουμε τα 8 σημεία από τα οποία διέρχεται η έλλειψη, η προοπτική εικόνα του κατακόρυφου κύκλου.

σχ. 37

Στην ειδική περίπτωση που ο κύκλος βρίσκεται σε μετωπικό επίπεδο, η προοπτική του εικόνα είναι κύκλος.

3. Προοπτικό κύκλου σε τυχαίο επίπεδο

Σ' αυτή την περίπτωση το περιγεγραμμένο του κύκλου τετράγωνο προβάλλεται στο επίπεδο e_1 στο ορθογώνιο παραλληλό-γραμμο $A'B'Γ'D'$ (σχ. 39). Κατασκευάζουμε την προοπτική εικόνα του $ABΓΔ$ και προεκτείνουμε τις κεκλιμένες πλευρές $(A)(Δ)$ και $(B)(Γ)$ μέχρι να τμήσουν την κατακόρυφη από το Φ_1 , προσδιορίζοντας έτσι το σημείο φυγής τους Φ . Γράφουμε τις διαγωνίους $(A)(Γ)$ και $(B)(Δ)$ και ενώνουμε την τομή τους με τα Φ και Φ_2 .

Από το σημείο (A) φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη $γε$ μέχρι να τμήσει την προέκταση της $\Phi_1(B)$ στο σημείο P και κατασκευάζουμε ημικύκλιο με κέντρο το μέσο του $(A)P$ και διάμετρο $(A)P$.

Παρατηρούμε ότι η ευθεία που ενώνει το μέσο της $(A)P$ με το Φ_1 διέρχεται από το σημείο 1, το οποίο είναι το σημείο της $(A)(B)$ όπου καταλήγει η προοπτική εικόνα της διαμέτρου του κύκλου από το Φ .

Σχεδιάζουμε τις ακτίνες που σχηματίζουν γωνίες 45° με την $(A)P$ και φέρνουμε κάθετες στην $(A)P$ ευθείες. Ενώνουμε με το σημείο φυγής Φ_1 και προσδιορίζουμε τα σημεία 2 και 3, τα οποία ενώνουμε με το Φ . Ορίζουμε μ' αυτό τον τρόπο τα 8 βασικά σημεία της έλλειψης και την σχεδιάζουμε γραφικά.

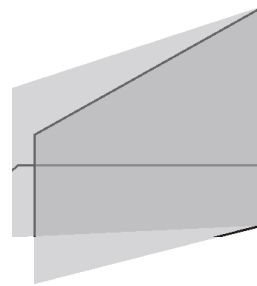
Προοπτικά στερεών σχημάτων

Από τα βασικά στερεά σχήματα, αυτά που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και κάποιες ιδιαιτερότητες στην κατασκευή της προοπτικής εικόνας τους είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα.

Προοπτικό κυλίνδρου

1. Κατακόρυφος κύλινδρος

Η προοπτική εικόνα κατακόρυφου κυλίνδρου κατασκευάζεται ξεκινώντας από την κατασκευή των προοπτικών της κάτω και άνω βάσης του, που είναι κύκλοι σε παράλληλα οριζόντια επίπεδα (σχ. 40). Κατασκευάζουμε το προοπτικό της κάτω βάσης, όπως είδαμε παραπάνω, προσδιορίζουμε το προοπτικό του περιγεγραμμένου τετραγώνου της άνω βάσης και μεταφέρουμε κατακόρυφα τα 8 σημεία ορισμού της έλλειψης της κάτω βάσης στους αντίστοιχους φορείς της άνω βάσης.



σχ. 40

στις βάσεις του κυλίνδρου (σχ. 40). Για να προσδιορίσουμε τα σημεία επαφής M και N, φέρνουμε από το O' (σχ. 41) τις εφαπτόμενες στην προβολή των βάσεων του κυλίνδρου*¹, οι οποίες είναι ταυτόχρονα και οπτικές ακτίνες των σημείων επαφής M και N.

Ένας άλλος τρόπος να προσδιορίσουμε τα M και N είναι να βρούμε τις εφαπτόμενες των ελλείψεων των βάσεων μέσω της ευθείας Pascal, γνωρίζοντας ότι η διεύθυνση των γενετειρών είναι κατακόρυφη*².

2. Οριζόντιος κύλινδρος

Ο οριζόντιος κύλινδρος εδράζεται στο επίπεδο Π₁ και για να βρούμε την προοπτική του εικόνα κατασκευάζουμε κατ' αρχήν τις προοπτικές εικόνες των βάσεων του, που είναι κύκλοι σε δύο κατακόρυφα επίπεδα.

Οι ακραίες γενέτειρες ορίζονται από τα δύο κεκλιμένα επίπεδα, που φαίνονται στο σχήμα 42 και περνούν από το σημείο οράσεως. Αρκεί επομένως να προσδιορίσουμε τα σημεία M και N στη μία από τις δύο βάσεις του κυλίνδρου, για να ορίσουμε τις ακραίες γενέτειρες συγκλίνουσες προς το σημείο φυγής Φ₁ (σχ. 43). Όπως φαίνεται στο σχήμα 42, το σημείο T είναι η προβολή του σημείου οράσεως O στο επίπεδο R, το οποίο είναι το επίπεδο της μίας βάσης του κυλίνδρου. Το σημείο T απέχει από τη βάση του πίνακα απόσταση ίση με την OO', δηλαδή ίση με το ύψος του ορίζοντα από το έδαφος.

σχ. 43

Έχοντας την προβολή του κυλίνδρου στο e_1 (σχ. 43), προεκτείνουμε την μία από τις δύο ευθείες της βάσης του κυλίνδρου και κάνουμε κατάκλιση του επιπέδου R στο επίπεδο e_1 . Ορίζουμε την απόσταση TT_0 ίση με το ύψος του ορίζοντα. Από το σημείο T_0 φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο της βάσης του κυλίνδρου* και προσδιορίζουμε τα M_0 και N_0 , τα οποία προβάλλουμε (ανακλίνουμε) στην προβολή της βάσης και ορίζουμε τα M' και N' . Φέρνουμε τέλος τις οπτικές ακτίνες προς τα M' και N' για να ορίσουμε τις προοπτικές εικόνες (M) και (N) των M_0 και N_0 (σχ. 43).

Και σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να βρούμε τις εφαπτόμενες στις ελλείψεις των βάσεων του κυλίνδρου μέσω της ευθείας Pascal*.

Προοπτικό κώνου

Η προοπτική εικόνα ενός κώνου προκύπτει από την προοπτική εικόνα της καμπύλης της βάσης του, όταν αυτή ενωθεί με την κορυφή του. Όταν η βάση του κώνου είναι κύκλος του e_1 , εργαζόμαστε όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, για να προσδιορίσουμε το προοπτικό της καμπύλης της βάσης του και της κορυφής του.

Το τμήμα του κώνου που ο παρατηρητής βλέπει (σχ. 44) ορίζεται από τα κεκλιμένα εφαπτόμενα επίπεδα προς τη βάση του κώνου, τα οποία περνούν από το σημείο οράσεως O . Τα σημεία M και N είναι τα σημεία των εφαπτομένων της βάσης του κώνου από το σημείο Σ , που ορίζεται σαν το ίχνος της KO στο επίπεδο της βάσης του κώνου.

Σύμφωνα με τα μέχρι τώρα γνωστά, κατασκευάζουμε το προοπτικό της βάσης του κώνου και της κορυφής του (σχ. 45). Ενώνουμε τα σημεία O' και K στην προβολή του κώνου και από το σημείο K φέρνουμε ευθεία κάθετη στην KO' . Στην ευθεία αυτή υπολογίζουμε το ύψος του κώνου και ορίζουμε το σημείο K_O . Από το σημείο O' φέρνουμε ευθεία κάθετη στην KO' , υπολογίζουμε το ύψος του σημείου O (δηλαδή το ύψος του ορίζοντα) και ορίζουμε το σημείο O_O . Ενώνουμε τα K_O και O_O και προεκτείνουμε μέχρι η ευθεία να τμηθεί με την KO' στο σημείο Σ . Από το Σ φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο της

βάσης του κώνου και ορίζουμε τα σημεία επαφής M και N. Βρίσκουμε τις προοπτικές εικόνες των M και N με οπτικές ακτίνες.

Και εδώ μπορούμε να προσδιορίσουμε τις επαπτόμενες του κώνου με την ευθεία Pascal*.

Προοπτικό σφαίρας

Η προοπτική εικόνα μιας σφαίρας είναι γενικά έλλειψη, όμως αυτό εξαρτάται από τη θέση του παρατηρητή και του πίνακα, όπως και στην περίπτωση του προοπτικού κύκλου.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να απεικονίσουμε προοπτικά μια σφαίρα. Είναι όλοι προσεγγιστικοί και αποσκοπούν στην κατασκευή της καμπύλης u , που είναι η αλληλοτομία της σφαίρας και του κώνου των οπτικών ακτίνων (σχ. 46).

Σύμφωνα με τη μέθοδο που συνήθως χρησιμοποιούμε για την κατασκευή της προοπτικής κατασκευάσουμε τις προοπτικές εικόνες των προκύπτουν από την τομή της σφαίρας με διάφορα οριζόντια επίπεδα και να κατασκευάσουμε την περιβάλλουσα καμπύλη, δηλαδή την έλλειψη που εφάπτεται στις (c_1) , (c_2) , (c_3) ...

σχ. 46



εικόνας μιας σφαίρας, αρκεί να κύκλων c_1 , c_2 , c_3 ... που (σε τυχαίες θέσεις) μετωπικά ή

Μεταξύ της επιλογής οριζοντίων ή μετωπικών επιπέδων τομής της σφαίρας, εδώ θα προτιμήσουμε να μελετήσουμε τα μετωπικά επίπεδα, διότι αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στον υπολογισμό της

σκιάς της σφαίρας*.

Κατ' αρχήν προσδιορίζουμε την προοπτική εικόνα (s) του οριζόντιου κύκλου s της σφαίρας, χρησιμοποιώντας το περιγεγραμ-μένο τετράγωνο που είναι παράλληλο στη $γε$ (σχ. 47).

Κάθετα στη διάμετρο MN ορίζουμε διάφορα τυχαία μετωπικά επίπεδα, τα οποία τέμνουν τη σφαίρα στους κύκλους c , c_1 , c_2 . Οι μετωπικοί κύκλοι έχουν τα κέντρα τους K , K_1 , K_2 στη διάμετρο MN και εφάπτονται στον οριζόντιο κύκλο s στα A , A_1 , A_2 . Με οπτικές ακτίνες βρίσκουμε τα προοπτικά σημεία (K) , (K_1) , (K_2) των κέντρων στην $(M)(N)$ και χαράζουμε τις οριζόντιες ευθείες – διαμέτρους των c , c_1 , c_2 . Οι κύκλοι c , c_1 , c_2 απεικονίζονται προοπτικά στους κύκλους, (c) , (c_1) , (c_2) .

Η περιβάλλουσα είναι η καμπύλη που εφάπτεται στους κύκλους (c), (c₁), (c₂) και προσδιορίζεται κατά προσέγγιση.

Προοπτικές παραμορφώσεις

Στην προοπτική, όπως την έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα, έχουμε κάνει κάποιες παραδοχές για λόγους σχεδιαστικής ευκολίας.

Δεχόμαστε ότι ο παρατηρητής βλέπει το αντικείμενο από ένα σταθερό σημείο και ότι η προβολή της εικόνας που παρατηρεί γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο που βρίσκεται μπροστά του.

Στην φυσική όραση όμως η προοπτικές εικόνες των αντικειμένων του χώρου προκύπτουν από παρατήρηση από δύο μάτια, που κάνουν μικρομετακινήσεις. Επίσης η προβολή της εικόνας ενός αντικείμενου γίνεται στον αμφιβληστροειδή του ματιού, που είναι επιφάνεια περίπου σφαιρική.

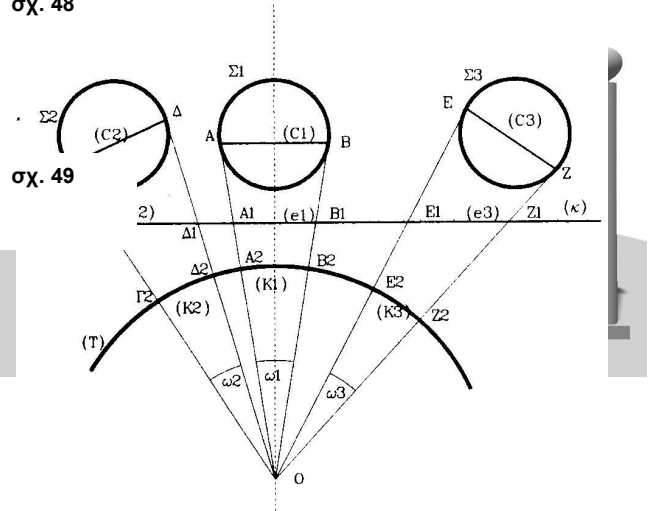
Αποτέλεσμα αυτών των διαφορών είναι να παρουσιάζονται στο σύστημα της προοπτικής απεικόνισης που χρησιμοποιούμε «προοπτικά παράδοξα», δηλαδή προοπτικά που απέχουν από τις εικόνες που έχουμε εμπειρικά στο νου μας.

Στο παράδειγμα του σχήματος 48 παρατηρούμε ότι οι ακραίοι κύλινδροι φαίνονται μεγαλύτεροι από τους μεσαίους, παρόλο που βρίσκονται πιο μακριά από τον παρατηρητή και επομένως θα έπρεπε να φαίνονται μικρότεροι. Αυτό συμβαίνει (σχ. 49) επειδή όσο πιο πλάγιες είναι οι εφαπτόμενες από το σημείο οράσεως προς τη βάση κάθε κυλίνδρου, τόσο μεγαλύτερο είναι το τμήμα του πίνακα που αποκόπτεται.

Στο σχήμα 49 γίνεται σύγκριση της προοπτικής εικόνας που λαμβάνουμε με τη μέθοδο της προοπτικής απεικόνισης που μελετούμε και της απεικόνισης στην κυλινδρική επιφάνεια (T), που μοιάζει να πλησιάζει περισσότερο στη φυσιολογική όραση.

σχ. 48

σχ. 49



Οι καλλιτέχνες της Αναγέννησης, που είχαν μελετήσει την αρχαία οπτική και ήταν αυτοί που ερεύνησαν διεξοδικά και θεμελίωσαν τους κανόνες της προοπτικής, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα, είχαν προβληματιστεί σχετικά με τα προοπτικά παράδοξα. Ο Leonardo da Vinci είχε μελετήσει την απεικόνιση ίσων κυλίνδρων, με σκίτσα και γραπτές αναφορές και επισημαίνει ότι οι παραμορφώσεις των κυλίνδρων είναι εντονότερες, όσο μεγαλύτερη είναι η οπτική γωνία (εικόνα 7). Είχε μάλιστα προσπαθήσει να ερευνήσει την προοπτική σε καμπύλη επιφάνεια.

Και αργότερα το θέμα απασχόλησε καλλιτέχνες και επιστήμονες (εικόνα 8). Η προοπτική σε καμπύλη επιφάνεια αναιρεί τα προοπτικά παράδοξα, όμως παρουσιάζει το πρόβλημα ότι αν η επιφάνεια προβολής αναπτυχθεί, η απεικόνιση ξεφεύγει αρκετά από τη φυσική όραση (σχ. 50).

Σχετικές θέσεις παρατηρητή, αντικειμένου, πίνακα και ορίζοντα

Το οπτικό εύρος του ανθρώπινου ματιού έχει υπολογιστεί περίπου στις 93° . Για το λόγο της σχεδιαστικής απλούστευσης, θεωρούμε το οπτικό εύρος στις 90° . Μέσα σ' αυτή τη γωνία των 90° πρέπει να βρίσκεται το αντικείμενο, του οποίου την προοπτική εικόνα ζητούμε να σχεδιάσουμε. Φροντίζουμε όμως να μην χρησιμοποιούμε ολόκληρο αυτό το εύρος, αλλά μόνο τις κεντρικές 30° - 45° (σχ. 51). Στην αντίθετη περίπτωση η προοπτική εικόνα του αντικειμένου μας δείχνει παραμορφωμένη (σχ. 52).

σχ. 51

Π
α
ρ
α τ
η ρ
ο ύ
μ ε
ό τ
α ν
σ χ

σχ. 52

εδιάσουμε τις οπτικές ακτίνες που περνούν από τα άκρα του αντικειμένου, σχηματίζεται πάνω στον πίνακα το μέγιστο πλάτος της προοπτικής εικόνας (σχ. 53). Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε ευθύς εξ αρχής να γνωρίζουμε το μέγεθος της προοπτικής εικόνας, τουλάχιστον κατά το πλάτος.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν ο πίνακας τέμνει το αντικείμενο και αφήνεται κάτω από τον πίνακα μέγεθος β , κατά την παράλληλη μετατόπιση, αφήνοντας χώρο περίπου ίσο με β από την άκρη της σχεδιαστικής επιφάνειας, το προοπτικό δεν

κινδυνεύει να βρεθεί εκτός της σχεδιαστικής επιφάνειας (σχ. 53).

Η θέση του πίνακα, δηλαδή της γραμμής του εδάφους γε, μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα στον παρατηρητή και το αντικείμενο, πίσω από το αντικείμενο, ή να τέμνει το αντικείμενο. Η θέση του πίνακα έχει να κάνει κυρίως με το μέγεθος της προοπτικής εικόνας. Όσο πιο κοντά βρίσκεται ο πίνακας στον παρατηρητή, τόσο το προοπτικό μικραίνει, ενώ όσο ο πίνακας απομακρύνεται από τον παρατηρητή, η προοπτική εικόνα μεγαλώνει (σχ. 51,54).

Ανακλάσεις στο προοπτικό

Ανάκλαση ονομάζουμε τον αντικατοπτρισμό ενός αντικειμένου σε ανακλαστική επιφάνεια.

Το θέμα των αντικατοπτρισμών παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να «δούμε» τις πλευρές των αντικειμένων που στην πραγματικότητα δεν βλέπουμε (εικόνα 9) και ταυτόχρονα ολοκληρώνουν τις προοπτικές εικόνες.

Η θεμελιώδης πρόταση της θεωρίας των επίπεδων κατοπτρών αναφέρει ότι **η γωνία προσπτώσεως μιας φωτεινής ή οπτικής ακτίνας στην κατοπτρική επιφάνεια είναι ίση με τη γωνία ανακλάσεώς της** (σχ. 55). Η ανάκλαση γίνεται σε επίπεδο κάθετο στο επίπεδο της κατοπτρικής επιφάνειας και περιέχει τη φωτεινή ή οπτική ακτίνα. Για το λόγο αυτό κάθε αντικείμενο και η ανάκλασή του σε επίπεδο κάτοπτρο είναι σχήματα συμμετρικά ως προς την κατοπτρική επιφάνεια. Η γωνία προσπτώσεως ω είναι η γωνία που σχηματίζει η φωτεινή/οπτική ακτίνα με την κατακόρυφη της κατοπτρικής επιφάνειας στο σημείο πρόσπτωσης.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις θέσης κατοπτρικών επιφανειών:

- *Κατακόρυφη κατοπτρική επιφάνεια*, π.χ. ένας καθρέφτης (εικόνα 9)
- *Οριζόντια κατοπτρική επιφάνεια*, π.χ. επιφάνεια του νερού (εικόνα 10), γυαλισμένη επιφάνεια (εικόνα 11).

1. Ανά

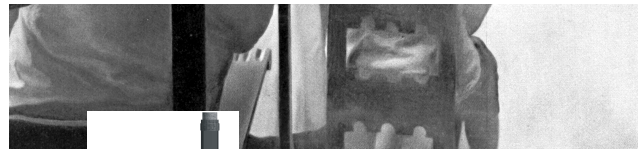


εικόνα 10

κλα
ση
σε
κα
κό
ρυφ
η
επι
φάν
εια
Ότα
ν η



εικόνα 9 Salvador Dalí «Ατελείωτη στερεοσκοπική εικόνα»



σχ. 55



εικόνα 11

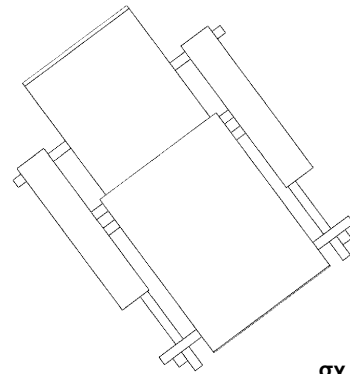
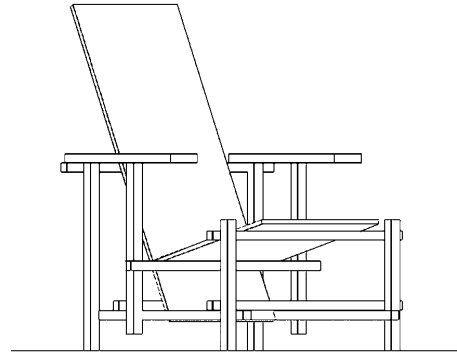
ανακλαστική επιφάνεια είναι κατακόρυφη το πραγματικό αντικείμενο και ο αντικατοπτρισμός του έχουν στην προοπτική εικόνα προοπτικά ίσες διαστάσεις. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι ο αντικατοπτρισμός του αντικειμένου φαίνεται μικρότερος από το ίδιο το αντικείμενο, εφ' όσον βρίσκεται μακρύτερα από τον παρατηρητή (σχ. 56).

Κατασκευάζουμε το προοπτικό του παραλληλεπιπέδου του βιβλίου και στον οριζόντιο άξονα του καθρέφτη και στο υψόμετρο της κάτω βάσης του, ορίζουμε το σημείο B_M στην τομή του άξονα με την $B\Phi 1$ (σχ. 57). Ορίζουμε το σημείο A_M στην τομή της $A\Phi 1$ με τον κάθετο άξονα του καθρέφτη, που περνά από το B_M . Το σημείο M είναι το μέσο της $A_M B_M$. Φέρνουμε την AM , προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την $B\Phi 1$ και ορίζουμε το σημείο B_K . Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε το A_K , στην τομή της BM και $A\Phi 1$. Το τετράπλευρο $ABA_K B_K$ είναι προοπτικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, επομένως η $A_K B_K$ είναι ο προοπτικός αντικατοπτρισμός της AB .

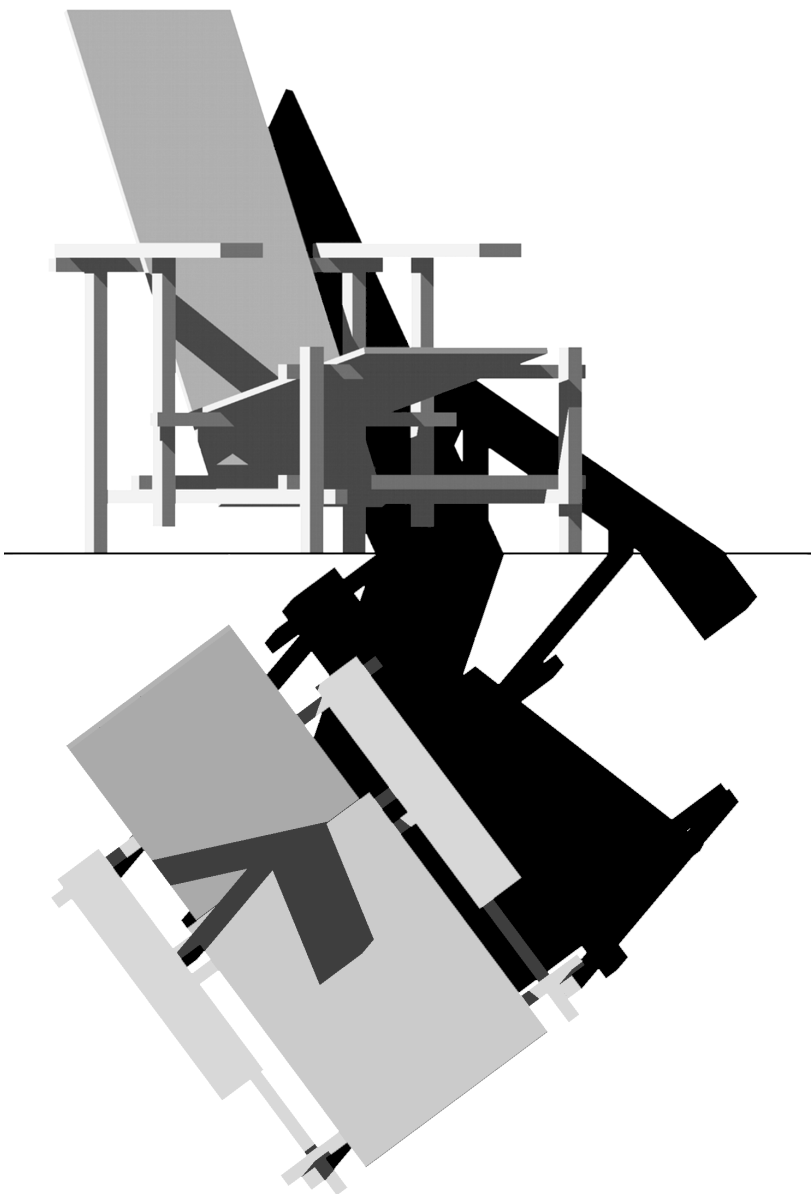
Αυτή η μέθοδος δίνει τους αντικατοπτρισμούς των αντικειμένων απ' ευθείας στην προοπτική εικόνα. Μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε τον αντικατοπτρισμό ενός αντικειμένου στην πρώτη προβολή του (κάτοψη) και να το απεικονίσουμε προοπτικά σαν να ήταν ξεχωριστό αντικείμενο.

2. Ανάκλαση σε οριζόντια επιφάνεια

Θεωρούμε ότι η οριζόντια επιφάνεια έδρασης του βιβλίου του προηγούμενου παραδείγματος είναι κι αυτή ανακλαστική (σχ. 56). Για να προσδιορίσουμε την αντι-κατοπτρική εικόνα του σημείου Δ (σχ. 58), κατασκευάζουμε την $\Gamma\Delta_K$ στην προέκταση της $\Gamma\Delta$ και ίση με την $\Gamma\Delta$.



σχ. 1



στοιχείων του αντικειμένου (σχ. 2,3).

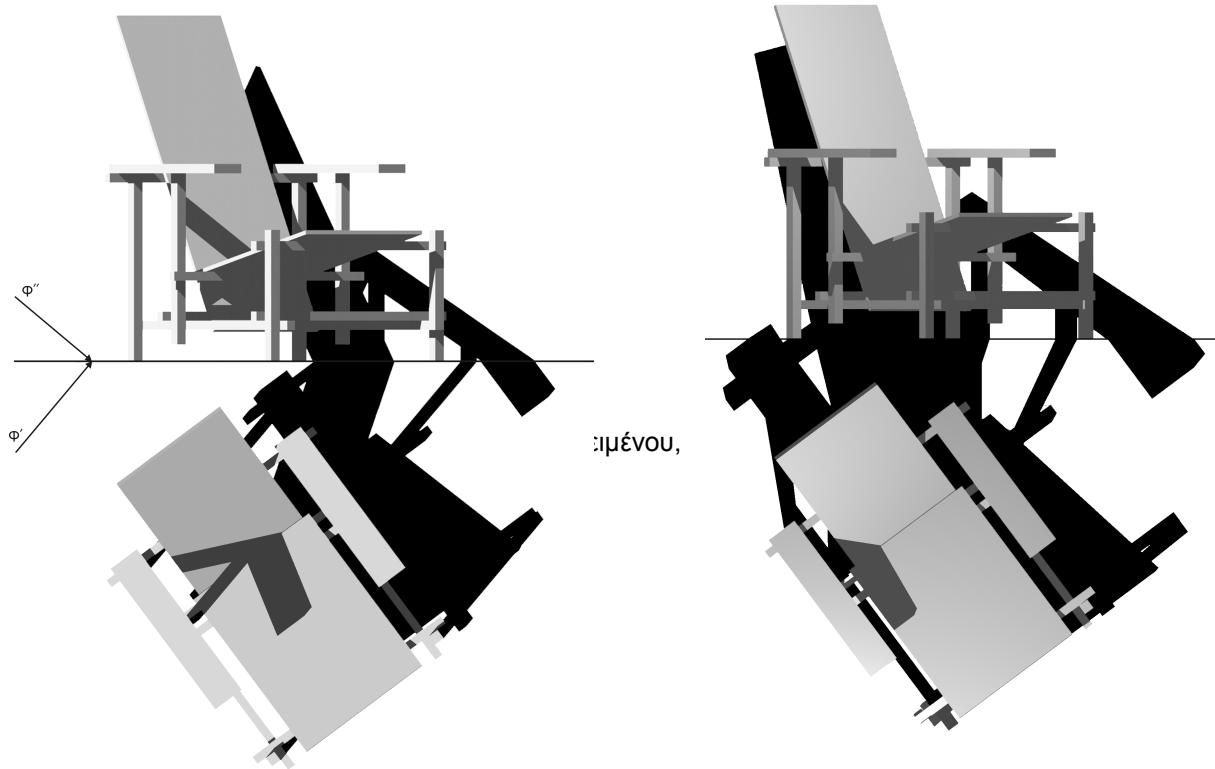
Γενικές αρχές και έννοιες

Στο σύστημα προβολής κατά Monge δεν μας δίνεται η δυνατότητα να αντιληφθούμε άμεσα τα αντικείμενα του χώρου, παρά μόνο αφού συνδυάσουμε τις δύο προβολές του αντικειμένου και αντιληφθούμε στο νου μας την εικόνα του στο χώρο. Αυτό που «λείπει» είναι κάθε φορά η τρίτη διάσταση, το βάθος (σχ. 1). Μπορούμε να βοηθηθούμε περισσό-τερο στην αναγνώριση του αντικειμένου, όπως αυτό είναι στο χώρο, αν σκιαγραφή-σουμε τις προβολές του αντικειμένου. Αυτός ο τρόπος, αν και έμμεσος, μας βοηθά να αναγνωρίσουμε το βάθος και τις σχετικές θέ-σεις των

ΣΚΙΑΓΡΑΦΙΑ

Στην αξονομετρική προβολή η σκιαγράφιση των αντικειμένων εμφανίζει καλύτερα τον όγκο των αντικειμένων, στην δε προοπτική τελειοποιεί την εικόνα της σύνθεσης (σχ. 4).

.Φ''



επιπέδου,

που προβάλλουμε στα δύο επίπεδα προβολής Π₁ και Π₂,
σχ. 2

.Φ'

πρώτα ορίζουμε τη θέση και τη διεύθυνση του φωτός και βρίσκουμε και για τις φωτεινές ακτίνες τις προβολές στα επίπεδα Π₁ και Π₂. Η πηγή φωτισμού μπορεί να είναι δύο ειδών: α) ηλιακή δέσμη φωτός (σχ. 2) και β) σημειακή πηγή φωτός (σχ. 3). Στην πρώτη περίπτωση οι φωτεινές ακτίνες είναι παράλληλες μεταξύ τους και ότι η πηγή φωτισμού είναι ο ήλιος, που θεωρούμε ότι βρίσκεται στο άπειρο. Εδώ λοιπόν ορίζουμε τη διεύθυνση του φωτός και εργαζόμαστε με τις δύο προβολές της. Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε ότι το φως ξεκινά από ένα σημείο του χώρου και διαχέεται σ' αυτόν σφαιρικά. Αρκεί επομένως να ορίσουμε τις προβολές της πηγής φωτισμού, μια και η διεύθυνση φωτισμού ποικίλει.

Τα στερεά σχήματα του χώρου όταν φωτίζονται δημιουργούν δύο ειδών σκιές: α) την ερριμμένη σκιά και β) την αυτοσκιά (σχ. 5).

Η ερριμμένη σκιά είναι η σκιά που δημιουργείται όταν ένα αντικείμενο σκιάζει ένα άλλο αντικείμενο: η σκιά του κοντινότερου προς το φως αντικειμένου που «πέφτει», «ρίχνεται» στο αντικείμενο που βρίσκεται μακρύτερα από τη φωτεινή πηγή. Η αυτοσκιά είναι η σκιά των επιφανειών ενός αντικειμένου που δημιουργείται εξ' αιτίας της θέσης κάθε επιφάνειας ως προς το φως. Για να βρούμε την αυτοσκιά ενός αντικειμένου, αρκεί να γνωρίζουμε το περίγραμμα της ερριμμένης σκιάς του.

Στις σημειώσεις αυτές θα μελετηθεί η μέθοδος σκιαγραφίας με ηλιακό φωτισμό των αντικειμένων. Σημειώνεται όμως ότι η μεθοδολογία εφαρμόζεται και στην περίπτωση σημειακού φωτισμού, με τη διαφορά ότι οι προβολές των φωτεινών ακτίνων δεν θεωρούνται παράλληλες, αλλά συγκλίνουσες προς τις προβολές της φωτεινής πηγής.

χνει τη
στοιχία
ουμε το
ου είναι
ς σκιάς
. Έτσι
ZE και

Σκιαγραφία στο σύστημα Monge

Σκιά ευθυγράμμου τμήματος

1. Η σκιά βρίσκεται ολόκληρη στο επίπεδο Π_1

Έχοντας τις δύο προβολές του ευθυγράμμου τμήματος AB, ορίζουμε τη διεύθυνση φωτισμού, μέσω των δύο προβολών της φ' και φ'' στα επίπεδα Π_1 και Π_2 . Ζητούμε να βρούμε τη σκιά του AB στο επίπεδο Π_1 (σχ. 6).

Από τα σημεία A'' και B'' φέρνουμε ευθείες παράλληλες στη δεύτερη προβολή της διεύθυνσης φωτισμού φ'' και ορίζουμε τα σημεία 1 και 2 (σχ. 7). Από τα σημεία A' και B' φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς την πρώτη προβολή της διεύθυνσης φωτισμού φ' . Από τα σημεία 1 και 2 φέρνουμε ευθείες κατακόρυφες, μέχρι να τμήσουν αντίστοιχα τις φ' από το A' και το B' και ορίζουμε τα σημεία A_1 και B_1 , τα οποία είναι οι σκιές των A και B στο επίπεδο Π_1 .

Ενώνοντας τα σημεία A_1 και B_1 , έχουμε τη σκιά του AB, ολόκληρη στο επίπεδο Π_1 .

2. Η σκιά βρίσκεται και στα δύο επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, φέρνουμε από τα A'' και B'' ευθείες παράλληλες με τη δεύτερη προβολή φ'' της διεύθυνσης φωτισμού, μέχρι να τμήσουν τον άξονα y_{12} και ορίζουμε τα σημεία 1 και 2 (σχ. 9).

Φέρνοντας ευθείες κατακόρυφες από τα 1 και 2 μέχρι να τμηθούν οι παράλληλες με την πρώτη προβολή φ' της διεύθυνσης φωτισμού, παρατηρούμε ότι το σημείο B_1 βρίσκεται κάτω από τον άξονα y_{12} , όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ενώ το σημείο A_1 βρίσκεται πάνω από τον άξονα y_{12} . Αυτό σημαίνει ότι στο χώρο το σημείο A_1 βρίσκεται πίσω από το επίπεδο προβολής Π_2 (σχ. 8). Επομένως καταλαβαίνουμε ότι η σκιά του σημείου A δεν βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο Π_1 , αλλά στο κατακόρυφο επίπεδο προβολής Π_2 . Το σημείο A_1 ονομάζεται ψεύτικη σκιά του σημείου A και γράφεται σε παρένθεση. Για να βρούμε τη σκιά του σημείου A φέρνουμε από το σημείο 3, που είναι το σημείο τομής της φ' από το A' και του άξονα y_{12} , ευθεία κατακόρυφη μέχρι να τμηθεί η φ'' από το σημείο A'' . Το σημείο A_2 είναι η πραγματική σκιά του σημείου A, στο επίπεδο προβολής Π_2 .

Η σκιά του τμήματος AB βρίσκεται δηλαδή κατά ένα μέρος πάνω στο επίπεδο Π_1 και κατά το υπόλοιπο μέρος στο επίπεδο Π_2 . Με άλλα λόγια, η σκιά του AB «σπάει», κάνει καμπή σε κάποιο κοινό σημείο των Π_1 και Π_2 .

σχ. 9

Για να βρούμε το σημείο καμπής της σκιάς του AB, ενώνουμε τα σημεία (A_1) και B_1 . Το τμήμα (A_1) B_1 τέμνει τον άξονα y_{12} στο σημείο K, που είναι το ζητούμενο σημείο. Τέλος ενώνουμε τα σημεία K και A_2 .

3. Σκιά κατακόρυφου ευθυγράμμου τμήματος

Εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, φέρνοντας από τις προβολές των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος ευθείες παράλληλες προς τις διευθύνσεις φ' και φ'' , κατ' αντιστοιχία (σχ. 10). Παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει πρώτο ίχνος το ίδιο το σημείο B, δηλαδή το AB «αγγίζει» το επίπεδο Π_1 (σχ. 11). Στην περίπτωση αυτή η σκιά B1 του σημείου B είναι το ίδιο το σημείο B. Παρατηρούμε ακόμη ότι η σκιά A1B1 του AB είναι παράλληλη προς την φ' .

Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ δεν «αγγίζει» το επίπεδο Π_1 , σχ. 10

διότι η 2^η προβολή Γ'' του σημείου Γ δεν είναι σημείο του άξονα γ_{12} . Η σκιά Γ1 του σημείου Γ βρίσκεται στην τομή της φ' από το σημείο Γ' και της κατακόρυφης από το σημείο 2 του άξονα γ_{12} , που προκύπτει όταν από το Γ'' φέρουμε ευθεία παράλληλη στη φ'' . Η σκιά του σημείου Δ βρίσκεται στο επίπεδο Π_2 . Όπως και προηγουμένως βρίσκουμε την ψεύτικη σκιά (Δ1) του Δ, σχ. 11
ενώνουμε με το Γ1, βρίσκουμε το σημείο καμπής Κ της σκιάς και τέλος ενώνουμε το Κ με την πραγματική σκιά Δ2 του Δ. Παρατηρούμε ότι το τμήμα ΚΔ2 είναι κατακόρυφο, παράλληλο στη 2^η προβολή Γ''Δ'' της ΓΔ.

Γενικεύοντας:

- i. Η σκιά στο Π_2 μετωπικής ευθείας είναι ευθεία παράλληλη προς τη 2^η προβολή της ευθείας (σχ. 12).
- ii. Η σκιά στο Π_1 οριζόντιας ευθείας είναι ευθεία παράλληλη προς την 1^η προβολή της ευθείας (σχ. 13).
- iii. Η σκιά στο Π_1 κατακόρυφης ευθείας είναι ευθεία παράλληλη στην 1^η προβολή φ' της διεύθυνσης φωτισμού και στο Π_2 είναι ευθεία κατακόρυφη (σχ. 11).
- iv. Η σκιά στο Π_1 πρόσθιας ευθείας είναι ευθεία παράλληλη στην 1^η προβολή της και στο Π_2 είναι ευθεία παράλληλη στη 2^η προβολή της διεύθυνσης φωτισμού (σχ. 14).
- v. Η σκιά ευθείας παράλληλης στον άξονα γ_{12} είναι και στα δύο επίπεδα Π_1 και Π_2 ευθεία παράλληλη και ίση με την 1^η ή 2^η προβολή της (σχ. 15).

Σκιά επιπέδου σχήματος

Αρχικά προσδιορίζουμε τις σκιές των σημείων του τριγώνου ABΓ: από κάθε μία από τις προβολές του τριγώνου στα επίπεδα Π_1 και Π_2 φέρνουμε αντίστοιχα ευθείες παράλληλες στις προβολές της διεύθυνσης του φωτός (σχ. 16,17). Η κορυφή Γ βλέπουμε ότι έχει τη σκιά του Γ2 στο επίπεδο Π_2 , επομένως χρειαζόμαστε την ψεύτικη σκιά του (Γ1) στο πρώτο επίπεδο προβολής Π_1 . Ενώνουμε τις σκιές των κορυφών A1(Γ1) και B1(Γ1). Οι ευθείες ορίζουν στον άξονα γ_{12} τα σημεία καμπής Κ και Λ, τα σημεία δηλαδή όπου η σκιά του τριγώνου «σπάει» και μετατοπίζεται από το οριζόντιο, στο κατακόρυφο επίπεδο προβολής. Τέλος ενώνουμε τα σημεία ΚΓ2 και ΛΓ2. Το περίγραμμα της σκιάς του τριγώνου ABΓ είναι το σχήμα A1B1ΛΚΓ2.

σχ. 16

Σκιά πολυέδρου

Για να βρούμε τη σκιά ενός πολυέδρου σχήματος, εργαζόμαστε βρίσκοντας τις σκιές των κορυφών του. Στο σχήμα 18 ο κύβος εδράζεται στο επίπεδο Π_1 , επομένως η σκιά της κάτω βάσης του ταυτίζεται με την ίδια την κάτω βάση του κύβου. Αρκεί λοιπόν να βρούμε τη σκιά $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ της άνω βάσης $AB\Gamma\Delta$ (σχ. 19) και να ενώσουμε με τα σημεία της πρώτης προβολής του κύβου.



σχ. 17

Στο σχήμα 20 ο κύβος βρίσκεται ψηλότερα από το

ε
π
ίπεδο
 Π_1
και
είναι
απαραίτητο
να
βρεθεί
η
σκι

σχ. 18

σχ. 19

ά τόσο της άνω, όσο και της κάτω βάσης του. Κατόπιν ενώνουμε τις σκιές των σημείων της άνω βάσης

μ
ε
τι
ς
σ
κ
ιέ
ς
τ

σχ. 20

σχ. 21

ων σημείων της κάτω βάσης.

Στην πυραμίδα του σχήματος 22 η σκιά της κορυφής της P βρίσκεται στο 2^ο επίπεδο προβολής Π₂, οπότε εργαζόμαστε χρησιμο-ποιώντας την ψεύτικη σκιά (P1) (σχ. 23).

Γνωρίζοντας το περίγραμμα της ερριμμένης σκιάς ενός στερεού, μπορούμε να βρούμε το περίγραμμα της αυτοσκιάς του, δηλαδή ποιες πλευρές του στερεού δεν φωτίζονται. Το όριο της ερριμμένης σκιάς πάνω στα επίπεδα στα οποία αυτή εμφανίζεται, ορίζει το περίγραμμα της αυτοσκιάς πάνω στις πλευρές του ίδιου του στερεού σχήματος.

Σκιές ευθυγράμμων τμημάτων σε έδρες πολυέδρων

1. Το τμήμα AB είναι κατακόρυφο

Στο σχήμα 24 το ευθύγραμμο τμήμα είναι κατακόρυφο και ο κύβος που βρίσκεται πίσω του έχει τις έδρες του παράλληλες στα επίπεδα προβολής Π₁ και Π₂. Σύμφωνα με την πρόταση iii (σελ. 66) το τμήμα της σκιάς της AB που βρίσκεται στο Π₁ είναι παράλληλο με την φ' και το τμήμα της σκιάς της AB που βρίσκεται στο Π₂ ή σε οποιοδήποτε επίπεδο παράλληλο στο Π₂ είναι ευθεία παράλληλη με τη 2^η προβολή του AB.

Το σημείο A' είναι σημείο του επιπέδου Π₁, επομένως έχει σκιά τον εαυτό του (σχ. 24). Από το σημείο B' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη φ' και από το σημείο B'' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη φ''. Το σημείο που η φ' από το B' συναντά την μπροστά κατακόρυφη έδρα του κύβου είναι το σημείο καμπής K' (σχ. 25). Φέρνοντας κατακόρυφη ευθεία, ορίζουμε τη 2^η προβολή K'' του σημείου K στον άξονα γ₁₂ και από το σημείο K'' συνεχίζουμε κατακόρυφα (παράλληλα στην A''B'') μέχρι η κατακόρυφη από το K'' να τμήσει την φ'' από το B''. Μ' αυτό τον τρόπο ορίζουμε το σημείο B2, που είναι η σκιά του B στην έδρα του κύβου.

2. Το τμήμα AB είναι πλάγιο

Στην περίπτωση αυτή το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι σε τυχαία θέση ως προς τον κύβο (σχ. 26). Το σημείο A του τμήματος AB βρίσκεται πάνω στο επίπεδο Π_1 και επομένως έχει σκιά τον εαυτό του. σχ. 25

Από τα σημεία B' και B'' φέρνουμε ευθείες παράλληλες στις φ' και φ'' αντίστοιχα. Από το σημείο 1 (σχ. 27) φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη και ορίζουμε το σημείο (B1), τη σκιά του B στο επίπεδο Π_1 , που όμως βρίσκεται μέσα στον όγκο της σκιάς του κύβου και γι' αυτό είναι ψεύτικη σκιά του B.

Ενώνουμε τα σημεία A' και (B1). Η ευθεία αυτή τέμνει τον κύβο στο σημείο K'. Το τμήμα A'K' είναι ένα πραγματικό τμήμα της σκιάς του AB στο επίπεδο Π_1 . Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, φέρνουμε από το K' ευθεία κατακόρυφη και ορίζουμε στον άξονα y_{12} τη 2^η προβολή K'' του σημείου K. Στο σημείο K η σκιά του AB κάνει μία καμπή, παύει να εμφανίζεται στο επίπεδο Π_1 και συνεχίζει στην μπροστά σχ. 26 κατακόρυφη έδρα του κύβου.

Φέρνοντας την παράλληλη στη φ' από το B', ορίζουμε το σημείο 2, στην τομή με την οριζόντια ακμή του κύβου. Από το σημείο 2 φέρνουμε κατακόρυφη μέχρι να τμήσει την φ'' από το B''. Το σημείο αυτό είναι ψεύτικη σκιά του B στην κατακόρυφη έδρα του κύβου, διότι η έδρα του κύβου δεν είναι αρκετά μεγάλη ώστε το (B2) να βρεθεί μέσα στην περίμετρό της. Ενώνουμε παρόλ' αυτά τα σημεία K'' και (B2) και βρίσκουμε ένα δεύτερο σχ. 27 τμήμα της σκιάς του AB, αυτή τη φορά στην μπροστά κατακόρυφη έδρα του κύβου. Η ευθεία K''(B2) τέμνει την επάνω οριζόντια ακμή του κύβου στο σημείο Λ''. Ορίζουμε την 1^η προβολή Λ' του σημείου Λ πάνω στην 1^η προβολή της επάνω οριζόντιας ακμής του κύβου. Από το σημείο 3, που είναι η τομή της φ'' από το B'' με την οριζόντια ακμή του κύβου φέρνουμε κατακόρυφη μέχρι να τμήσουμε την φ' από το B'. Το σημείο B1 είναι η πραγματική σκιά του B στην άνω βάση του κύβου. Παρατηρούμε ότι το τμήμα Λ'B1 είναι παράλληλο με το τμήμα A'K', μια και είναι τμήματα σκιάς της ίδιας ευθείας σε δύο παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα (στο Π_1 και στην άνω βάση του κύβου).

3. Σκιά πλαγίου τμήματος σε πλάγιο επίπεδο (μέθοδος επικάλυψης σκιών)

Στην περίπτωση κατά την οποία ένα ευθύγραμμο τμήμα MN ρίχνει τη σκιά του σε πλάγια έδρα πολυέδρου (σχ. 28), μπορούμε να προσδιορίσουμε το τμήμα της σκιάς που βρίσκεται στην πλάγια έδρα μέσω της μεθόδου επικάλυψης σκιών.

Εργαζόμαστε κατά τα μέχρι τώρα γνωστά για να προσδιορίσουμε τη σκιά του πολυέδρου και του τμήματος MN στο επίπεδο Π_1 . Το σημείο N1 (σχ. 29) είναι η σκιά του N στο Π_1 . Το σημείο M είναι σημείο του Π_1 , επομένως έχει σκιά τον εαυτό του. Ενώνουμε τα M' και N1 και παρατηρούμε ότι η σκιά της MN πέφτει κατά ένα τμήμα της στην εμπρός έδρα της πυραμίδας. Προσδιορίζουμε τα σημεία K' και K'', τις δύο προβολές του σημείου καμπής της σκιάς.

Στην τομή της σκιάς της MN και της σκιάς μίας από τις έδρες της πυραμίδας, έστω της ΔP , ορίζουμε το σημείο T1, που ονομάζεται σημείο επικάλυψης (οι σκιές της MN και ΔP επικαλύπτονται στο σημείο T1). Με άλλα λόγια το σημείο T1 είναι η σκιά ενός σημείου T, που βρίσκεται τόσο στην ευθεία MN, όσο και στην ευθεία ΔP . Γνωρίζοντας τη σκιά T1 του σημείου, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε τις δύο προβολές του σημείου, ως εξής: από το T1 φέρνουμε κατακόρυφη μέχρι τον άξονα y_{12} και από εκεί φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη φ'' έως ότου αυτή τμήσει την $\Delta''P''$. Το σημείο τομής είναι η 2^η προβολή T'' του σημείου T. Γνωρίζοντας ότι το σημείο T είναι σημείο της ΔP , φέρνουμε από το T'' κατακόρυφη μέχρι να τμήσει την 1^η προβολή $\Delta'P'$ της ΔP και ορίζουμε την πρώτη προβολή T' του σημείου T. Η ευθεία KT, με προβολές K'T' και K''T'' είναι το τμήμα της σκιάς της NM στην έδρα της πυραμίδας.

Στην περίπτωση κατά την οποία η σκιά του σημείου N βρίσκεται μέσα στον όγκο της σκιάς της πυραμίδας, εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, αλλά βρίσκουμε το σημείο επικάλυψης T1 στην προέκταση της σκιάς της MN στο Π_1 (σχ. 30).

Σκιές στερεών

Τα στερεά σχήματα αντιμετωπίζονται σαν σύνθεση σημείων (κορυφών), ευθειών (ακμών) και επιφανειών (εδρών), στον προσδιορισμό της σκιάς τους, τόσο στα επίπεδα Π_1 και Π_2 , όσο και για τον προσδιορισμό της σκιάς που ρίχνει το ένα στερεό στο άλλο.

1. Σκιές πολυέδρων

Στα σχήματα 31 – 33 παρουσιάζονται οι σκιές δύο παραλληλεπιπέδων που σχηματίζουν σύνθετα στερεά σχήματα, σε αξονομετρική προβολή και προβολή κατά Monge.

σχ. 30

σχ. 31

Στα σχήματα 34 και 35 παρουσιάζεται η σκιά μιας εξαγωνικής πυραμίδας. Παρατηρούμε ότι η μικρή αλλαγή της διεύθυνσης του φωτός (φ'') αλλάζει ριζικά τη σκιά της πυραμίδας, μια και στην πρώτη περίπτωση (σχ. 34) η ερριμμένη σκιά προέρχεται από δύο έδρες, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (σχ. 35) η ερριμμένη σκιά προέρχεται από τρεις έδρες της πυραμίδας.

2.

σχ. 33

Σκιά κώνου

Ο κώνος είναι σχήμα εκ περιστροφής και δεν έχει ακμές. Οι ευθείες που ενώνουν ένα οποιοδήποτε σημείο της βάσης του με την κορυφή του, ονομάζονται γενέτιρες του κώνου, διότι η περιστροφή μιας οποιασδήποτε γενέτιρας γύρω από τον άξονα περιστροφής του κώνου δημιουργεί, «γεννά» το στερεό.

Η βάση του κώνου του σχήματος 36 είναι παράλληλη στο Π_1 , επομένως η σκιά της βάσης είναι κύκλος παράλληλος και ίσος στην ίδια τη βάση. Η θέση του κύκλου της σκιάς του κώνου προσδιορίζεται όταν φέρουμε στον κύκλο της βάσης τις παράλληλες στη φ' εφαπτόμενες ευθείες. Στην 1^η προβολή ορίζονται τα σημεία Γ' και Δ' , των οποίων βρίσκουμε τη 2^η προβολή Γ'' και Δ'' στη 2^η προβολή της βάσης του κώνου. Η σκιά της κορυφής βρίσκεται στο επίπεδο Π_2 και είναι το σημείο K_2 . Βρίσκουμε την ψεύτικη σκιά (K_1) της κορυφής του κώνου στο επίπεδο Π_1 , για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τις ακραίες φωτεινές γενέτιρες: από το σημείο (K_1) φέρνουμε ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο της σκιάς της βάσης του κώνου* και ορίζουμε τα σημεία επαφής

M_1 και N_1 . Με ευθείες παράλληλες στη φ' , βρίσκουμε στη βάση του κώνου τα σημεία $M(M',M'')$ και $N(N',N'')$. Τα σημεία αυτά είναι τα τελευταία σημεία της βάσης που φωτίζονται και επομένως ορίζουν τις γενέτιρες KM και KN της αυτοσκιάς του κώνου. Το τμήμα KMN που «βλέπεται» προς την ερριμμένη σκιά του κώνου είναι το σκοτεινό τμήμα του κώνου.

3. Σκιά κυλίνδρου

Ο κύλινδρος αντιμετωπίζεται γενικά με τον ίδιο τρόπο όπως ο κώνος, μια και θεωρείται κι αυτός κώνος με την κορυφή του στο άπειρο.

σχ. 35

σχ. 36

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, προσδιορίζουμε τις σκιές $c_{\alpha 1}$ και $c_{\beta 1}$ της κάτω και άνω βάσης c_{α} και c_{β} αντίστοιχα (σχ. 37). Οι ακραίες φωτεινές γενέτιρες του κυλίνδρου είναι οι $\Gamma_{\alpha 1}\Gamma_{\beta 1}$ και $\Delta_{\alpha 1}(\Delta_{\beta 1})$, οι οποίες είναι παράλληλες στη διεύθυνση φ' , διότι είναι σκιές κατακορύφων ευθειών. Παρατηρούμε ότι η σκιά $c_{\beta 1}$ της άνω βάσης του κυλίνδρου δεν βρίσκεται ολόκληρη στο επίπεδο Π_1 , γεγονός που μας υποχρεώνει να βρούμε τη σκιά της άνω βάσης και στο επίπεδο Π_2 . Τα σημεία A_{β} , B_{β} και Γ_{β} , Δ_{β} δημιουργούν δύο κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους στον κύκλο της άνω βάσης και έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί η σκιά της άνω βάσης στο επίπεδο Π_1 . Οι σκιές των τεσσάρων αυτών σημείων στο επίπεδο Π_2 μας δίνουν διαμέτρους της καμπύλης της σκιάς της άνω βάσης του κυλίνδρου στο Π_2 . Η καμπύλη είναι έλλειψη, τα δε ευθύγραμμα τμήματα $(A_{\beta 2})B_{\beta 2}$ και $(\Gamma_{\beta 2})\Delta_{\beta 2}$ είναι συζυγείς διάμετροί της. Μέσω της κατασκευής Rytz* προσδιορίζουμε την έλλειψη $c_{\beta 2}$, τη σκιά δηλαδή της άνω βάσης του κυλίνδρου στο επίπεδο Π_2 . Τα σημεία P και Σ του άξονα y_{12} είναι τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων $c_{\beta 1}$ και $c_{\beta 2}$, τα σημεία καμπής της σκιάς της άνω βάσης. Η σκιά τέλος της γενέτιρας $\Delta_{\alpha}\Delta_{\beta}$ παρουσιάζει επίσης καμπή στο σημείο Π του άξονα y_{12} και μετατρέπεται σε κατακόρυφη εφαπτόμενη της έλλειψης $c_{\beta 2}$.

Η αυτοσκιά του κυλίνδρου ορίζεται από τις ακραίες γενέτιρες $\Gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta}$ και $\Delta_{\alpha}\Delta_{\beta}$. Το αυτοσκιασμένο τμήμα του κυλίνδρου είναι αυτό που «βλέπει» προς την ερριμμένη σκιά του.

4. Σκιά σφαίρας

Η σφαίρα είναι και αυτό στερεό εκ περιστροφής, με γενέτιρα καμπύλη τον κύκλο.

Η σφαίρα είναι ένα από τα ελάχιστα στερεά σχήματα για τα οποία για να προσδιορίσουμε τη σκιά του χρησιμοποιούμε το περίγραμμα της αυτοσκιάς του, αντίθετα με ό,τι περιγράψαμε μέχρι τώρα.

Στο σχήμα 38 παριστάνεται μία σφαίρα, όπου η γενέτειρα c_1 στην 1^η προβολή είναι ο κύκλος c_1' και στην 2^η προβολή εκφυλίζεται στη διάμετρο c_1'' . Αντίστοιχα, η γενέτειρα c_2 στην 1^η προβολή είναι ο κύκλος c_2'' , που εκφυλίζεται στη διάμετρο c_2' στην 1^η προβολή.

Η καμπύλη της αυτοσκιάς της σφαίρας είναι μία διάμετρος της, η οποία παριστάνεται σαν έλλειψη και στις δύο προβολές. Επιπλέον πρέπει η έλλειψη αυτή στην 1^η προβολή της να έχει μικρό άξονα κάθετο στη φ' και μεγάλο άξονα παράλληλο στη φ' και στη 2^η προβολή της να έχει μικρό άξονα κάθετο στη φ'' και μεγάλο άξονα παράλληλο στη φ'' (σχ. 38). Στην 1^η προβολή φέρνουμε τη διάμετρο $A'B'$ κάθετη στη φ' . Τα σημεία A και B ανήκουν στη γενέτειρα c_1 , επομένως μπορούμε να βρούμε και τη δεύτερη προβολή τους A'' και B'' στη διάμετρο c_1'' . Ομοίως φέρνουμε τη διάμετρο $\Gamma''\Delta''$ κάθετη στη φ'' και βρίσκουμε στη c_2' τις 1^ες προβολές Γ' και Δ' .

Ο κύκλος s της αυτοσκιάς της σφαίρας στην 1^η προβολή παριστάνεται στην έλλειψη s' με μεγάλο άξονα την $A'B'$ και περνά από τα σημεία Γ' και Δ' . Στην 2^η προβολή παριστάνεται στην έλλειψη s'' με μεγάλο άξονα την $\Gamma''\Delta''$ και περνά από τα σημεία A'' και B'' . Αρκεί τώρα να βρούμε τη σκιά του κύκλου s στα επίπεδα Π_1 και Π_2 .

σχ. 38

Ξεκινώντας από την 1^η προβολή, ορίζουμε τα άκρα A' , B' , K' και L' των αξόνων της s' και βρίσκουμε τις 2^ες προβολές τους A'' , B'' , K'' και L'' στην s'' (σχ. 39). Βρίσκουμε τις σκιές των τεσσάρων σημείων στο Π_1 , είτε είναι πραγματικές (K_1 , B_1), είτε ψεύτικες (A_1 , L_1). Κατασκευάζουμε την έλλειψη s_1 , που είναι η σκιά του κύκλου s στο επίπεδο Π_1 . Τα σημεία Σ και P του άξονα y_{12} είναι σημεία καμπής της σκιάς.

σχ. 39

Περνώντας τώρα στη 2^η προβολή, ορίζουμε τα άκρα Γ'' , Δ'' , M'' και N'' των αξόνων της s'' και βρίσκουμε τις 1^ες προβολές τους Γ' , Δ' , M' και N' στην s' (σχ. 40). Βρίσκουμε τις σκιές κι αυτών των σημείων αλλά στο επίπεδο Π_2 πλέον, ανεξάρτητα από το αν είναι πραγματικές (Δ_2 , M_2) ή ψεύτικες (Γ_2 , N_2). Κατασκευάζουμε την έλλειψη s_2 , που είναι η σκιά του κύκλου s στο επίπεδο Π_2 . Τα σημεία Σ και P είναι τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων.

Σκιαγραφία στην αξονομετρία

Η μεθοδολογία της σκιαγραφίας στο σύστημα Monge και στα διάφορα αξονομετρικά συστήματα, παρουσιάζει ελάχιστες διαφορές και πολλές ομοιότητες. Η κυριότερη διαφορά είναι ότι στην αξονομετρία δεν χρησιμοποιούμε τις δύο προβολές των διευθύνσεων προβολής, αλλά την ίδια τη διεύθυνση φ των φωτεινών ακτίνων και την 1^η προβολή της φ' . Αυτή η μικρή διαφορά διευκολύνει τη σχεδίαση και τον υπολογισμό της σκιαγραφίας. Μπορούμε πάντως να χρησιμοποιήσουμε κι εδώ τις προβολές φ' και φ'' του φωτός.

Μεταφορά της διεύθυνσης φωτισμού από την παραστατική στην αξονομετρική προβολή

Η διεύθυνση φωτισμού στην αξονομετρική προβολή είναι γενικά ανεξάρτητη και ορίζεται απ' ευθείας στο αξονομετρικό σχέδιο. Για λόγους απλοστευσης ή ευκρίνειας ζητούμε συχνά να μεταφέρουμε τη διεύθυνση φωτισμού από την ορθή προβολή στην αξονομετρική προβολή.

Γνωρίζοντας τις προβολές φ' και φ'' του φωτός, φέρνουμε μία κατακόρυφη ευθεία σε τυχαία θέση (σχ. 41) και ορίζουμε το σημείο O , σαν αρχή μέτρησης των μεγεθών $\chi\varphi$, $\gamma\varphi$ και $z\varphi$. Μεταφέρουμε τα μεγέθη $\chi\varphi$ και $\gamma\varphi$ στην αρχή των αξόνων O της αξονομετρικής προβολής, αντίστοιχα στους άξονες χ και γ . Κατόπιν υψώνουμε από την άκρη του $\chi\varphi$ παράλληλα στον άξονα των z και μεταφέρουμε και το μέγεθος $z\varphi$, όπως φαίνεται στο σχήμα 41.

σχ. 41 Μεταφορά της διεύθυνσης φωτισμού από την προβολή κατά Monge σε ισομετρική και διμετρική αξονομετρική προβολή

Σκιά ευθυγράμμου τμήματος

Έχοντας την αξονομετρική προβολή ενός ευθυγράμμου τμήματος AB και την προβολή $A'B'$ του AB σε οριζόντιο επίπεδο προβολής (σχ. 42), βρίσκουμε τις σκιές των A και B ως εξής: από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη διεύθυνση φ και από την προβολή του B' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη φ' . Το σημείο τομής των φ και φ' από τα B και B' αντίστοιχα είναι η σκιά B_1 του σημείου B στο οριζόντιο επίπεδο προβολής Π_1 . Όμοια προσδιορίζουμε τη σκιά του σημείου A , που όμως βρίσκεται πίσω από το επίπεδο Π_2 , είναι επομένως ψεύτικη σκιά. Από το σημείο 1 φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη (παράλληλη στον άξονα z) μέχρι να τμήσει τη φ από το A . Το σημείο τομής είναι το A_2 , πραγματική σκιά του A στο επίπεδο Π_2 . Ενώνουμε τα σημεία B_1 και (A_1) . Το τμήμα B_1K της $B_1(A_1)$ είναι τμήμα της σκιάς της AB στο Π_1 . Στο σημείο K η σκιά της AB «σπάει» και πέφτει στο επίπεδο Π_2 , μέχρι το σημείο A_2 . Ενώνουμε τα K και A_2 .

σχ. 42

Σκιές ευθυγράμμων τμημάτων σε έδρες πολυέδρων

1. Το τμήμα AB είναι κατακόρυφο

Επειδή η αξονομετρική προβολή είναι κι αυτή ορθή προβολή, ισχύουν οι κανόνες της σκιαγραφίας όπως τους μελετήσαμε στην προβολή κατά Monge*.

Φέρνουμε από κάθε σημείο της άνω βάσης του κύβου του σχήματος 43 ευθείες παράλληλες στη διεύθυνση φ και από τις προβολές τους στο επίπεδο έδρασης του κύβου, ευθείες παράλληλες με την φ' . Οι ακμές του κύβου που είναι παράλληλες με το επίπεδο έδρασης, δίνουν σκιές παράλληλες προς τις αντίστοιχες ακμές. Το σημείο B της AB έχει ψεύτικη σκιά μέσα στον όγκο του κύβου. Ενώνουμε τα σημεία A και (B1) και προσδιορίζουμε το σημείο K, όπου η σκιά της ευθείας «σπάει» πάνω στην μπροστά έδρα του κύβου. Επειδή η AB είναι κατακόρυφη, παράλληλη δηλαδή με τη μπροστά έδρα του κύβου, από το σημείο K φέρνουμε ευθεία κατακόρυφη μέχρι να τμήσει την φωτεινή ακτίνα φ από το B.

2. Το τμήμα AB είναι πλάγιο

Προσδιορίζουμε τη σκιά του κύβου στο οριζόντιο επίπεδο έδρασής του. Το σημείο A του AB βρίσκεται πάνω στο επίπεδο έδρασης, επομένως έχει σκιά τον εαυτό του (σχ. 44).

Από το σημείο B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην διεύθυνση φωτισμού φ και από την προβολή του B' φέρνουμε ευθεία παράλληλη στη φ' . Το σημείο B έχει ψεύτικη σκιά (B1) στο οριζόντιο επίπεδο, μέσα στον όγκο της σκιάς του κύβου. Ενώνουμε τα σημεία A και (B1) και προσδιορίζουμε το σημείο καμπής της σκιάς K.

Για να προσδιορίσουμε τη σκιά του σημείου B στην κατακόρυφη μπροστά έδρα του κύβου, χρησιμοποιούμε την κατακόρυφη (παράλληλη στην έδρα) βοηθητική ευθεία που περνά από το B. Η σκιά της βοηθητικής αυτής ευθείας είναι η B'(B1), η οποία κάνει καμπή στο σημείο 1 και στρέφεται κατακόρυφα μέχρι να τμήσει την φ από το σημείο B. Εάν η έδρα του κύβου ήταν αρκετά μεγάλη, η σκιά του σημείου B στην κατακόρυφη έδρα του κύβου θα ήταν το σημείο (B2), το οποίο όμως είναι και πάλι ψεύτικο. Ενώνουμε τα K και (B2) και προσδιορίζουμε το σημείο Λ, δεύτερη καμπή της σκιάς της AB. Επειδή η επάνω έδρα του κύβου είναι επιφάνεια παράλληλη με την επιφάνεια έδρασής του, η σκιά του AB στην επάνω έδρα, θα είναι παράλληλη με τη σκιά στην επιφάνεια έδρασης. Επομένως από το σημείο Λ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AK μέχρι να τμήσει την φ από το B και προσδιορίζουμε το B1.

3.

σχ. 44

Σκιά πλαγίου τμήματος σε πλάγιο επίπεδο (μέθοδος επικάλυψης σκιών)

Κατασκευάζουμε τη σκιά της πυραμίδας, προσδιορίζοντας πρώτα τη σκιά της κορυφής της (P1) στο Π₁ (σχ. 45). Ενώνουμε το (P1) με τα σημεία της βάσης της πυραμίδας και προσδιορίζουμε τα σημεία καμπής των σκιών των ακμών και τα ενώνουμε με τη σκιά P2 του P στο Π₂.

Το σημείο M του τμήματος MN έχει σκιά τον εαυτό του. Βρίσκουμε τη σκιά του σημείου N, φέρνοντας από το N παράλληλη στη φ και από το N' παράλληλη στη φ'. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει το N1, σκιά του N στο Π₁. Ενώνουμε τα σημεία M και N1 και παρατηρούμε ότι η MN1 τέμνει στη διαδρομή της την πυραμίδα στο σημείο K, που είναι σημείο καμπής της σκιάς της MN.

Για να προσδιορίσουμε το τμήμα της σκιάς της MN στην έδρα της πυραμίδας χρειαζόμαστε άλλο ένα σημείο. Παρατηρούμε ότι η MN1 και η Δ(P1) τέμνονται στο σημείο T1, το οποίο ονομάζεται σημείο επικάλυψης σκιών. Το σημείο T1 είναι σκιά σημείου T που βρίσκεται τόσο στην MN, όσο και στην ΔP. Προσδιορίζουμε το σημείο T στην ΔP, φέρνοντας από το T1 ευθεία παράλληλη στην φ και ενώνουμε με το K.

Στην περίπτωση που η σκιά του N βρίσκεται μέσα στον όγκο της σκιάς της πυραμίδας, προσδιορίζουμε το σημείο επικάλυψης T1 στην *προέκταση* την M(N1) (σχ. 46). Τότε το σημείο N2 θα βρίσκεται στην τομή της ΚΤ με την παράλληλη της φ από το σημείο N.

Σκιές στερεών

1. Σκιές πολυέδρων

Οι σκιές των πολυέδρων προσδιορίζονται μέσω των ακμών και των κορυφών τους, σύμφωνα με τους κανόνες τις σκιαγραφίας που έχουμε αναλύσει μέχρι τώρα.

Αυτό που είναι σημαντικό ν' αναφέρουμε είναι η μεθοδολογία προσδιορισμού της σκιαγράφησης ενός αξονομετρικού. Σε πολύπλοκες συνθέσεις πολυέδρων συχνά αντιμετωπίζουμε πρόβλημα με την αναγνώριση της επικάλυψης των σκιών κάθε στερεού στο άλλο, ή στο οριζόντιο επίπεδο έδρασης της σύνθεσης και κατακόρυφο Π₂, όταν αυτό υπάρχει. Μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

- i. Προσδιορίζουμε τις σκιές όλων των στερεών στο έδαφος και κατόπιν μεταφέρουμε κάθε επικάλυψη στην αντίστοιχη έδρα.

σχ. 47 Κάθε στερεό σχήμα της σύνθεσης ρίχνει τη σκιά του στο αμέσως επόμενο του. Η σκιά του στεγάστρου, εφόσον δεν βρίσκεται ολόκληρη στον μπροστινό τοίχο, εξετάζουμε αν βλέπουμε τη σκιά του στο οριζόντιο επίπεδο. Για τον προσδιορισμό της σκιάς της κουπαστής χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος επικάλυψης σκιών.

- ii. Προσδιορίζουμε τη σκιά κάθε στερεού σχήματος χωριστά στα διάφορα επίπεδα στα οποία αυτή βρίσκεται (σχ. 47).

2. Σκιά κώνου

Στην αξονομετρική προβολή ενός κώνου ορίζουμε τη διεύθυνση φωτισμού φ και την 1^η προβολή της φ' . Η βάση του κώνου είναι κύκλος παράλληλος στο επίπεδο Π_1 , επομένως η σκιά του είναι αξονομετρικός κύκλος παράλληλος και ίσος με τον πραγματικό (σχ. 48). Άρα αρκεί να προσδιορίσουμε τη σκιά του κέντρου της έλλειψης, που παριστά αξονομετρικά τον κύκλο της βάσης του κώνου και να σχεδιάσουμε μία έλλειψη ίση με την αρχική στη νέα θέση (παράλληλη μεταφορά).

Προσδιορίζουμε έπειτα τη σκιά της κορυφής του κώνου K στο επίπεδο Π_1 . Η σκιά είναι ψεύτικη, αλλά τη χρησιμοποιούμε για να προσδιορίσουμε τις επαπτόμενες προς την έλλειψη της σκιάς της βάσης. Τα σημεία επαφής $M1$ και $N1$ είναι τα ακραία φωτεινά σημεία της επιφάνειας του κώνου και μεταφέροντας τα παράλληλα προς την φ στη βάση του στερεού, προσδιορίζουμε τις ακραίες φωτεινές γενέτιρες KM και KN . Το τμήμα του κώνου που «βλέπει» προς την ερριμμένη σκιά του είναι το αυτοσκιασμένο τμήμα. Τα σημεία P και Σ είναι τα σημεία καμπής των σκιών $(K1)M1$, $(K1)N1$ των γενετιρών KM και KN , αντίστοιχα. Ενώνουμε τα P και Σ με την πραγματική σκιά $K2$ του K .

3. Σκιά κυλίνδρου

Η κάτω βάση του κυλίνδρου εδράζεται στο επίπεδο Π_1 , επομένως έχει σκιά τον εαυτό της. Η άνω βάση είναι κύκλος παράλληλος στο επίπεδο Π_1 , επομένως η σκιά του είναι αξονομετρικός κύκλος (έλλειψη) ίσος και παράλληλος με τον πραγματικό (σχ. 49). Στην αξονομετρική προβολή του κυλίνδρου φέρνουμε επαπτόμενες στην κάτω βάση ευθείες, παράλληλες στην φ' , (με την ευθεία Pascal*). Προσδιορίζουμε μ' αυτόν τον τρόπο τις ακραίες φωτεινές γενέτιρες του κυλίνδρου MM' και NN' .

Παρατηρούμε ότι το σημείο M έχει σκιά $M2$ στο επίπεδο Π_2 , πρέπει επομένως να προσδιορίσουμε τη σκιά της άνω βάσης και στο επίπεδο Π_2 . Η σκιά ($N2$) του σημείου N βρίσκεται στην τομή της φ από το N και της κατακόρυφης από το σημείο όπου η φ' από το N' τέμνει την ευθεία τομής των επιπέδων Π_1 και Π_2 . Η $M2(N2)$ είναι μία διάμετρος της έλλειψης, που θα αποτελέσει τη σκιά της άνω βάσης του κυλίνδρου στο Π_2 .

Βρίσκοντας τη σκιά μιας κάθετης (στο χώρο) προς την MN διαμέτρου, μπορούμε να βρούμε τους άξονες της νέας έλλειψης (κατασκευή Rytz*¹). Γνωρίζουμε ότι στο χώρο οι διάμετροι KL και MN του κύκλου που αποτελεί το πραγματικό σχήμα της βάσης του κυλίνδρου, είναι μεταξύ τους κάθετες. Επομένως στην αξονομετρική προβολή, που είναι παράλληλη ομολογία*², οι διάμετροι της έλλειψης, που προκύπτει σαν εικόνα του πραγματικού κύκλου είναι αξονομετρικά κάθετες μεταξύ τους (η KL είναι παράλληλη με τις επαπτόμενες της έλλειψης από τα M και N).

Προσδιορίζουμε τη σκιά $K2(\Lambda 2)$ της KL στο επίπεδο Π_2 . Χρησιμοποιώντας την κατασκευή Rytz κατασκευάζουμε την έλλειψη της σκιάς της άνω βάσης του κυλίνδρου στο Π_2 . Οι δύο ελλείψεις αλληλοτέμνονται στα σημεία Σ και T . Ολοκληρώνουμε τη σκιά του κυλίνδρου, φέρνοντας την $PM2$, που είναι κατακόρυφη επαπτόμενη της έλλειψης του Π_2 .

4. Σκιά σφαίρας

Ο προσδιορισμός της σκιάς μιας σφαίρας σε αξονομετρική προβολή είναι ίσως η μοναδική περίπτωση στην αξονομετρία, κατά την οποία είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε τις προβολές της διεύθυνσης φωτισμού φ' και φ'' , αντί για το σύστημα των φ και φ' . Οπότε τότε εργαζόμαστε ακριβώς όπως περιγράψαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο*.

σχ. 49

Σκιαγραφία στην προοπτική

Σε μια προοπτική απεικόνιση θεωρούμε τις ηλιακές ακτίνες συγκλίνουσες προς κάποιο σημείο φυγής, όπως άλλωστε θεωρούμε για όλες τις παράλληλες ευθείες του χώρου. Οι ηλιακές ακτίνες σχηματίζουν με το οριζόντιο επίπεδο e_1 μια γωνία ω , που συνήθως μας είναι γνωστή. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε ότι οι ηλιακές ακτίνες είναι πλάγιες ευθείες στο χώρο, τις οποίες μπορούμε να απεικονίσουμε προοπτικά, αρκεί να γνωρίζουμε τη γωνία ω^* και την προβολή φ' των ακτίνων στο επίπεδο του πίνακα (σχ. 50).

Από το σημείο οράσεως φέρνουμε ευθεία παράλληλη με τη διεύθυνση φ' και προσδιορίζουμε το σημείο $H1'$, την προβολή του σημείου φυγής των ακτίνων του ήλιου. Το σημείο $H1$ του οριζοντα ονομάζεται **προβολή του ήλιου** και μέσω της γωνίας ω προσδιορίζουμε το σημείο H , που ονομάζεται **εικόνα του ήλιου**.

Μετά τον ορισμό της θέσης του ήλιου, εργαζόμαστε όπως και στη σκιαγραφία στην αξονομετρική προβολή, φέρνοντας από κάθε σημείο ευθεία *συγκλίνουσα* στο σημείο H και από την προβολή του στο οριζόντιο επίπεδο, ευθεία *συγκλίνουσα* στο σημείο $H1$. Στην τομή των ευθειών αυτών βρίσκεται κάθε φορά η σκιά του σημείου. Είναι προφανές ότι η σκιά μιας οριζόντιας ευθείας, που γνωρίζουμε ότι ρίχνει ίση και παράλληλη σκιά σε οριζόντιο επίπεδο, στην προοπτική ρίχνει σκιά *προοπτικά ίση και συγκλίνουσα* στο ίδιο με το αρχικό σημείο φυγής.

σχ. 50

χετικές θέσεις της εικόνας του ήλιου

Όπως είδαμε στο προοπτικό πλάγιας ευθείας, η γωνία ω μπορεί να βρίσκεται πάνω ή κάτω από την γραμμή του οριζοντα. Αντίστοιχα προσδιορίζεται η εικόνα του ήλιου πάνω ή κάτω από τον οριζοντα.

1. Η εικόνα του ήλιου βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα

Όταν η εικόνα Η του ήλιου βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα, ο ήλιος βρίσκεται μπροστά από τον παρατηρητή:

- Αν η εικόνα Η του ήλιου βρίσκεται επάνω από τον ορίζοντα και αριστερά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται μπροστά και αριστερά του παρατηρητή.
- Αν η εικόνα του ήλιου βρίσκεται επάνω από τον ορίζοντα και δεξιά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται μπροστά και δεξιά του παρατηρητή (σχ. 50).

2. Η εικόνα του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα

Όταν η εικόνα Η του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα, ο ήλιος βρίσκεται πίσω από τον παρατηρητή:

- Αν η εικόνα Η του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα και αριστερά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται πίσω και δεξιά του παρατηρητή.
- Αν η εικόνα Η του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα και δεξιά του παρατηρητή, ο ήλιος βρίσκεται πίσω και αριστερά του παρατηρητή (σχ. 51).

Ακτίνες παράλληλες στον πίνακα

Μία ειδική περίπτωση έχουμε όταν οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες στο κατακόρυφο επίπεδο του πίνακα. Τότε οι ηλιακές ακτίνες δεν τέμνουν σε

σχ. 51

σχ. 52

κανένα σημείο τον πίνακα και επομένως δεν έχουν

σημείο φυγής (εικόνα του ήλιου). Η γωνία πρόσπτωσης του φωτός ω είναι ίση με την πραγματική και η προβολή της στο επίπεδο e_1 έχει διεύθυνση παράλληλη με τη γραμμή του εδάφους γε. Οι προοπτικές εικόνες των φωτεινών ακτίνων εμφανίζονται παράλληλες μεταξύ τους (σχ. 52).

Σκιές στερεών

Οι σκιαγραφία των πολυέδρων, κωνικών και κυλινδρικών επιφανειών αντιμετωπίζεται με την ίδια μεθοδολογία όπως και στην αξονομετρία. Αντίθετα η σκιαγραφία μίας σφαίρας σε προοπτική απεικόνιση παρουσιάζει μερικές ιδιαιτερότητες και αξίζει να μελετηθεί.

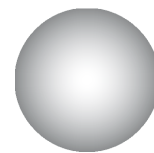
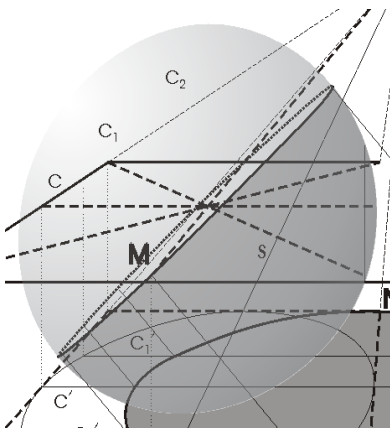
1. Σκιά σφαίρας με παράλληλες ακτίνες

Όταν έχουμε κατασκευάσει το προοπτικό μιας σφαίρας με μετωπικούς κύκλους, η διαδικασία της σκιαγράφησης της είναι σχετικά απλή, αρκεί να έχουμε προσδιορίσει τις προβολές των μετωπικών κύκλων c' , c_1' , c_2' και στην προοπτική εικόνα (σχ. 53). Όταν οι ακτίνες είναι παράλληλες στον πίνακα, η σφαίρα χωρίζεται σε δύο ημισφαίρια, ένα φωτεινό κι ένα σκοτεινό. Ο κύκλος της αυτοσκιάς της προσδιορίζεται όταν στους μετωπικούς κύκλους φέρουμε ευθείες εφαπτόμενες προς τις φωτεινές ακτίνες. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζονται διάφορα σημεία, ικανά να μας περιγράψουν την έλλειψη της αυτοσκιάς της σφαίρας.

Αρκεί τώρα να προσδιορίσουμε τη σκιά του κύκλου αυτού (του κύκλου της αυτοσκιάς) στο οριζόντιο επίπεδο e_1 . Προβάλλουμε στο οριζόντιο επίπεδο τα σημεία του κύκλου της αυτοσκιάς, που έχουμε ήδη προσδιορίσει. Η προβολή στο οριζόντιο επίπεδο οποιουδήποτε σημείου ενός μετωπικού κύκλου, του c για παράδειγμα, θα βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα c' . Προεκτείνουμε επομένως την c' μέχρι να τμηθεί από τις φ'' που είναι εφαπτόμενες του c και προσδιορίζουμε τα σημεία $A1$ και $E1$, σκιές των A και E στο e_1 . Οι σκιές $M1$ και $N1$ των σημείων M και N του οριζόντιου κύκλου s είναι χαρακτηριστικά, διότι η έλλειψη της σκιάς της σφαίρας $u1$ έχει σ' αυτά τα σημεία οριζόντιες εφαπτόμενες.

2. Σκιά σφαίρας με την εικόνα του ήλιου

Μπορούμε και εδώ να χρησιμοποιήσουμε τους μετωπικούς κύκλους της κατασκευής της προοπτικής



εικόνας της σφαίρας, αλλά η διαδικασία είναι μάλλον ευκολότερη αν θεωρήσουμε ότι ο ήλιος «βλέπει» τη σφαίρα, είναι δηλαδή ο παρατηρητής (σχ. 54).

Προσδιορίζουμε τότε μία νέα περιβάλλουσα, που μπορεί εύκολα να σχεδιαστεί σαν εφαρμογή του θεωρήματος Dandelin*.

σχ. 54

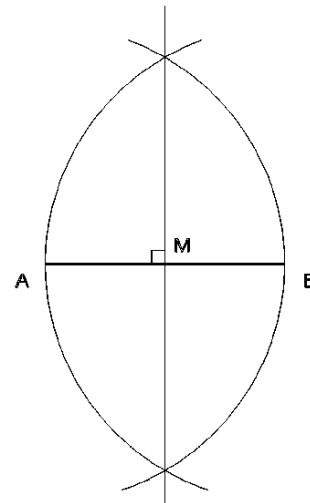
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Γεωμετρικές κατασκευές

Σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι να υπενθυμίζουν γεωμετρικές κατασκευές που θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στο μάθημα της παραστατικής γεωμετρίας, της προοπτικής, αξονομετρίας και σκιαγραφίας.

1. Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος

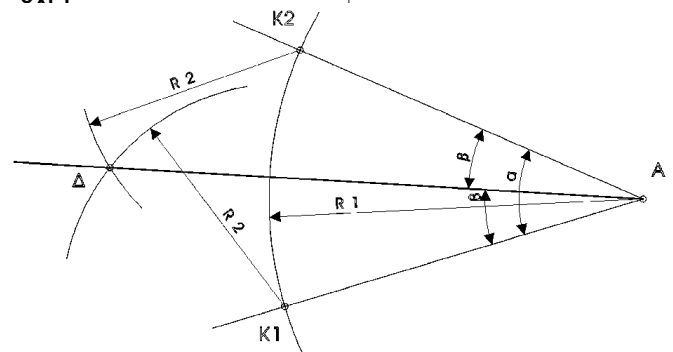
Για να βρούμε το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB , κατασκευάζουμε τόξα κύκλων με κέντρο το σημείο A και με κέντρο το σημείο B και ακτίνα μήκους AB (σχ. 1). Από την τομή των δύο τόξων περνά ευθεία, η οποία έχει την ιδιότητα να διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα AB και να είναι κάθετη προς το AB .



σχ. 1

2. Διχοτόμος γωνίας

Για να κατασκευάσουμε τη διχοτόμο μιας γωνίας \hat{A} , φέρνουμε τόξο κύκλου με κέντρο A και τυχαία ακτίνα R_1 . Το τόξο τέμνει τους φορείς της γωνίας \hat{A} στα σημεία K_1 και K_2 (σχ. 2). Από τα σημεία K_1 και K_2 κατασκευάζουμε τόξα κύκλων με την ίδια γωνία R_2 . Η τομή των δύο τόξων δημιουργεί το σημείο Δ . Η ημιευθεία $A\Delta$ διχοτομεί τη γωνία \hat{A} .



σχ. 2

3. Χάραξη της διχοτόμου γωνίας με άγνωστη κορυφή

Κατασκευάζουμε ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα AB . Με τη μέθοδο προσδιορισμού διχοτόμου, όπως περιγράψαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, κατασκευάζουμε τις διχοτόμους δ_1 , δ_2 , δ_3 και δ_4 των τεσσάρων γωνιών που σχηματίστηκαν. Τα σημεία 1 και 2 είναι οι τομές των διχοτόμων ανά δύο και ορίζουν τη διχοτόμο EZ της γωνίας των α και β (σχ. 3).

4. Μεταφορά γωνίας

Για να δημιουργήσουμε γωνία \hat{A}' ίση με μία γνωστή γωνία \hat{A} , αρκεί να γνωρίζουμε τη θέση του ενός φορέα της και ένα σημείο στο φορέα, που θα ορίσουμε σαν κορυφή της γωνίας \hat{A}' . Γράφουμε τόξο κύκλου με κέντρο το σημείο A και τυχαία ακτίνα R_1 . Το τόξο τέμνει τους φορείς της γωνίας \hat{A} στα σημεία K_1 και K_2 (σχ. 4). Με την ίδια ακτίνα R_1 γράφουμε τόξο κύκλου με κέντρο το σημείο A' . Το τόξο αυτό τέμνει τον ένα φορέα της γωνίας \hat{A}' στο σημείο $K'1$. Με κέντρο το σημείο $K'1$ και ακτίνα $R_2 = K_1K_2$ γράφουμε τόξο κύκλου. Τα δύο τόξα R_1 και R_2 τέμνονται στο σημείο $K'2$. Η ημιευθεία $A'K'2$, μαζί με την ημιευθεία $A'K'1$ ορίζουν γωνία $\hat{A}' = \hat{A}$.

σχ. 3

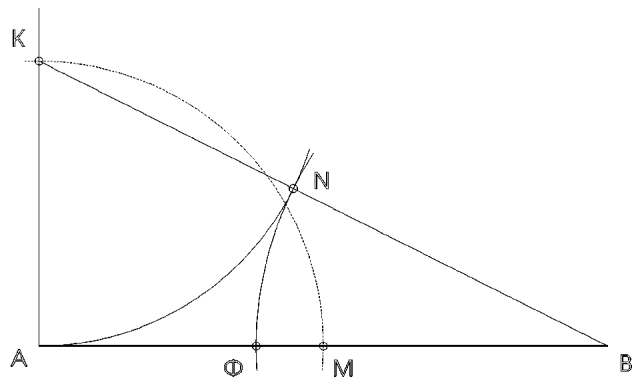
5. Εφαπτόμενες κύκλου

Για να κατασκευάσουμε τις εφαπτόμενες σ' ένα κύκλο (O,r) από ένα σημείο A , που βρίσκεται έξω από την περιφέρειά του, αρχικά γράφουμε το ευθύγραμμο τμήμα OA (σχ. 5) και βρίσκουμε (με κατασκευή μεσοκαθέτου) το μέσο του M . Με κέντρο το σημείο M και ακτίνα MO γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τον αρχικό κύκλο (O,r) στα σημεία K_1 και K_2 . Οι ημιευθείες AK_1 και AK_2 είναι οι εφαπτόμενες από το σημείο A στον κύκλο (O,r) .

6. Διάρθρωση ευθυγράμμου τμήματος σε n ίσα μέρη

Ο χωρισμός ευθυγράμμου τμήματος σε n ίσα μέρη είναι μια εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή του Μιλήσιου. Στο σχήμα 6 παρουσιάζεται ο τρόπος που χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε 7 ίσα μέρη: από το σημείο A γράφουμε μια τυχαία ημιευθεία $A\epsilon$. Ξεκινώντας από το σημείο A ορίζουμε πάνω στην ημιευθεία 7 ίσα και τυχαίου μήκους τμήματα. Ενώνουμε το τελευταίο σημείο της ημιευθείας $A\epsilon$ με το σημείο B . Από καθένα από τα υπόλοιπα σημεία της ημιευθείας $A\epsilon$ γράφουμε ευθείες παράλληλες προς την πρώτη. Στο σχήμα 7 παρουσιάζεται η ίδια κατασκευή, με τη διαφορά ότι τα τμήματα που χωρίζουμε στο ευθύγραμμο τμήμα AB δεν είναι ίσα, αλλά ανάλογα με αναλογία γνωστή και ίση με $1:2:3$.

7. Διάρθρωση ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (χρυσή τομή)



Για να χωρίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σε μέσο και άκρο λόγο, γράφουμε έστω από το A (σχ. 8) ημιευθεία κάθετη στο AB και ορίζουμε σημείο K ίσο με το μισό του μήκους του ευθυγράμμου τμήματος AB. Γράφουμε το τμήμα KB. Με κέντρο το σημείο K και ακτίνα KA γράφουμε τόξο κύκλου, το οποίο τέμνει την KB στο σημείο N. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BN γράφουμε τόξο κύκλου, που τέμνει την AB στο σημείο Φ. Ο λόγος των μηκών

σχ. 8

των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Phi/A\Phi$ είναι ίσος με $\varphi = 1,618$, όπως και ο λόγος $AB/\Phi B$.

8. Κατασκευή πενταγώνου

Λαμβάνοντας σαν βάση το AB, με κέντρα τα A και B αντίστοιχα σχεδιάζουμε δύο τόξα που τέμνονται στο σημείο 1 (σχ. 9). Από το σημείο 1 φέρνουμε την μεσοκάθετο στο AB και ορίζουμε το σημείο 2. Από το σημείο B φέρνουμε παράλληλη στην 12 η οποία τέμνει το τόξο κύκλου με κέντρο το B στο σημείο 3. Με κέντρο το 2 και με ακτίνα 12 σχεδιάζουμε τόξο κύκλου που τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο 4. Με κέντρα τα A και B και με ακτίνα A4 σχεδιάζονται τόξα που ορίζουν τα σημεία Γ, Δ και Ε. Τα σημεία αυτά μαζί με τα A και B αποτελούν τις κορυφές του πενταγώνου.

9. Κατασκευή πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο

Από το σημείο O (κέντρο του κύκλου), σχεδιάζεται η κάθετος στη διάμετρο AOB, και ορίζεται το σημείο Δ που αποτελεί και την πρώτη κορυφή του ζητούμενου πενταγώνου (σχ. 10). Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τον άξονα 3-4 της δεξιάς ημιδιαμέτρου OB που τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στα σημεία 3 και 4 και την OB στο σημείο 5. Με κέντρο το σημείο 5 και ακτίνα την 5-Δ κατακλίνεται το σημείο Δ επί της διαμέτρου και έτσι ορίζεται το σημείο 6. Με κέντρο το Δ και ακτίνα Δ-6 σχεδιάζεται τόξο που τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στο σημείο Ε. Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ορίζει την πλευρά του ζητούμενου πενταγώνου. Μεταφέροντας με το διαβήτη το μήκος αυτό στην περιφέρεια του κύκλου ορίζονται και οι άλλες πλευρές του πενταγώνου.

σχ. 9

10. Κατασκευή εξαγώνου

σχ. 10

Με κέντρα τα A και B και με ακτίνα AB ορίζουμε το σημείο O (σχ. 11). Με κέντρο το O σχεδιάζεται ημικύκλιο με ακτίνα AB που τέμνει τα τόξα από τα κέντρα A και B στα σημεία Γ και Z που είναι δύο κορυφές του εξαγώνου. Με κέντρα τα Γ και Z και με ακτίνα πάντα AB σχεδιάζονται δύο νέα τόξα που τέμνουν το ημικύκλιο στα Δ και Ε που αποτελούν δύο νέες κορυφές του ζητούμενου σχήματος. Ενώνοντας τα A, B, Γ, Δ, Ε και Z κατασκευάζεται το εξαγώνο πλευράς AB.

11. Κατασκευή εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο

Σχεδιάζεται η κάθετος προς τη διάμετρο του κύκλου στο κέντρο O (σχ. 12). Η τομή της καθέτου με την περιφέρεια του κύκλου ορίζει τα σημεία A και Δ και είναι και οι πρώτες κορυφές του εξαγώνου. Με κέντρο τα A και Δ και ακτίνα AO σχεδιάζονται δύο τόξα που τέμνουν την περιφέρεια στα B, Γ, E και Z , σημεία που μαζί με τα A και Δ ορίζουν τις έξι κορυφές του εξαγώνου.

12. Κατασκευή επταγώνου

Επεκτείνεται η AB και ορίζεται το σημείο 1 έτσι ώστε $A1=AB$ (σχ. 13). Με κέντρο το B και ακτίνα $B1$ σχεδιάζεται τόξο που τέμνει την κάθετο στο A στο σημείο 2 . Στη συνέχεια σχεδιάζεται η διχοτόμος της $1B2$ που τέμνει την κάθετο το A στο σημείο 3 . Με κέντρα τα A και B σχεδιάζονται κύκλοι ακτίνας $B4$ που τέμνονται στο σημείο O και το οποίο είναι το κέντρο κύκλου επί του οποίου μεταφέροντας την BO ορίζονται οι επτά κορυφές του ζητούμενου επταγώνου.

13. Κατασκευή επταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο

Κατασκευάζουμε την κάθετο στη διαγώνιο του κύκλου που τέμνει την περιφέρεια στο σημείο 1 (σχ. 14). Με κέντρο το 1 και ακτίνα R σχεδιάζουμε τόξο που τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στα σημεία 3 και 4 . Η χορδή αυτού του τόξου ισούται με το διπλάσιο της πλευράς του ζητούμενου οχταγώνου. Μεταφέροντας με το διαβήτη το ήμισυ της χορδής (ξεκινώντας από το E) σχεδιάζουμε το ζητούμενο οχτάγωνο.

14. Κατασκευή οκταγώνου

Επί της πλευράς AB ορίζεται ο άξονας η τομή του οποίου με την AB είναι το σημείο 1 (σχ. 15). Με κέντρο το 1 και με ακτίνα την $A1$ σχεδιάζουμε ημικύκλιο που τέμνει τον άξονα στο σημείο 2 . Με κέντρο το 2 και με ακτίνα $2A$ σχεδιάζουμε τόξο που τέμνει τον άξονα στο σημείο 3 . Με κέντρο το 3 και ακτίνα $3A$ σχεδιάζουμε νέο κύκλο που περιγράφει το οκτάγωνο πλευράς AB . Στη περιφέρεια αυτή μεταφέρουμε την πλευρά AB και ορίζουμε τα σημεία Γ, Δ, E, Z, H , και Θ που αποτελούν τις κορυφές του ζητούμενου οκταγώνου.

15. Κατασκευή οκταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο

Κατασκευάζουμε την κάθετο στη διάμετρο ΓH του κύκλου, που τέμνει την περιφέρεια στα σημεία A και E , που μαζί με τα προηγούμενα αποτελούν τις τέσσερις κορυφές του οκταγώνου. Σχεδιάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών που ορίζονται από το κέντρο του κύκλου και τις κορυφές A, Γ, E, H . Οι τομές των διχοτόμων με την περιφέρεια ορίζουν τις υπόλοιπες κορυφές του ζητούμενου οκταγώνου.

σχ. 16

16. Κατασκευή πεπλατυσμένου πολυκεντρικού τόξου

Σχεδιάζουμε τόξο κύκλου με κέντρο Δ και ακτίνα ΔA (σχ. 17), μέχρι να τμήσει την προέκταση του βέλους $\Gamma\Delta$ (σημείο 5). Με κέντρο το Γ σχεδιάζουμε περιφέρεια με ακτίνα $\Gamma 5$. Ενώνουμε τα σημεία A και B με το Γ ορίζονται τα τμήματα $A1$ και $B2$. Σχεδιάζουμε τους άξονες των δύο αυτών τμημάτων: η τομή τους με την χορδή (σημεία 3 και 4) και με την προέκταση του βέλους (σημείο 6) ορίζουν τα κέντρα των τόξων των κύκλων με ακτίνες 6Γ , $3A$ και $4B$ που συνθέτουν το ζητούμενο τόξο.

17. Κατασκευή ασύμμετρου τόξου δεδομένων των σημείων γένεσής του

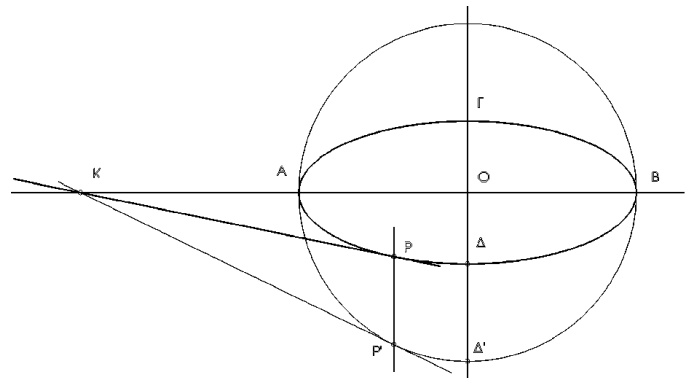
Ενώνουμε τα σημεία γένεσης του τόξου A και B (σχ. 18), που προφανώς βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος και προσδιορίζουμε το μέσο τους (σημείο 1). Από το σημείο αυτό φέρνουμε την κατακόρυφη και στη συνέχεια σχεδιάζουμε κύκλο ακτίνας 1 A που τέμνει την κατακόρυφο στο σημείο 2. Από το σημείο 2 σχεδιάζουμε την κάθετο στην AB (ευθεία 2-5) που τέμνει τις καθέτους από τα A και B στα σημεία 3 και 4. Τα σημεία αυτά αποτελούν τα κέντρα χάραξης των ζητούμενων τόξων.

18. Γεωμετρική κατασκευή έλλειψης

Η κατασκευή της καμπύλης της έλλειψης απαιτεί να γνωρίζουμε τον μεγάλο της άξονα AB και τον μικρό της άξονα $\Gamma\Delta$. Οι άξονες AB και $\Gamma\Delta$ αλληλοδιχοτομούνται κάθετα στο κέντρο O της έλλειψης.

Με κέντρο το σημείο O γράφουμε δύο κύκλους, τον ένα με διάμετρο ίση με τον μικρό άξονα και τον δεύτερο με διάμετρο ίση με τον μεγάλο άξονα της έλλειψης (σχ. 19). Από το σημείο O γράφουμε τυχαία ακτίνα προς τον μεγάλο κύκλο. Από το σημείο που η ακτίνα τέμνει τον μεγάλο κύκλο γράφουμε ημιευθεία παράλληλη προς τον μικρό άξονα και από το σημείο που η ακτίνα τέμνει τον μικρό κύκλο, γράφουμε ημιευθεία παράλληλη προς τον μεγάλο άξονα. Το σημείο τομής E των ημιευθειών αυτών είναι σημείο της καμπύλης της έλλειψης. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω εργασία, μπορούμε να βρούμε περισσότερα σημεία της καμπύλης και να κατασκευάσουμε την έλλειψη ενώνοντάς τα.

19. Εφαπτομένη έλλειψης από σημείο του μεγάλου άξονά της



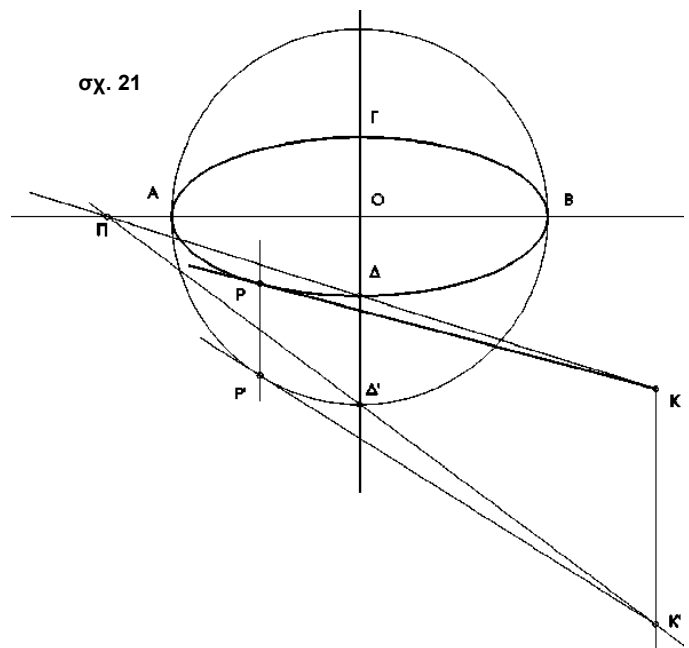
Για την κατασκευή αυτή χρειάζεται να κατασκευάσουμε τον κύκλο που έχει κέντρο το κέντρο της έλλειψης και διάμετρο ίση με τον μεγάλο άξονά της (σχ. 20). Από το σημείο K του μεγάλου άξονα της έλλειψης, το οποίο βρίσκεται έξω από την περιφέρειά της, κατασκευάζουμε την εφαπτομένη στον κύκλο (O, OA) και ορίζουμε το σημείο επαφής P' . Από το σημείο P' γράφουμε ημιευθεία παράλληλη προς τον μικρό άξονα της έλλειψης. Το σημείο P που προκύπτει από την τομή της ημιευθείας αυτής με την καμπύλη της έλλειψης, είναι το σημείο επαφής της έλλειψης και της εφαπτομένης της από το σημείο K .

20. Εφαπτόμενη έλλειψης από τυχαίο σημείο εκτός της περιφέρειάς της

Στη γενική αυτή περίπτωση γράφουμε την ευθεία $K\Delta$ και την προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την προέκταση του μεγάλου άξονα της έλλειψης, στο σημείο Π (σχ. 21). Γράφουμε την ευθεία $\Pi\Delta'$ και την προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την ευθεία που περνά από το K και είναι παράλληλη στον μικρό άξονα της έλλειψης, στο σημείο K' . Από το σημείο K' κατασκευάζουμε την εφαπτομένη του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα OA , που ονομάζεται ομόλογος κύκλος της έλλειψης. Ορίζουμε το σημείο επαφής P' και γράφουμε από το P' ευθεία επίσης

σχ. 20

της έλλειψης. Ορίζουμε το σημείο παράλληλη στον μικρό άξονα της την καμπύλη της έλλειψης και είναι



21. Εφαπτομένη έλλειψης μέσω της ευθείας Pascal

Από το σημείο K φέρνουμε τρεις τυχαίες ευθείες, οι οποίες τέμνουν την έλλειψη σε 6 σημεία (σχ. 22). Φέρνουμε τις διαγωνίους των πρώτων και δεύτερων διαδοχικών σημείων. Οι τομές των διαγωνίων ορίζουν μια ευθεία, την ευθεία Pascal, η οποία τέμνει την έλλειψη στα σημεία A και B . Από τα σημεία A και B διέρχονται οι εφαπτό-μενες της έλλειψης από το σημείο K .

22. Εφαπτομένη έλλειψης παράλληλη σε γνωστή διεύθυνση

Γνωρίζουμε τη διεύθυνση των εφαπτομένων της έλλειψης δ και ζητούμε τα σημεία επαφής. Φέρνουμε τυχαίες ευθείες παράλληλες προς τη διεύθυνση δ (σχ. 23), ώστε να τέμνουν την έλλειψη σε 6 σημεία και κατασκευάζουμε την ευθεία Pascal, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Τα σημεία A και B είναι τα ζητούμενα σημεία.

23. Συζυγείς διάμετροι έλλειψης

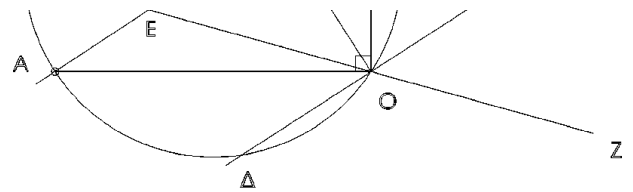
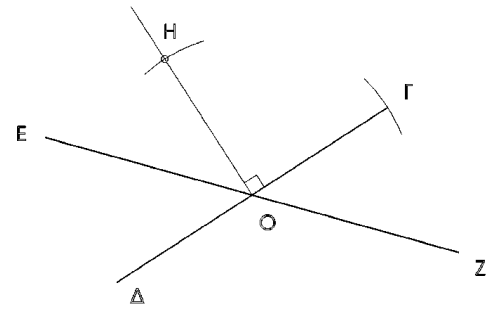
Η έλλειψη και ο κύκλος παρουσιάζουν αλληλοσυσχετισμό των ιδιοτήτων τους, που ονομάζεται *ομολογία*. Στην περίπτωση του κύκλου και της έλλειψης η αντιστοιχία των ιδιοτήτων είναι αμφιμονοσύμαντη. Ένα παράδειγμα αυτού του συσχετισμού φαίνεται στο σχήμα 24: το ζευγάρι των κάθετων διαμέτρων $K'L'$ και $M'N'$ του ομόλογου κύκλου της έλλειψης δημιουργεί το ζευγάρι των διαμέτρων KL και MN της έλλειψης, που ονομάζονται συζυγείς διάμετροι. Η εφαπτομένη ϵ' του ομόλογου κύκλου στο σημείο L' είναι παράλληλη με τη διάμετρο $M'N'$, η οποία είναι κάθετη στην $K'L'$. Όμοια η εφαπτομένη ϵ της έλλειψης στο σημείο L είναι παράλληλη με την διάμετρο MN της έλλειψης, η οποία είναι συζυγής της KL .

Ειδική περίπτωση συζυγών διαμέτρων μιας έλλειψης είναι το ζευγάρι του μεγάλου και μικρού άξονά της, οι οποίες είναι οι μόνες κάθετες μεταξύ τους συζυγείς διάμετροι.

24. Κατασκευή Rytz

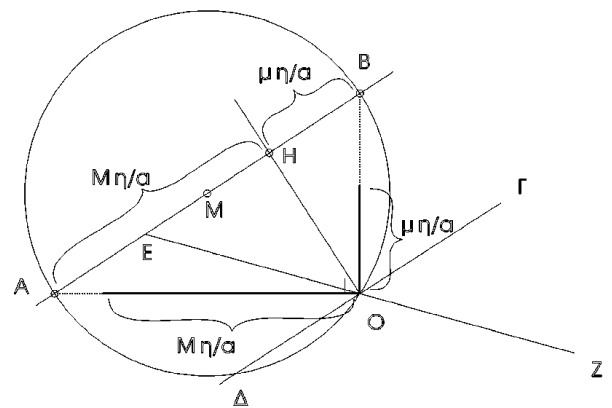
Η γεωμετρική αυτή κατασκευή μάς δίνει τη δυνατότητα να βρούμε και να κατασκευάσουμε τον μεγάλο και μικρό άξονα μιας έλλειψης, όταν γνωρίζουμε μόνο ένα ζεύγος συζυγών διαμέτρων της. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΕΖ του σχήματος 25 γνωρίζουμε ότι είναι συζυγείς διάμετροι μιας έλλειψης και αλληλοδιχοτομούνται στο σημείο Ο, το οποίο είναι το κέντρο της ζητούμενης έλλειψης. Από το κέντρο Ο γράφουμε ευθεία κάθετη προς μία από τις δύο συζυγείς, έστω την ΓΔ και ορίζουμε πάνω της τμήμα ΟΗ = ΟΓ (σχ. 25). Γράφουμε την ευθεία ΕΗ και κατασκευάζουμε το μέσο της Μ. Με κέντρο Μ και ακτίνα ΜΟ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ΕΗ στα σημεία Α και Β. Οι ευθείες ΟΑ και ΟΒ είναι ο μεγάλος και μικρός ημιάξονας της έλλειψης. Ο μεγάλος άξονας βρίσκεται μέσα στην οξεία γωνία των συζυγών ΓΔ και ΕΖ (σχ. 26) και ο μικρός άξονας βρίσκεται μέσα στην αμβλεία γωνία των ΓΔ και ΕΖ. Το μέγεθος του μικρού ημιάξονα της έλλειψης ($μη/α$) είναι ίσο με το τμήμα ΗΒ και το της έλλειψης ($Μη/α$) είναι ίσο με το τμήμα ΗΑ. στις ευθείες ΟΒ και ΟΑ αντίστοιχα, κατασκευάζουμε το μεγάλο και μικρό άξονα της έλλειψης και επομένως και την ίδια την καμπύλη της (σχ. 27).

σχ. 25



σχ. 26

μέγεθος του μεγάλου ημιάξονα
Μεταφέροντας τα μεγέθη αυτά



σχ. 27

η περίμετρος είναι ίση με το βήμα της
τετραγώνου προς τη κατεύθυνση που

25. Κατασκευή σπείρας μέσω ημικυκλίων

Επί ευθυγράμμου τμήματος ορίζουμε σημείο 1 (σχ. 28). Με κέντρο το 1 και ακτίνα 1 Α σχεδιάζεται το πρώτο ημικύκλιο και ορίζεται το σημείο Β. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ σχεδιάζεται το δεύτερο ημικύκλιο που ορίζει το σημείο Γ. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία σχεδιάζουμε τα υπόλοιπα ημικύκλια που ορίζουν τη σπείρα.

26. Κατασκευή σπείρας με τέσσερα κέντρα και σταθερό βήμα

Αρχικά σχεδιάζουμε τετράγωνο (1234) του οποίου σπείρας (σχ. 29). Προεκτείνουμε τις πλευρές του θέλουμε να αναπτυχθεί η σπείρα (π.χ. στο σχήμα δεξιόστροφα). Με κέντρο το 1 και με ακτίνα 1-4 σχεδιάζουμε τόξο μέχρι να τμήσει την προέκταση της πλευράς 12 και ορίζουμε το σημείο Α. Με κέντρο το 2 και ακτίνα 2-Α σχεδιάζουμε τόξο μέχρι να τμήσει την προέκταση της πλευράς 32 και ορίζουμε το σημείο Β. Με κέντρο το 3 και ακτίνα 3-Β σχεδιάζουμε τόξο μέχρι να τμήσει την προέκταση της πλευράς 43 και ορίζουμε το σημείο Γ. Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε μέχρι να ορίσουμε και τα υπόλοιπα ημικύκλια της σπείρας.

27. Κατασκευή της διακοσμητικής σπείρας του ιωνικού κιονόκρανου

Το κέντρο της Ιωνικής σπείρας (οφθαλμός) είχε συγκεκριμένες αναλογίες με το υπόλοιπο τμήμα του κιονόκρανου και της κολώνας όπως π.χ. σε ορισμένες περιπτώσεις, η ακτίνα του ισούται με το 1/18 του εμβάτη (μέτρου) της κολώνας. Η χάραξη τους διαφέρει από μνημείο σε μνημείο χωρίς να έχει οριστικοποιηθεί η μέθοδος. Μια μορφή έλικος «ιδεατού» κιονοκράνου μπορεί να χαραχθεί με τμήματα κύκλου που γράφονται με δώδεκα κέντρα στις γωνίες τριών ομολόγων τετραγώνων με την μια πλευρά στην κάθετο διάμετρο του οφθαλμού (που γράφεται πρώτος), εκ των οποίων το μεγαλύτερο έχει πλευρά ίση με την ακτίνα του οφθαλμού της σπείρας και έχουν κέντρο ομολογίας το κέντρο του οφθαλμού (σχ. 31,32). Η μέθοδος αυτή είχε προταθεί αρχικά από το Βιτρούβιο (βιβλίο III, κεφ. 2), όχι όμως με απόλυτη ακρίβεια, με αποτέλεσμα το λατινικό κείμενο να προσφέρεται για διαφορετικές ερμηνείες. Πολλοί άλλοι τρόποι χάραξης της σπείρας είναι γνωστοί σύμφωνα με προτάσεις του Αρχιμήδη καθώς και νεότερων αρχιτεκτόνων. Ο Β. Fletcher προτείνει τη χάραξη της σπείρας με την εκτύλιξη νήματος από κογγύλι (σχ. 30). Ο Penrose επίσης την εκτύλιξη νήματος από απλό κύλινδρο διαμέτρου ίσης με τη διάμετρο του οφθαλμού.

Κατασκευή Α. (μέθοδος του Vitruvio κατά Goldman) σχ. 31

Κατασκευή Β. Στο εσωτερικό του οφθαλμού της σπείρας εγγράφεται τετράγωνο 1234 του οποίου οι κορυφές βρίσκονται στις κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου του οφθαλμού. Σχεδιάζουμε τους άξονες 5-7 και 6-8 και τους διαιρούμε σε έξι ίσα μέρη ορίζοντας τις υπόλοιπες κορυφές 9 μέχρι 12. Προεκτείνουμε τις πλευρές των τετραγώνων σύμφωνα με τα προηγούμενα και από τις κορυφές αυτές σχεδιάζουμε τόξα κύκλου που αποτελούν την εξωτερική πλευρά της σπείρας (βλ. σχ. 33) Π1,2,3,4,5,6. Με την ίδια διαδικασία αλλά διαιρώντας τους άξονες 5-7 και 6-8 σε τέσσερα ίσα μέρη, σχεδιάζουμε την εσωτερική πλευρά της σπείρας.

σχ. 32 Λεπτομέρεια του οφθαλμού

Το παιχνίδι της Γεωμετρίας

Ο Leonardo da Vinci συχνά σχεδίαζε γεωμετρικές χαράξεις πολλές φορές σαν παιχνίδι ενδιαφέρον κι ευχάριστο. Τα αποτελέσματα αυτών των χαράξεων αποτέλεσαν ένα χειρόγραφο με τίτλο De Ludo geometrico όπου δια μέσου αφηρημένων γεωμετρικών κατασκευών σκοπό είχε να διερευνήσει τους νόμους της φύσης. Στα σχέδια του εγγράφει στους κύκλους τετράγωνα και εξάγωνα χαράζοντας τόξα που ενωμένα ανά δύο δίνουν τις γεωμετρικές μορφές των πετάλων των φύλλων, κ.α. Σκοπός του ήταν, διαμέσου των γεωμετρικών μορφών της επίπεδης γεωμετρίας, να ανακαλύψει τα μυστήρια των αναλογιών, της συμμετρίας και της αρμονίας σε σχέση με τη φύση.

σχ. 33

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Προοπτικό περιγράμματος σφαίρας

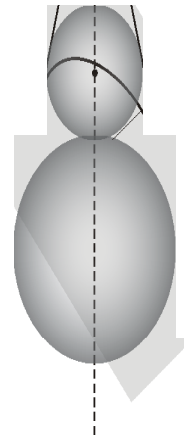
Όταν η προοπτική εικόνα μιας σφαίρας είναι έλλειψη, η κατασκευή της γίνεται και με τη βοήθεια της εφαρμογής του θεωρήματος του Dandelin.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Dandelin, όταν μια κωνική τομή είναι έλλειψη, **οι εστίες της E_1 και E_2 είναι τα σημεία επαφής της εγγεγραμμένης και παρεγγε-γραμμένης στον κώνο σφαίρας (K_1 και K_2 αντίστοιχα) με το επίπεδο τομής Π** (σχ. 1).

Το θεώρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην προοπτική, αν θεωρήσουμε ότι ο κώνος είναι ο οπτικός κώνος με κέντρο το σημείο οράσεως, το επίπεδο Π είναι **σχ. 1** το επίπεδο του πίνακα και οι ακραίες γενέτιρες του οπτικού κώνου είναι οι εφαπτόμενες σε σφαίρα, της οποίας θέλουμε να προσδιορίσουμε την προοπτική εικόνα.

Στην εφαρμογή αυτή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τις εστίες της έλλειψης (προοπτικής εικόνας της σφαίρας) και δύο εφαπτόμενες στην έλλειψη ευθείες. Τα στοιχεία αυτά είναι αρκετά για να κάνουμε τη γεωμετρική κατασκευή της έλλειψης (σχ. 2). Η απόσταση των εστιών μιας έλλειψης ονομάζεται εστιακή απόσταση 2γ . Η μεγαλύτερη διάμετρος μιας έλλειψης ονομάζεται **σχ. 2** μεγάλος άξονας $2a$ και η μικρότερη διάμετρος της έλλειψης ονομάζεται μικρός άξονας $2b$. Ο μεγάλος και μικρός άξονας μιας έλλειψης αλληλο-διχοτομούνται κάθετα και οι εστίες της έλλειψης βρίσκονται στον μεγάλο άξονά της. Η μαθηματική σχέση που συνδέει τα μεγέθη των αξόνων και της εστιακής απόστασης είναι: $a^2=b^2+\gamma^2$ (ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα την a).

Χρησιμοποιούμε μια ιδιότητα της έλλειψης, κατά την οποία το συμμετρικό ως προς την εφαπτομένη e_1 σημείο E της μίας εστίας E_2 της έλλειψης, διέρχεται από τον διευθύνοντα κύκλο με κέντρο την εστία E_1 (σχ. 3). Διευθύνοντες κύκλοι μιας έλλειψης είναι αυτοί που έχουν κέντρα τις εστίες E_1 και E_2 και ακτίνα ίση με $2a$. Μεταφέρουμε το μέγεθος $2a$ του μεγάλου άξονα της έλλειψης στην ευθεία E_1E_2 , έτσι ώστε τα μέσα των AB και E_1E_2 **σχ. 3** να ταυτίζονται και φέρνουμε τη μεσοκάθετη της AB . Με κέντρο τη μία εστία, έστω την E_1 , που ορίζει στη μεσοκάθετη τα σημεία Γ και Δ , τα έλλειψης. Με τον μεγάλο και μικρό άξονα κατασκευάζουμε την καμπύλη της έλλειψης (σχ. 4).



φέρνουμε τόξο κύκλου με ακτίνα a , οποία ορίζουν το μικρό άξονα της

Κοιτώντας από το σημείο οράσεως O τη σφαίρα του σχήματος 5, θα δούμε την προοπτική εικόνα της να προβάλλεται στο τμήμα MN της $\gamma\epsilon$. Τα σημεία M και N είναι τα ακρότατα σημεία της προοπτικής εικόνας της σφαίρας, επομένως οι κατακόρυφες ευθείες από τα M και N είναι εφαπτόμενες της έλλειψης της προοπτικής εικόνας.

Προβάλλοντας με οπτικές ακτίνες τα σημεία Σ και P στον πίνακα, προσδιορίζουμε τις εστίες E_1 και E_2 της έλλειψης, διότι αυτά είναι τα σημεία επαφής των προβολών της εγγεγραμμένης K_1 και παρεγγεγραμμένης K_2 σφαίρας.

Οι εστίες E_1 και E_2 βρίσκονται στο χώρο σε υψόμετρο ίσο με την ακτίνα KP της σφαίρας. Προσδιορίζουμε επομένως την προοπτική εικόνα της E_1E_2 σε απόσταση KP πάνω από τη γραμμή του εδάφους.

Γνωρίζοντας την εστιακή απόσταση E_1E_2 και τις ακραίες εφαπτόμενες της έλλειψης, κατασκευάζουμε την καμπύλη της, όπως περιγράψαμε παραπάνω.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Ηλιασμός

Εισαγωγή

Σ' αυτή την ενότητα θα γνωρίσουμε μερικά στοιχεία για τον ηλιασμό, με στόχο να βρεθούμε σε θέση να διαχειριστούμε και εκμεταλλευτούμε το φυσικό φως προς όφελος του αρχιτεκτονικού σχεδιασμού.

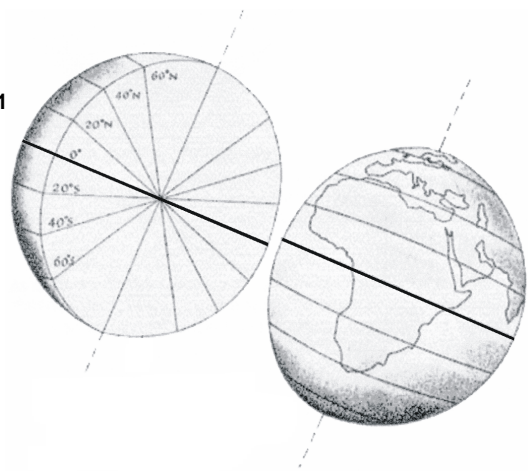
Γεωγραφικές συντεταγμένες της γης

Από το κέντρο της γης θεωρούμε ένα οριζόντιο επίπεδο τομής, κάθετο στον άξονα βορρά – νότου. Το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα της γης*¹ κατά έναν οριζόντιο κύκλο, που ονομάζουμε **ισημερινό** (σχ. 2). Ο ισημερινός είναι ο κύκλος με τη μεγαλύτερη περιφέρεια και χωρίζει τη γη στο βόρειο και νότιο ημισφαίριο. Παράλληλα προς τον ισημερινό, προς το βορρά και προς τον νότο, θεωρούμε περισσότερους οριζόντιους κύκλους, τους **παραλλήλους**. Αν ενώσουμε οποιοδήποτε σημείο ενός παραλλήλου με το κέντρο της γης σχηματίζεται μία γωνία με τον ισημερινό, η γωνία του παραλλήλου (σχ. 1).

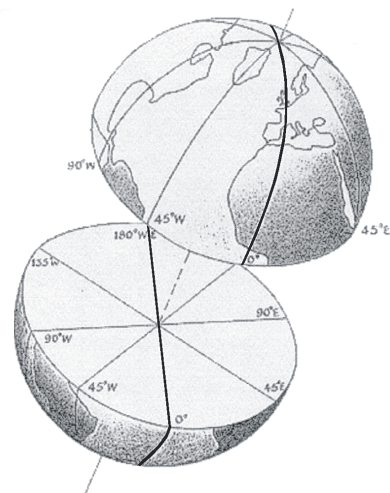
Θεωρούμε επίσης ένα κατακόρυφο επίπεδο τομής, παράλληλο δηλαδή στον άξονα βορρά – νότου, που τέμνει στην επιφάνεια της γης έναν κατακόρυφο κύκλο*², που ονομάζουμε **μεσημβρινό**. Για λόγους σύμβασης θεωρούμε ότι ο πρώτος μεσημβρινός της γης διέρχεται από την πόλη Greenwich, κοντά στο Λονδίνο, γ' αυτό συχνά ο 1ος μεσημβρινός ονομάζεται και **μεσημβρινός Greenwich** (σχ. 2). Κάθε περιστροφική μετατόπιση του 1ου μεσημβρινού προς την ανατολή ή τη δύση, με άξονα περιστροφής τον άξονα βορρά – νότου, δημιουργεί τους ανατολικούς και δυτικούς μεσημβρινούς της γης.

Το πλέγμα των παραλλήλων και μεσημβρινών δημιουργεί στην επιφάνεια της γης ένα θεωρητικό σύστημα συντεταγμένων. Κάθε τόπος στην επιφάνεια της γης ορίζεται από το γεωγραφικό του πλάτος (latitude), που αντιστοιχεί στη γωνία που σχηματίζει η ακτίνα της γης που περνά από τον τόπο αυτό με την ακτίνα προς τον ισημερινό και από το γεωγραφικό του μήκος (longitude), που αντιστοιχεί στη γωνία που σχηματίζει ο μεσημβρινός του τόπου με τον μεσημβρινό Greenwich. Το γεωγραφικό πλάτος παίρνει τιμές από 0° έως 90° βόρειο ή νότιο και το γεωγραφικό μήκος 0° έως 180° ανατολικό ή δυτικό.

σχ. 1



σχ. 2



Η Αθήνα, για παράδειγμα έχει γεωγραφικό πλάτος $37^{\circ} 58'$ βόρειο και γεωγραφικό μήκος $23^{\circ} 43'$ ανατολικό.

Οι μεσημβρινοί εκτός από το στίγμα κάθε τόπου σχετίζονται, όπως θα δούμε, και με την ώρα του τόπου.

Οι κινήσεις της γης

Η γη κινείται γύρω από τον ήλιο σε ελλειπτική τροχιά, με τον ήλιο να καταλαμβάνει τη θέση της μίας εστίας της έλλειψης (σχ. 3). Μία πλήρης περιστροφή της γης γύρω από τον ήλιο διαρκεί 365,256 ημέρες. Το επίπεδο της τροχιάς της γης γύρω από τον ήλιο σχηματίζει με το επίπεδο του ισημερινού του ήλιου γωνία $23^{\circ} 45'$ (σχ. 4). Αυτή η απόκλιση έχει σαν αποτέλεσμα οι ακτίνες του ήλιου να μη φτάνουν σε ένα δεδομένο σημείο της γης με την ίδια γωνία κατά τη διάρκεια ενός έτους. Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της, η γη δέχεται στο βόρειο ημισφαίριο τις ακτίνες του ήλιου με τη μεγαλύτερη κλίση και κάθετα στο νότιο ημισφαίριο. Στη θέση αυτή η διάρκεια της ημέρας στο βόρειο ημισφαίριο είναι η μικρότερη όλου του έτους, συμβαίνει στις 21 Δεκεμβρίου και ονομάζεται χειμερινό ηλιοστάσιο (σχ. 5). Στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της η γη δέχεται στο βόρειο ημισφαίριο τις ακτίνες του ήλιου κάθετα και στο νότιο ημισφαίριο με τη μεγαλύτερη κλίση. Στη χαμηλότερη θέση η γη βρίσκεται στις 21 Ιουνίου κάθε έτους και η ημέρα ονομάζεται θερινό ηλιοστάσιο (σχ. 6). Η διάρκεια της ημέρας είναι η μεγαλύτερη όλου του έτους στο βόρειο ημισφαίριο και η μικρότερη στο νότιο.

Στο μέσο περίπου της διαδρομής της γης από το χειμερινό στο θερινό ηλιοστάσιο όπως και από το θερινό στο χειμερινό ηλιοστάσιο, η γη περνά από δύο θέσεις όπου οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν κάθετα στον ισημερινό της γης. Τις ημέρες αυτές η διάρκεια της ημέρας και της νύχτας είναι ίσες, ονομάζονται εαρινή και φθινοπωρινή ισημερία και συμβαίνουν στις 20 Μαρτίου και 22 Σεπτεμβρίου αντίστοιχα. σχ. 5

Παρατηρούμε ότι, καθώς η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονα βορρά – νότου κατά τη διάρκεια του χειμερινού ηλιοστασίου, οι ηλιακές ακτίνες πέφτουν κάθετα και «χαράζουν» τον παράλληλο κύκλο που ονομάζουμε τροπικό του Αιγόκερω στο νότιο ημισφαίριο και εφάπτονται στη σφαίρα της γης και «χαράζουν» τον παράλληλο που ονομάζουμε Αρκτικό κύκλο στο βόρειο ημισφαίριο. Αντίστοιχα, κατά το θερινό ηλιοστάσιο «χαράζονται» ο τροπικός του Καρκίνου στο βόρειο ημισφαίριο και ο Ανταρκτικός κύκλος στο νότιο ημισφαίριο. σχ. 6

Μέτρηση του χρόνου

Ο υπολογισμός του χρόνου σ' ένα τόπο έχει άμεση σχέση με το γεωγραφικό του μήκος, με τη διαφορά ότι το γεωγραφικό μήκος μετριέται σε μοίρες άλλοτε ανατολικές κι άλλοτε δυτικές (και μέχρι 180°), ενώ οι γωνίες του χρόνου μετριοούνται μόνο προς τη δύση και φτάνουν τις 360° . κατά τη διάρκεια μίας ημέρας η γη κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονά της, δηλαδή στροφή 360° , σε διάστημα 24 ωρών. Η παραπάνω αντιστοιχία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε:

360°	=	24 ώρες
15°	=	1 ώρα
1°	=	4 λεπτά της ώρας
$1/60^{\circ}$	=	4 δευτερόλεπτα της ώρας

Αρχή μέτρησης του χρόνου της γης θεωρείται η χρονική στιγμή κατά την οποία ο μεσημβρινός Greenwich δέχεται κάθετα τις ηλιακές ακτίνες, κατά τη διάρκεια μιας ισημερίας. Τότε η ώρα στο Greenwich είναι 12:00 το μεσημέρι. Σ' έναν άλλο τόπο στον ίδιο παράλληλο, που ο μεσημβρινός του σχηματίζει με τον μεσημβρινό Greenwich γωνία 15° δυτικά, η ώρα είναι 11:00 το πρωί.

Η ώρα Greenwich λέγεται αλλιώς GMT (Greenwich Mean Time) ή UTC (Coordinated Universal Time) ή πιο απλά UT (Universal Time) και δίνεται σε τιμή ρολογιού 24 ωρών, δηλαδή 22:19 (συχνά γράφεται 2219) αντί για 10:19μμ.

Η ώρα Greenwich υπολογίζεται πολλές φορές κάθε μέρα, με βάση τα στοιχεία θέσης της γης, που δίνουν τα διάφορα ανά τον κόσμο εργαστήρια μέτρησης του χρόνου. Η μέτρηση του χρόνου φτάνει έτσι να παρουσιάζει απόκλιση 1 νανο-δευτερόλεπτο ανά ημέρα.

Γωνίες πρόσπτωσης ηλιακού φωτός

Εάν υποθέσουμε ότι η γη είναι ακίνητη με τον ήλιο να κινείται γύρω της, τότε σε κάθε τόπο ο ήλιος ρίχνει τις ακτίνες του με διαφορετική γωνία κάθε χρονική στιγμή.

Τοποθετώντας έναν παρατηρητή να κοιτά σταθερά προς το βορρά, τότε παρατηρούμε ότι από την ανατολή (στα δεξιά του παρατηρητή) μέχρι τη δύση του (στ' αριστερά του παρατηρητή) ο ήλιος διαγράφει ένα τόξο, που μπορούμε να θεωρήσουμε κυκλικό. Αν ο παρατηρητής δεν βρίσκεται κοντά στον Αρκτικό ή τον Ανταρκτικό παράλληλο, τότε παρατηρούμε ότι κατά τη διάρκεια μιας ημέρας ο ήλιος σχηματίζει με τον ορίζοντα του τόπου μια γωνία που συνεχώς αυξάνεται μέχρι τη μεσουράνηση του ήλιου και από κει και μετά μειώνεται, μέχρι τη δύση του ήλιου. Η γωνία που μας δίνει το ύψος του ήλιου από τη γραμμή του ορίζοντα (σχ. 7) ονομάζεται γωνία ύψους ηλίου (altitude angle). Η γωνία που μας δίνει την απόκλιση του ήλιου σε σχέση με το βορρά (σχ. 8) ονομάζεται γωνία αζιμουθίου (azimuth angle). Συνήθως η γωνία αζιμουθίου έχει θετικές τιμές κινούμενη δεξιόστροφα, με τις 0° να ορίζονται στο βορρά.

Στους παράπλευρους πίνακες παρουσιάζονται οι γωνίες ύψους ηλίου και αζιμουθίου για το στίγμα της Αθήνας στις 30 Ιανουαρίου 2004 και στην ισημερία 2004. Σημειώνεται ότι η ώρα αναφοράς είναι η UTC. Για να βρούμε την ώρα της Αθήνας, θα πρέπει να μετατρέψουμε σε μοίρες τη γωνία του γεωγραφικού μήκους της Αθήνας και να την προσθέσουμε στην UTC (περίπου 2:25).

Μεσημβρινός ενός τόπου

Ένας πρακτικός τρόπος, αν και όχι ιδιαίτερα ακριβής, για να προσδιορίσουμε τη θέση του βορρά ενός τόπου, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε πυξίδα, είναι ο εξής:

Σε οριζόντιο και επίπεδο έδαφος στήνουμε κατακόρυφα έναν στύλο και χαράζουμε στο έδαφος ημικύκλια προς την πλευρά του βορρά (σχ. 9). Σε κάποια πρωινή ώρα η σκιά του στύλου θα βρεθεί σε κάποιο σημείο ενός από τα ημικύκλια. Σημαδεύουμε το σημείο α και περιμένουμε μέχρι η σκιά του στύλου να πέσει στο ίδιο με το πρώτο ημικύκλιο, κάποια απογευματινή ώρα. Σημαδεύουμε και το δεύτερο σημείο β. Η θέση του βορρά βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας αΟβ.

Η χρήση της πυξίδας μοιάζει πιο απλή, αλλά πρέπει να συνυπολογίζουμε τη γωνία απόκλισης του γεωγραφικού από τον μαγνητικό βορρά, η οποία εξαρτάται από το στίγμα του τόπου. Για το στίγμα της Αθήνας η απόκλιση του μαγνητικού βορρά είναι περίπου 3^ο 7' ανατολικά, με ρυθμό απόκλισης 3,8'/έτος.

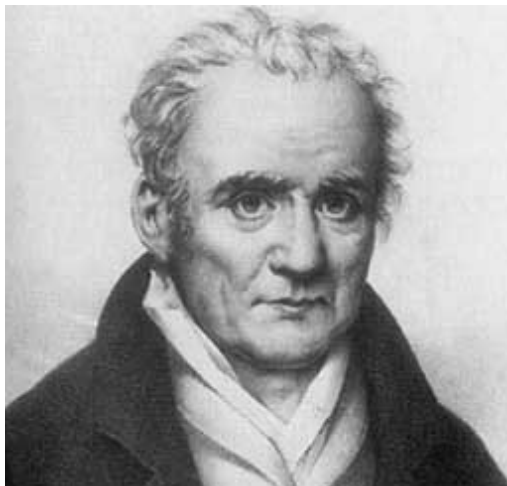
SUN'S ALTITUDE & AZIMUTH		
UTC DATE: 30 JANUARY 2004		
POSITION: 37°58'N 23°43'E		
UTC	ALT (°)	AZM (°)
0540	001	113
0550	003	115
0600	005	117
0610	006	118
0620	008	120
0630	010	122
0640	011	123
0650	013	125
0700	015	127
0710	016	129
0720	018	131
0730	019	133
0740	021	135
0750	022	137
0800	023	139
0810	025	141
0820	026	143
0830	027	146
0840	028	148
0850	029	150
0900	030	153
0910	031	155
0920	032	158
0930	032	161
0940	033	163
0950	033	166
1000	034	169
1010	034	172
1020	034	175
1030	035	178
1040	035	180
1050	034	183
1100	034	186
1110	034	189
1120	034	192
1130	033	195
1140	033	197
1150	032	200
1200	031	203
1210	031	205
1220	030	208
1230	029	210
1240	028	213
1250	027	215
1300	025	218
1310	024	220
1320	023	222
1330	022	224
1340	020	226
1350	019	228
1400	017	230
1410	016	232
1420	014	234
1430	013	236
1440	011	237
1450	009	239
1500	007	241
1510	006	242
1520	004	244
1530	002	246
1540	000	247

SUN'S ALTITUDE & AZIMUTH		
UTC DATE: 20 MARCH 2004		
POSITION: 37°58'N 23°43'E		
UTC	ALT (°)	AZM (°)
0440	002	091
0450	004	093
0500	006	094
0510	008	096
0520	010	097
0530	012	099
0540	014	101
0550	015	102
0600	017	104
0610	019	106
0620	021	107
0630	023	109
0640	025	111
0650	027	113
0700	029	115
0710	030	117
0720	032	119
0730	034	121
0740	035	123
0750	037	126
0800	039	128
0810	040	131
0820	042	133
0830	043	136
0840	044	139
0850	046	142
0900	047	145
0910	048	149
0920	049	152
0930	050	156
0940	051	159
0950	051	163
1000	052	167
1010	052	171
1020	052	175
1030	052	179
1040	052	183
1050	052	187
1100	052	191
1110	051	195
1120	051	199
1130	050	203
1140	049	206
1150	048	210
1200	047	213
1210	046	216
1220	045	220
1230	044	223
1240	042	225
1250	041	228
1300	039	231
1310	038	233
1320	036	236
1330	035	238
1340	033	240
1350	031	242
1400	030	244
1410	028	246
1420	026	248
1430	024	250
1440	022	252
1450	020	254
1500	018	255
1510	017	257
1520	015	259
1530	013	260
1540	011	262
1550	009	264
1600	007	265
1610	005	267
1620	003	268
1630	001	270

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Gaspard Monge

1746 – 1818



Ο Gaspard Monge γεννήθηκε στη Beaune της Βουργουνδίας. Ο πατέρας του Jacques Monge ήταν έμπορος, με καταγωγή από την Άνω Σαβοΐα της νοτιοανατολικής Γαλλίας. Η πόλη Beaune, όπου μεγάλωσε ήταν η πατρίδα της μητέρας του Jeanne Rousseaux.

Την εποχή της γέννησής του η περιοχή αυτή, έπειτα από μια περίοδο μαρσαμού, είχε πάλι αρχίσει να ακμάζει, χάρη στο οινεμπόριο.

Ο Monge σπούδασε στο Ορατοριανό Κολέγιο της Beaune, σχολείο για νεαρούς ευγενείς, με ιερείς για δασκάλους. Το πνεύμα της διδασκαλίας του σχολείου ήταν πιο φιλελεύθερο από άλλα παρόμοια, με μαθήματα όχι μόνο ανθρωπιστικών επιστημών, αλλά και ιστορίας, μαθηματικών και φυσικών επιστημών. Εκεί ο Monge έδειξε για πρώτη φορά την ευφυΐα του. Σε ηλικία 16 ετών συνέχισε τη μόρφωσή του στο Κολέγιο της Αγίας Τριάδας στη Λυών. Αν και μόλις 17 ετών, του ανατέθηκε να διδάξει μαθήματα φυσικής. Τελειώνοντας την εκπαίδευσή του στη Λυών, επέστρεψε στη Beaune και σχεδίασε έναν χάρτη της πόλης.

Αυτό το σχέδιο επρόκειτο να έχει καθοριστική σημασία για τη ζωή του: το είδε ένας καθηγητής της στρατιωτικής σχολής Ecole Royale du Génie στη Mézières και εντυπωσιάστηκε. Έτσι, στα 19 του ο Monge, διορίστηκε «σχεδιαστής» στην εν λόγω σχολή. Στην αρχή η εργασία του

δεν χρειαζόταν τις μαθηματικές του ικανότητες, έτσι αξιοποιούσε τον ελεύθερο χρόνο του αναπτύσσοντας τις γεωμετρικές ιδέες του. Η θέση του περιελάμβανε και καθήκοντα που δεν τον ικανοποιούσαν ιδιαίτερα, γιατί προσδοκούσε σε καλύτερη αξιοποίηση του μαθηματικού του ταλέντου. Στην Ecole Royale du Génie ήρθε όμως σε επαφή με τον καθηγητή των μαθηματικών Charles Bossut.

Ένα χρόνο αργότερα ο Monge ανέλαβε ένα έργο που του επέτρεψε να εφαρμόσει τη δεξιότητά του στα μαθηματικά. Επρόκειτο για τη σχεδίαση ενός οχυρωματικού έργου, που θα εμπόδιζε τον εχθρό να βλέπει και να βάλει καίριες θέσεις. Αντί για τις πολύπλοκες μεθόδους που εφαρμόζαν μέχρι τότε, ο Monge επινόησε μια δική του μέθοδο, εφαρμόζοντας τις γεωμετρικές τεχνικές που είχε εφεύρει. Το μαθηματικό του ταλέντο έγινε έτσι πασίγνωστο στην Ecole Royale du Génie και αναγνωρίστηκε ότι επρόκειτο για άνθρωπο με σπάνιες ικανότητες σε θεωρητικά και εφαρμοσμένα θέματα γεωμετρίας.

Ο Bossut εκλέχτηκε μέλος της Ακαδημίας Επιστημών το 1768 και έγινε καθηγητής υδροδυναμικής στο Λούβρο, αφήνοντας τη Mézières. Λίγο αργότερα ο Monge του έστειλε ένα γράμμα, ενημερώνοντάς τον για μια μελέτη του σχετική με τις επιφάνειες διπλής καμπυλότητας και ζητώντας του να αξιολογήσει την πρωτοτυπία και χρησιμότητα της εργασίας. Η απάντηση του Bossut ήταν προφανώς θετική, γιατί 5 μήνες αργότερα μια περίληψη της μελέτης δημοσιεύτηκε στη Journal Encyclopedique (η πρώτη δημοσίευση του Monge). Η πλήρης μελέτη υποβλήθηκε στην Ακαδημία Επιστημών τον επόμενο χρόνο και παρουσιάστηκε προφορικά στα μέλη της το 1771, αλλά δεν δημοσιεύτηκε από την Ακαδημία, παρά 14 χρόνια αργότερα.

Το 1769 ο Monge διαδέχτηκε τον Bossut στην Ecole Royale du Génie, μετά την αποχώρηση του δεύτερου. Λίγο αργότερα ανέλαβε και τη διδασκαλία της πειραματικής φυσικής. Ήταν μεγάλο βήμα στην καριέρα του Monge, αλλά αυτό που τον ενδιέφερε περισσότερο ήταν να αναγνωριστεί ως μαθηματικός από τους υψηλούς κύκλους. Έτσι, το 1771 προσέγγισε τους d' Alembert και Condorcet. Ο Condorcet μάλλον εντυπωσιάστηκε από το βάθος των μαθηματικών που του έδειξε ο Monge και του συνέστησε να υποβάλλει υπομνήματα στην Ακαδημία Επιστημών για κάθε μία περιοχή των μαθηματικών που διερευνούσε.

Πράγματι ο Monge υπέβαλλε υπομνήματα για 4 διαφορετικά θέματα, προσθέτοντας λίγο αργότερα και σειρά από άλλες εργασίες. Τα ενδιαφέροντά του άρχισαν πλέον να εκτείνονται και πέρα από τα μαθηματικά, στις περιοχές της φυσικής και της χημείας.

Το 1777 ο Monge παντρεύτηκε την Catherine Huart και, με αφορμή το χυτήριο της γυναίκας του, άρχισε να ενδιαφέρεται και για τη μεταλλουργία, παράλληλα με τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Στα πλαίσια της διδασκαλίας του στην Ecole Royale du Génie, πρωτοστάτησε στην οργάνωση ενός εργαστηρίου χημείας.

Από το 1780 άρχισε να αφιερώνει λιγότερο χρόνο στην Ecole Royale du Génie, γιατί εκλέχτηκε «Adjoint Géomètre» της Ακαδημίας Επιστημών στο Παρίσι. Άρχισε να περνά μεγάλες περιόδους στο Παρίσι, αντικαθιστώντας τον Bossut στη διδασκαλία υδροδυναμικής. Συμμετείχε επίσης σε ερευνητικά προγράμματα της Ακαδημίας σε θέματα μαθηματικών, φυσικής και χημείας.

Ήταν δύσκολο να κάνει όλα αυτά και ταυτόχρονα να διδάσκει στη Mézières, όμως κράτησε τη θέση του εκεί, με πλήρη μισθό, από τον οποίο πλήρωνε άλλους να τον αντικαθιστούν σε μερικά μαθήματα. Μετά από 3 χρόνια στο Παρίσι και στη Mézières, ο Monge ανέλαβε κι άλλη θέση, ως εξεταστής Ναυτικών Δοκίμων. Προσπάθησε μάταια να εφαρμόσει ένα ακατόρθωτο πρόγραμμα, αλλά τελικά αποφάσισε να παραιτηθεί από τη διδασκαλία στη Mézières στο τέλος του 1784.

Έτσι έφτασε το 1789, ένα σημαντικό έτος για την ιστορία της Γαλλίας, με την κατάληψη της Βασίλλης στις 14 Ιουλίου, που σήμανε την αρχή της γαλλικής επανάστασης. Πολιτικά ο Monge ήταν ένθερμος υποστηρικτής της επανάστασης και η πρώτη του δράση ήταν να δείξει την συμπαράστασή του, συμμετέχοντας σε διάφορες οργανώσεις που υποστήριζαν την επανάσταση. Παράλληλα εκτελούσε κανονικά τα καθήκοντά του ως εκπαιδευτής ναυτικών δοκίμων και ως σημαντική προσωπικότητα της Ακαδημίας. Την εποχή εκείνη ήταν μέλος της Ακαδημαϊκής Επιτροπής Μέτρων & Σταθμών. Στις 21 Σεπτεμβρίου 1792, οπότε

καταργήθηκε η μοναρχία και εγκαθιδρύθηκε η γαλλική δημοκρατία, ο Monge ανέλαβε το υπουργείο Ναυτικών, με απόφαση της εθνοσυνέλευσης.

Ο Monge, σαν υπουργός, δεν κατάφερε να ικανοποιήσει τις αντιφατικές απαιτήσεις και γι' αυτό η περίοδος της θητείας του δεν χαρακτηρίζεται επιτυχής. Παρά τις σκληρές προσπάθειές του, παραιτήθηκε τον Απρίλιο του 1793. Ξαναύρισε στην Ακαδημία Επιστημών, αλλά κι αυτό δεν κράτησε πολύ, γιατί τον Αύγουστο του ίδιου χρόνου η Ακαδημία καταργήθηκε με απόφαση της εθνοσυνέλευσης.

Εργάστηκε σε διάφορα στρατιωτικά θέματα σχετικά με όπλα και εκρηκτικά, γράφοντας εργασίες και δίνοντας διαλέξεις. Συνέχισε να είναι μέλος της Επιτροπής Μέτρων & Σταθμών. Πρότεινε εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις στην εθνοσυνέλευση, που έγιναν δεκτές στις 15 Σεπτεμβρίου 1793, αλλά απορρίφθηκαν στις 16, δείχνοντας έτσι τη ρευστότητα και πολιτική αστάθεια εκείνης της περιόδου.

Το Μάρτιο του 1794 ο Monge διορίστηκε από την εθνοσυνέλευση στην επιτροπή δημιουργίας της Κεντρικής Σχολής Δημοσίων Έργων, που σύντομα μετονομάστηκε στην Ecole Polytechnique. Όχι μόνο επηρέασε καθοριστικά την οργάνωση της σχολής, αξιοποιώντας την πείρα του από τη Mézières, αλλά διορίστηκε και εκπαιδευτή Παραστατικής Γεωμετρίας το Νοέμβριο του 1794. Το πρώτο του μέλημα έγινε τότε η προετοιμασία των νέων διδασκόντων της σχολής, που άρχισε να λειτουργεί τον επόμενο Ιούνιο. Οι διαλέξεις του Monge περί γεωμετρίας αποτέλεσαν τη βάση για το βιβλίο του «Εφαρμογές της ανάλυσης στη γεωμετρία».

Ανέλαβε επίσης τη διδασκαλία της παραστατικής γεωμετρίας σε ένα από τα νέα εκπαιδευτικά ιδρύματα, την Ecole Normale, που δημιουργήθηκε για την εκπαίδευση των καθηγητών γυμνασίου. Η πίστη του στην Ακαδημία Επιστημών τον έκανε να εργαστεί σκληρά για την επανίδρυσή της ως Εθνικού Ινστιτούτου. Η εθνοσυνέλευση ενέκρινε τον νέο οργανισμό τον Οκτώβριο του 1795.

Λίγο αργότερα ο Monge βρέθηκε για ενάμιση χρόνο στην Ιταλία με σκοπό να επιλέξει τους καλύτερους καλλιτεχνικούς θησαυρούς για τους κατακτητές και να τους φέρει στη Γαλλία. Έγινε φίλος του Ναπολέοντα Βοναπάρτη και ήταν αυτός που έφερε στη Γαλλία το κείμενο της συνθήκης του Campo Formio.

Με την επιστροφή του στο Παρίσι διορίστηκε διευθυντής της Ecole Polytechnique. Τον Φεβρουάριο του 1798 ο Monge βρίσκεται ξανά στην Ιταλία, αυτή τη φορά για την ίδρυση της δημοκρατίας της Ρώμης, όπου εκτός των άλλων, πρότεινε και τη δημιουργία ειδικών σχολών. Ξαναβρέθηκε κοντά στον Ναπολέοντα κι εκείνος του πρότεινε να τον ακολουθήσει. Δέχτηκε μάλλον απρόθυμα, αλλά παρόλ' αυτά ακολούθησε τον Ναπολέοντα στην εκστρατεία στην Αίγυπτο.

Μετά την καταστροφή του γαλλικού στόλου στο δέλτα του Νείλου από τον Νέλσωνα, ο Monge μαζί με τον Ναπολέοντα, βρέθηκε αποκλεισμένος στην κατακτημένη Αίγυπτο, όμως αυτό δεν τον εμπόδισε να διοριστεί πρόεδρος του Αιγυπτιακού Ινστιτούτου, μιας 12/μελούς ομάδας με έδρα το Κάιρο, μεταξύ των οποίων ήταν και οι Fourier και Malus. Παρά τις δυσκολίες στην Αίγυπτο, ο Monge συνέχισε να εργάζεται για τη διατριβή του περί αναλυτική γεωμετρίας.

Ο Ναπολέων εγκατέλειψε το στρατό του το 1799 και γύρισε στο Παρίσι, όπου σύντομα έγινε απόλυτος μονάρχης. Μαζί του επέστρεψε κι ο Monge και ανέλαβε εκ νέου τη θέση του στην Ecole Polytechnique. Ο Ναπολέων διόρισε τον Monge ισόβιο γεροισιαστή του Consulate κι εκείνος δέχτηκε μ' ευχαρίστηση, αν και οι δημοκρατικές απόψεις του ήταν φαινομενικά αντίθετες με τη στρατιωτική δικτατορία του Βοναπάρτη. Ο Monge σαγηνεύτηκε από τον Ναπολέοντα και δέχτηκε όλες τις τιμές και τα δώρα που του πρόσφερε ο νέος αυτοκράτορας. Σύντομα χρίστηκε «Αξιωματούχος της Λεγεώνας της Τιμής» (1804), «Πρόεδρος της Γερουσίας» (1806) και «Κόμης του Péluse» (1808).

Τα επόμενα χρόνια ο Monge είχε πολύπλευρη δραστηριότητα, εκτελώντας τα καθήκοντα του γεροισιαστή και διατηρώντας το ενδιαφέρον του για τη μαθηματική έρευνα, αλλά κυρίως με τη διδασκαλία και τη συγγραφή κειμένων για τους σπουδαστές της Ecole Polytechnique. Η συμμετοχή του στη μαθηματική έρευνα μειώθηκε βαθμιαία τα επόμενα χρόνια, λόγω της κακής του υγείας. Το 1809 σταμάτησε οριστικά να διδάσκει στην Ecole Polytechnique.

Μετά την ήττα του Ναπολέοντα στο Βατερλώ το 1815, ο Monge εγκατέλειψε το Παρίσι από φόβο για τη ζωή του. Το 1816, σε ηλικία 70 χρονών πια επέστρεψε στο Παρίσι, αλλά δύο μέρες μετά την επιστροφή του εκδιώχθηκε από το Ινστιτούτο της Γαλλίας. Μετά απ' αυτό η ζωή του έγινε απελπιστικά δύσκολη, με συχνές πολιτικές παρενοχλήσεις και απειλές για τη ζωή του. Στην κηδεία του, τον Ιούλιο του 1818 τιμήθηκε από τους σπουδαστές της Ecole Polytechnique, παρά την αντίθετη εντολή της γαλλικής κυβέρνησης.

Ο Gaspard Monge δεν έμεινε στην ιστορία λόγω των πολιτικών του θέσεων και πράξεων, αλλά για τα μαθηματικά του επιτεύγματα. Θεωρείται ο πατέρας της διαφορικής γεωμετρίας, επειδή το έργο του «Εφαρμογές της ανάλυσης στη γεωμετρία» εισάγει την έννοια των γραμμών καμπυλότητας μιας τρισδιάστατης επιφάνειας. Ανέπτυξε ακόμη μια γενική μέθοδο εφαρμογής της γεωμετρίας σε κατασκευαστικά θέματα, καθώς και την απεικόνιση στερεών με προβολή σε δύο κάθετα επίπεδα. Αυτές οι τεχνικές γενικεύτηκαν στο σύστημα που ονομάστηκε Παραστατική γεωμετρία, με ευρεία εφαρμογή στο τεχνικό σχέδιο.

Η βασική φιλοσοφία του Monge χαρακτηρίζεται από τη «γεωμετρικοποίηση» των μαθηματικών με βάση:

- την αναλογία ή αντιστοιχία των πράξεων της ανάλυσης με γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και
- την ταξινόμηση και παραμετροποίηση των επιφανειών, αναλύοντας την κίνηση των γενετειρών τους.

Ο Monge θεωρούσε την ανάλυση όχι σαν αυτοδύναμη γλώσσα, αλλά κυρίως σαν «σενάριο» του «μεταβλητού γεωμετρικού θέματος», που απαρτίζει την πραγματικότητα. Η νέα προσέγγισή του εστιάστηκε στις πιο βαθιές, εσωτερικές και καθολικές σχέσεις στο χώρο και στους μετασχηματισμούς του, οδηγώντας τον στο συνδυασμό γεωμετρίας και ανάλυσης, με ένα γόνιμο και ως τότε άγνωστο τρόπο. Τα πρακτικά προβλήματα ήταν αυτά που ώθησαν τον Monge να αντιληφθεί το αντικείμενο και τη λειτουργία των μαθηματικών με νέο τρόπο, αντίθετο με τα φορμαλιστικά πρότυπα των καθιερωμένων πατρώνων των μαθηματικών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</u>	1
<u>ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ</u>	5
<u>Σύστημα Προβολής</u>	5
<u>Παράλληλη προβολή</u>	6
<u>Γενικά.</u>	6
<u>Απεικόνιση στο σύστημα δύο επιπέδων προβολής.</u>	6
<u>Απεικόνιση σημείου</u>	7
<u>Απεικόνιση ευθείας</u>	9
<u>Χαρακτηριστικές ευθείες.</u>	10
1. <u>Κατακόρυφες ευθείες</u>	10
2. <u>Πρόσθιες ευθείες</u>	10
3. <u>Οριζόντιες ευθείες</u>	10
4. <u>Μετωπικές ευθείες</u>	10
5. <u>Ευθείες παράλληλες στον άξονα γ_2</u>	11
6. <u>Ευθείες εγκάρσιες στον άξονα γ_2</u>	11
7. <u>Ευθείες που ανήκουν στο επίπεδο συμμετρίας Π_3.</u>	12
8. <u>Ευθείες που ανήκουν στο επίπεδο συμπτώσεως Π_4.</u>	13
<u>Απεικόνιση επιπέδων στο προβολικό σύστημα</u>	13
<u>Απεικόνιση τυχαίας ευθείας, που ανήκει σε τυχαίο επίπεδο</u>	13
<u>Χαρακτηριστικές θέσεις επιπέδων</u>	14
1. <u>Οριζόντια Επίπεδα</u>	14
2. <u>Μετωπικά Επίπεδα</u>	15
3. <u>Κατακόρυφο επίπεδο</u>	16
4. <u>Πρόσθιο επίπεδο</u>	17
<u>Ιχνοπαράλληλες επιπέδου</u>	18
<u>Εύρεση 2ης προβολής σημείου M του επιπέδου E</u>	18
<u>Εύρεση των ιχών επιπέδου του οποίου γνωρίζουμε τις ιχνοπαράλληλες.</u>	19
<u>Τομή επιπέδων</u>	20
<u>Τομή ευθείας και επιπέδου</u>	21
<u>ΑΞΟΝΟΜΕΤΡΙΑ</u>	25
<u>Εισαγωγή</u>	25
<u>Σύστημα προβολής</u>	26
<u>Απεικόνιση βασικών σχημάτων</u>	28
<u>Απεικόνιση ευθειών και πολυέδρων</u>	28
<u>Απεικόνιση κύκλου</u>	29
<u>Απεικόνιση σφαίρας</u>	29
<u>ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ</u>	33
<u>Εισαγωγή</u>	33
<u>Σύστημα προβολής</u>	35
<u>Προοπτικά βασικών σχημάτων του e_1.</u>	36
<u>Προοπτικό ευθείας</u>	36
<u>Παράλληλη μετατόπιση βάσης</u>	38
<u>Προοπτικό σημείου</u>	38

<u>Οπτικές ακτίνες</u>	39
<u>Προοπτικό τυχαίου σχήματος του επιπέδου</u>	39
<u>Προοπτικό παραλληλογράμμου</u>	40
<u>Προοπτικό ορθογωνίου παραλληλογράμμου - Μετωπικό προοπτικό.</u>	40
<u>Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε προοπτικά ίσα μέρη</u>	41
<u>Προοπτικά σχημάτων σε επίπεδα παράλληλα στο e_1</u>	41
<u>Προοπτικό οριζόντιας ευθείας</u>	41
<u>Προοπτικό ορθού πρίσματος</u>	42
1. <u>Το πρίσμα εδράζεται στο e_1</u>	42
2. <u>Το πρίσμα δεν εδράζεται στο e_1</u>	43
<u>Προοπτικό τυχαίας ευθείας</u>	44
<u>Προοπτικό κύκλου</u>	46
1. <u>Προοπτικό κύκλου του επιπέδου e_1</u>	46
2. <u>Προοπτικό κατακόρυφου κύκλου</u>	47
3. <u>Προοπτικό κύκλου σε τυχαίο επίπεδο</u>	48
<u>Προοπτικά στερεών σχημάτων</u>	49
<u>Προοπτικό κυλίνδρου</u>	49
1. <u>Κατακόρυφος κύλινδρος</u>	49
2. <u>Οριζόντιος κύλινδρος</u>	50
<u>Προοπτικό κώνου</u>	52
<u>Προοπτικό σφαίρας</u>	53
<u>Προοπτικές παραμορφώσεις</u>	55
<u>Σχετικές θέσεις παρατηρητή, αντικειμένου, πίνακα και ορίζοντα</u>	57
<u>Ανακλάσεις στο προοπτικό</u>	59
1. <u>Ανάκλαση σε κατακόρυφη επιφάνεια</u>	60
2. <u>Ανάκλαση σε οριζόντια επιφάνεια</u>	60
ΣΚΙΑΓΡΑΦΙΑ	63
<u>Γενικές αρχές και έννοιες</u>	63
<u>Σκιαγραφία στο σύστημα Monge</u>	66
<u>Σκιά ευθυγράμμου τμήματος</u>	66
1. <u>Η σκιά βρίσκεται ολόκληρη στο επίπεδο Π_1</u>	66
2. <u>Η σκιά βρίσκεται και στα δύο επίπεδα προβολής Π_1 και Π_2</u>	66
3. <u>Σκιά κατακόρυφου ευθυγράμμου τμήματος</u>	67
<u>Σκιά επιπέδου σχήματος</u>	68
<u>Σκιά πολυέδρου</u>	69
<u>Σκιές ευθυγράμμων τμημάτων σε έδρες πολυέδρων</u>	70
1. <u>Το τμήμα AB είναι κατακόρυφο</u>	70
2. <u>Το τμήμα AB είναι πλάγιο</u>	71
3. <u>Σκιά πλάγιου τμήματος σε πλάγιο επίπεδο (μέθοδος επικάλυψης σκιών)</u>	72
<u>Σκιές στερεών</u>	73
1. <u>Σκιές πολυέδρων</u>	73
2. <u>Σκιά κώνου</u>	75
3. <u>Σκιά κυλίνδρου</u>	75
4. <u>Σκιά σφαίρας</u>	76
<u>Σκιαγραφία στην αξονομετρία</u>	79
<u>Μεταφορά της διεύθυνσης φωτισμού από την παραστατική στην αξονομετρική προβολή</u>	79
<u>Σκιά ευθυγράμμου τμήματος</u>	79

<u>Σκιές ευθυγράμμων τμημάτων σε έδρες πολυέδρων</u>	80
1. <u>Το τμήμα AB είναι κατακόρυφο</u>	80
2. <u>Το τμήμα AB είναι πλάνιο</u>	81
3. <u>Σκιά πλανίου τμήματος σε πλάνιο επίπεδο (μέθοδος επικάλυψης σκιών)</u>	82
<u>Σκιές στερεών</u>	82
1. <u>Σκιές πολυέδρων</u>	82
2. <u>Σκιά κώνου</u>	84
3. <u>Σκιά κυλίνδρου</u>	84
4. <u>Σκιά σφαίρας</u>	85
<u>Σκιαγραφία στην προοπτική</u>	87
<u>Σχετικές θέσεις της εικόνας του ήλιου</u>	88
1. <u>Η εικόνα του ήλιου βρίσκεται πάνω από τον ορίζοντα</u>	88
2. <u>Η εικόνα του ήλιου βρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα</u>	89
<u>Ακτίνες παράλληλες στον πίνακα</u>	89
<u>Σκιές στερεών</u>	90
1. <u>Σκιά σφαίρας με παράλληλες ακτίνες</u>	90
2. <u>Σκιά σφαίρας με την εικόνα του ήλιου</u>	91
<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α</u>	93
<u>Γεωμετρικές κατασκευές</u>	93
1. <u>Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος</u>	93
2. <u>Διχοτόμος γωνίας</u>	93
3. <u>Χάραξη της διχοτόμου γωνίας με άγνωστη κορυφή</u>	93
4. <u>Μεταφορά γωνίας</u>	93
5. <u>Εφαπτόμενες κύκλου</u>	94
6. <u>Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε n ίσα μέρη</u>	94
7. <u>Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (χρυσή τομή)</u>	95
8. <u>Κατασκευή πενταγώνου</u>	95
9. <u>Κατασκευή πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο</u>	95
10. <u>Κατασκευή εξαγώνου</u>	96
11. <u>Κατασκευή εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο</u>	96
12. <u>Κατασκευή επταγώνου</u>	96
13. <u>Κατασκευή επταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο</u>	97
14. <u>Κατασκευή οκταγώνου</u>	97
15. <u>Κατασκευή οκταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο</u>	97
16. <u>Κατασκευή πεπλατυσμένου πολυκεντρικού τόξου</u>	98
17. <u>Κατασκευή ασύμμετρου τόξου δεδομένων των σημείων γένεσής του</u>	98
18. <u>Γεωμετρική κατασκευή έλλειψης</u>	98
19. <u>Εφαπτομένη έλλειψης από σημείο του μεγάλου άξονά της</u>	99
20. <u>Εφαπτομένη έλλειψης από τυχαίο σημείο εκτός της περιφέρειάς της</u>	99
21. <u>Εφαπτομένη έλλειψης μέσω της ευθείας Pascal</u>	100
22. <u>Εφαπτομένη έλλειψης παράλληλη σε γνωστή διεύθυνση</u>	100
23. <u>Συζυγείς διάμετροι έλλειψης</u>	100
24. <u>Κατασκευή Rytz</u>	101
25. <u>Κατασκευή σπείρας μέσω ημικυκλίων</u>	102
26. <u>Κατασκευή σπείρας με τέσσερα κέντρα και σταθερό βήμα</u>	102
27. <u>Κατασκευή της διακοσμητικής σπείρας του ιωνικού κιονόκρανου</u>	102
<u>Το παιχνίδι της Γεωμετρίας</u>	104

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β</u>	105
<u>Προοπτικό περιγράμματος σφαίρας</u>	105
<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ</u>	107
<u>Ηλιασμός</u>	107
<u>Εισαγωγή</u>	107
<u>Γεωγραφικές συντεταγμένες της γης</u>	107
<u>Οι κινήσεις της γης</u>	108
<u>Μέτρηση του χρόνου</u>	109
<u>Γωνίες πρόσπτωσης ηλιακού φωτός</u>	110
<u>Μεσημβρινός ενός τόπου</u>	111
<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ</u>	113
<u>Gaspard Monge</u>	113
<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>	117